CALENDARI MATEMÀTIC 2021 -2022

La Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana Al-Khwarizmi és una societat de professores i professors de Matemàtiques. Els objectius de la Societat són, d'acord amb els seus estatuts:

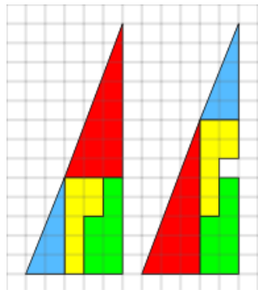
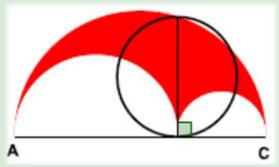
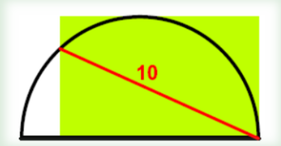
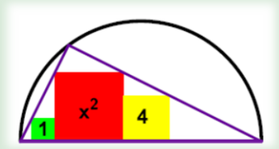
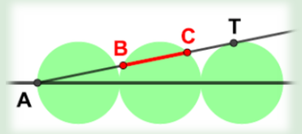
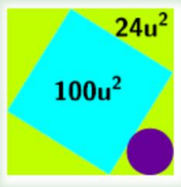
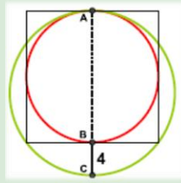
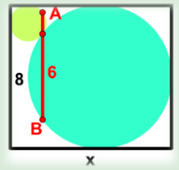
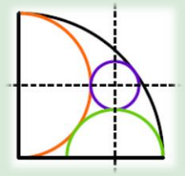
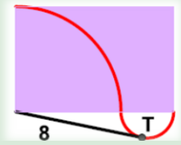
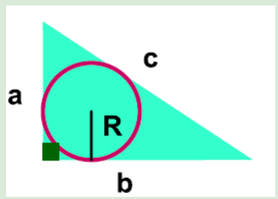
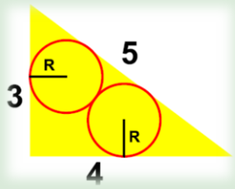
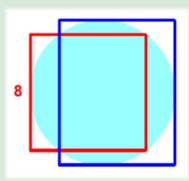
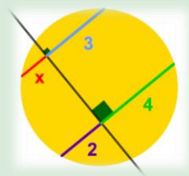
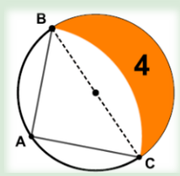
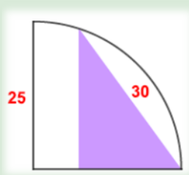
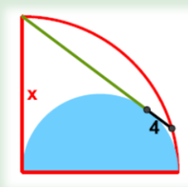
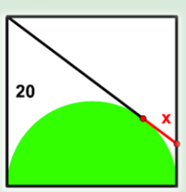
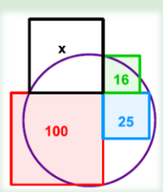
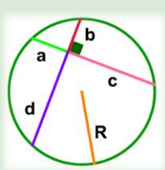
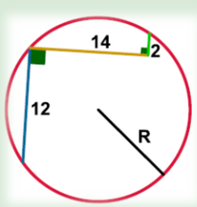
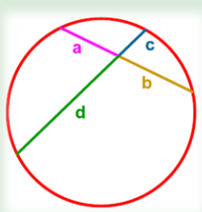
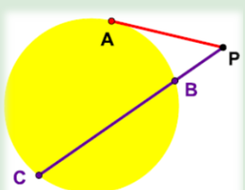
1. **Difondre les matemàtiques i els diversos corrents de pensament matemàtic.**
2. **Transmetre innovacions educatives en l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques.**
3. **Impulsar el desenvolupament i difusió d'investigacions en Educació Matemàtica.**
4. **Fomentar totes aquelles activitats encaminades a superar els obstacles a la difusió de les matemàtiques generats per motius culturals o de gènere.**
5. **Col·laborar i intercanviar informació amb Associacions i Societats de similar caràcter i finalitat.**
6. **Col·laborar amb institucions i entitats per a la realització d'estudis i activitats relacionats amb les Matemàtiques i l'Educació Matemàtica.**
7. **Realitzar estudis, crítiques i propostes curriculars per a qualsevol dels nivells educatius.**

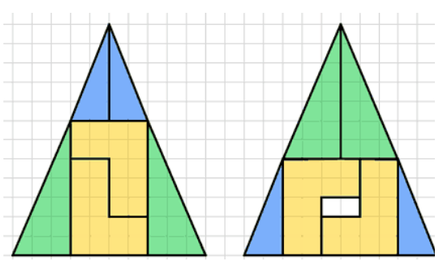
Si consideres que aquests objectius són importants posa't en contacte amb nosaltres en la pàgina

http://www.semcv.org/.

DIPUTACIÓ DE CASTELLÓ

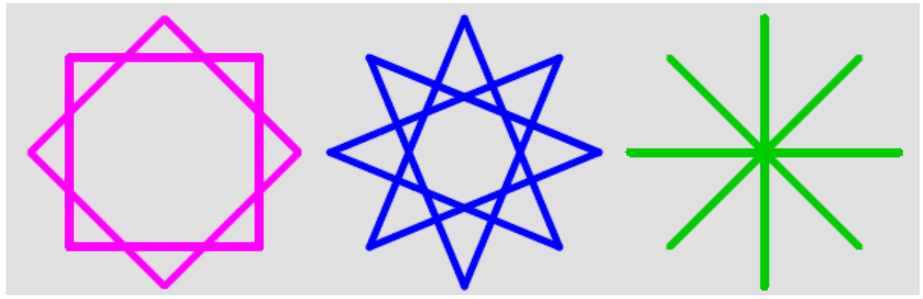
SETEMBRE

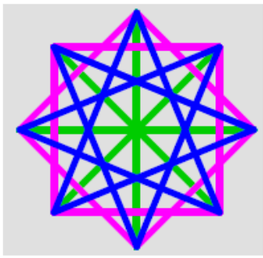
	DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES	DIJOUS	DIVENDRES	DISSABTE	DG.
			**1** Tres semicircumferències amb centre en el segment AC. Relaciona l'àrea de la zona roja i l'àrea del cercle negre 	**2** Semicercle, corda de longitud 10 i rectangle. Trobeu àrea del rectangle 	**3** Semicercle, tres quadrats d'àrees 1, x^2 i 4 i triangle. Trobeu x 	**4** Tres cercles iguals, de radi 1, tangents entre si, T punt de tangència. Trobeu BC 	**5**
	6 Dos quadrats i un cercle. Trobeu l'àrea del cercle 	**7** Dues semicircumferències amb diàmetres en AB||base. Si la línia fúcsia mesura π, trobeu el perímetre del rectangle 	**8** Dues circumferències amb centre en AB. Si BC = 4 cm, trobeu l'àrea tancada entre els cercles 	**9** Dos cercles tangents i un rectangle de base x i altura 8. Si AB = 6, trobeu x 	**10** Un quadrant, un cercle i dues semicircumferències, totes tangents entre si. Trobeu la relació entre radis 	**11** Un quadrant, un semicercle, un rectangle, T és un punt de tangència. Trobeu l'àrea del rectangle 	**12**
	13 Trobeu R en funció de a, b i c 	**14** Trobeu R 	**15** Un quadrat i un cercle. Quin dels dos té el perímetre més gran? 	**16** Un quadrat de costat 8, un rectangle i un cercle. Trobeu l'àrea del cercle i el rectangle 	**17** Un triangle rectangle d'hipotenusa 13. Cercle inscrit de radi 2. Trobeu l'àrea del triangle 	**18** Cercle i tres cordes, dues d'elles paral·leles. Trobeu x 	**19**
	20 Un quadrant i un triangle rectangle de catets 3 i 4. Troba l'àrea del quadrant 	**21** Un cercle de diàmetre BC i un quadrant. Àrea de la zona ombrejada 4. Trobeu l'àrea del cercle 	**22** Quadrant de radi 25 i triangle rectangle d'hipotenusa 30. Trobeu els catets del triangle 	**23** Un quadrant, un semicercle i una corda tangent. Trobeu x 	**24** Quadrat de costat 20, semicercle i corda tangent. Trobeu x 	**25** Quatre quadrats d'àrees 100, 25, 16 i x. Trobeu x i l'àrea del cercle 	**26**
	27 TEOREMA DE FAURE: En una circumferència de ràdio R i dues cordes perpendiculars: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4R^2$ 	**28** Trobeu el radi de la circumferència 	**29** TEOREMA DE LES CORDES: **a·b = c·d** 	**30** POTÈNCIA D'UN PUNT: Cercle, secant i tangent. Proveu que: **PA² = PB·PC** 			



OCTUBRE

DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES	DIJOUS	DIVENDRES	DISSABTE	DG.





1



2

1.- Si $x = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ i $y = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ compareu x^y amb y^x

2.- Proveu que, per a tot enter positiu n:

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^n \cdot (n-1)^2 + (-1)^{n+1} \cdot n^2 = (-1)^{n+1} \cdot (1 + 2 + \cdots + n)$

3

4

5

Siga n un enter positiu fixe. A qualsevol elecció de n números reals que compleixen $0 \le x_i \le 1$ ($i \in \{1, 2, .. ,n\}$) els fem corresponndre la suma

$$\sum_{1 \le i < j \le n} |x_i - x_j| = |x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| + \cdots + |x_1 - x_n| + |x_2 - x_3| + .. + |x_2 - x_n| + \ldots + |x_{n-1} - x_n|$$

Trobeu el major valor possible d'aquesta suma

6

Simplifiqueu:

$$\sqrt[3]{\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + \cdots + n \cdot 2n \cdot 4n}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + \cdots + n \cdot 3n \cdot 9n}}$$



7



8

Una funció y = f(x) es diu periòdica si existeix un nombre real positiu p tal que f(x + p) = f(x) per a tot x. Per exemple, y = sen x és periòdica de període 2π. És periòdica la funció:

$y = \text{sen}\,(x^2)$?

Demostreu la vostra afirmació.

9

Una successió a_1, a_2, a_3, ····· compleix que $a_1 = ½$ i $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 \cdot a_n$, per a qualsevol n.

Determineu el valor de a_n



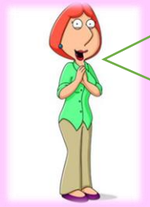
10

11

Siguen A, B, C i D quatre punts consecutius d'una circumferència i P, Q, R i S els punts mitjans dels arcs AB, BC, CD y DA. Proveu que PR ⊥ QS



12



13

Per a cada real r, es defineix:

$$[r] = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \le r\}$$

(e. g. [6] = 6; [π] = 3; [-1,5] = -2)). Dibuixa en el pla (x, y) el conjunt de punts:

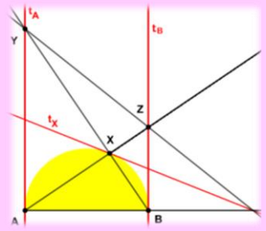
$$[x]^2 + [y]^2 = 4$$

14

Donats quatre pesos que estan en progressió aritmètica i una balança de dos braços, mostra com trobar el pes més gran utilitzant la balança únicament dues vegades



15



16

Donat un cercle de diàmetre AB i un punt X diferent de A i de B, siguen t_A, t_B i t_X les tangents al cercle en A, B i X. Siga Z la intersecció de AX amb t_B e Y la intersecció de BX amb t_A. Proveu que les tres rectes AB, t_X i ZY són concurrents o paral·leles

17

18

19

Tenim una quantitat il·limitada de segells de 8 centaus i de 15 centaus. Algunes quantitats de franqueig postal no es poden obtindre exactament, e. g. 7 centaus o 29 centaus. Quina és la quantitat més gran que no es pot obtindre exactament, i. e. la quantitat de franqueig que no es pot aconseguir exactament, mentre que totes les quantitats majors són assolibles?



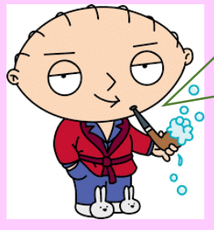
20

Siga donat un cercle i AB un dels seus diàmetres. Siga C un punt fixe de AB i Q un punt variable sobre la circumferència del cercle. Siga P un punt de la línia determinada per Q i C per al qual:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{QC}{CP}$$

Descriu el lloc geomètric del punto P

21



22

Demostra que, si un número és racional, la part decimal, la part sencera i el número no poden estar en progressió geomètrica.

Troba un número positiu tal que la seua part decimal, la seua part sencera i el número estiguen en progressió geomètrica

23

Siga n un enter positiu. Proveu que si n és una potència de 2 llavors n no es pot posar com a suma d'enters positius consecutius



24

25



26

Suposem:

$n \cdot (n+1) \cdot a_{n+1} = n \cdot (n-1) \cdot a_n - (n-2) \cdot a_{n-1}$

per a tot enter positiu $n \ge 1$. Si $a_0 = 1$ i $a_1 = 2$, trobeu:

$$\sum_{i=0}^{50} \frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \cdots + \frac{a_{50}}{a_{51}}$$

27



28

Siga ABCD un rectangle amb BC = 3·AB. Proveu que si P i Q són punts de BC amb BP = PQ = QC, llavors:

∠DBC + ∠DPC = ∠DQC



29

30

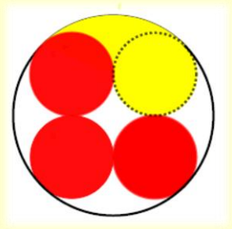
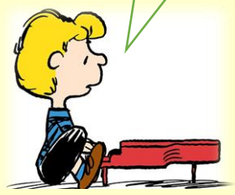
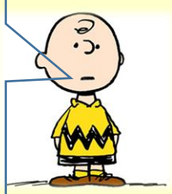
A dos estudiants de setè grau se'ls va permetre jugar en un torneig d'escacs per a estudiants de huit grau. Cada parella de participants va jugar una vegada entre si i cadascun dels participants va rebre un punt per guanyar cada partida, mig per fer taules i zero punts per partida perduda. Els dos estudiants de setè grau van rebre un total de huit punts i els estudiants de huit grau van obtindre, tots ells, la mateixa quantitat de punts. Quants estudiants de huit grau van participar en el torneig? És la solució única?



31

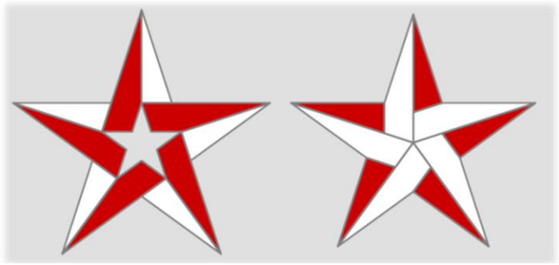
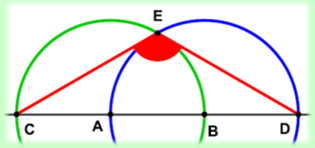
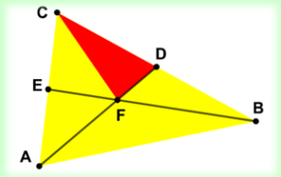
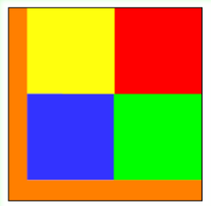
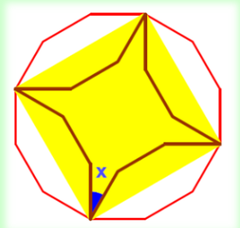
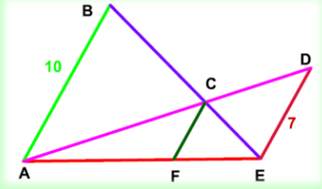
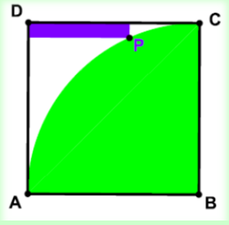
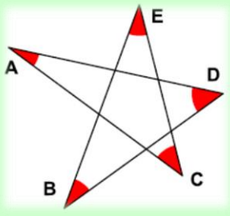
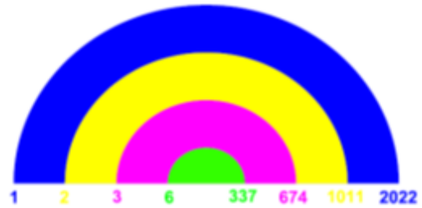
(http://cms.math.ca/Competitions/CMO/) ORGANITZA: Rafael Martínez Calafat. Professor jubilat

NOVEMBRE

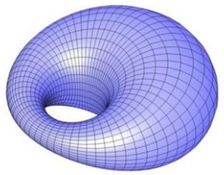
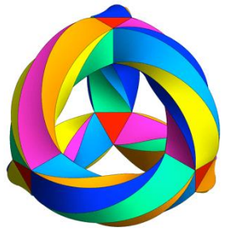
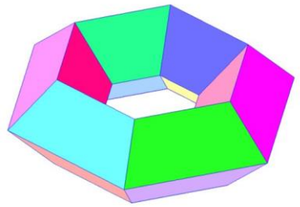
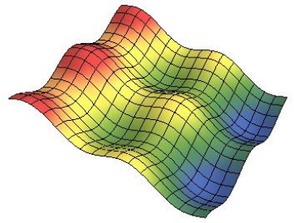
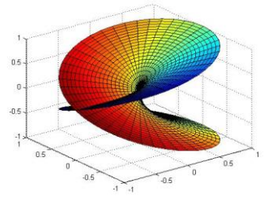
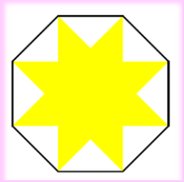
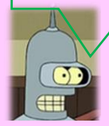
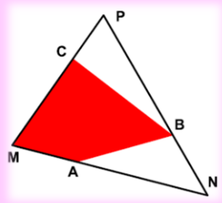
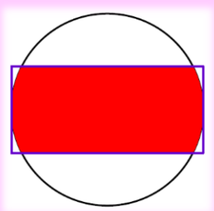
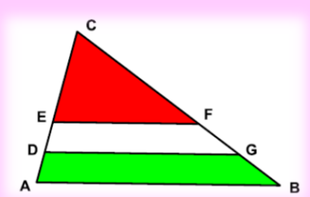
	DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES	DIJOUS	DIVENDRES	DISSABTE	DG.
	1 En la figura es mostren quatre cercles de radi 1 inscrits en un cercle més gran. Quina és l'àrea de la zona de color groc?	**2** 	**3** Tres amics decideixen vendre granissat de taronja en l'entrada d'un estadi esportiu. Van comprar taronges i sucre i van pagar 50 €. A més, van pagar 100€ pel lloguer de taules, compra de gots i palletes per a xuplar. Van calcular obtindre 250 gots de granissat. A quant han de vendre cada got per a obtindre uns guanys del 25%?	**4** Des de l'alt d'un far situat a 127,5 m sobre el nivell de la mar, es veu l'horitzó, a quina distància es troba l'horitzó del far, sabent que una volta al món són 40.000 km? 	**5** 	**6** Tenim 12 monedes de 50 cèntims d'euro i una moneda d'un euro. Les col·loquem en un cercle. Començant per la moneda que es vulga cal comptar 13 monedes cap a la dreta i la que hi haja en aquest lloc s'elimina. Tornem a comptar 13 monedes començant per la següent, a la nostra dreta, de la que acabem de retirar. Repetim aquesta operació fins a deixar només una moneda. Per quina moneda hem de començar a comptar perquè l'última que retirem siga la moneda d'un euro?	**7**
	8 Quin és el menor natural que dividit per 2, 3, 4, 5 i 6 dona, respectivament residu 1, 2, 3, 4 i 5? 	**9** Trobeu els naturals de manera que tots els seus divisors, excepte l'1, siguen parells. 	**10** 	**11** Quatre soldats ferits han de creuar un pont, seriosament danyat, a la nit per a escapar de l'enemic. El pont només suporta el pes de dos soldats alhora. Quan ho creuen dos soldats han de fer-ho a la velocitat del més lent. Els quatre soldats només tenen una llanterna que ha de ser utilitzada cada vegada que creuen el pont. Individualment tarden 1, 2, 4 i 6 minuts a creuar el pont. Quin és el mínim temps que es necessita perquè els quatre el creuen? 	**12** Els participants d'un concurs de TV han de contestar 30 preguntes. Si encerten reben un punt. Si fallen es resta mig punt. Si no contesten reben zero punts. Si un concursant va rebre sis punts detalla les seues contestacions 	**13** Una persona té una cadira de muntar valorada en 50 € i dos cavalls. Si col·loca la cadira en el primer el seu valor és el doble del segon. Si col·loca la cadira en el segon el seu valor és el triple del primer. Quin és el valor de cada cavall? 	**14**
	15 Cadascun de dos pals verticals de diferents altures situats en un terreny pla, té un aparell, en la seua part superior, que dirigeix un raig làser a la base de l'altre pal. Si els raigs es creuen a una altura de 24 m del sòl i si el menys alt dels pals té una altura de 40 m, quina és l'altura del pal més alt? 	**16**  **17** Tinc dues monedes. Una té un 7 en una cara i l'altra té un 10. Si llancem les dues monedes a l'aire i sumem els resultats que apareixen en les seues cares superiors, obtenim: 11, 12, 16 i 17. Quins números poden ser els números de les dues monedes?		**18**	**19** **20** Dos ascensors parteixen del sisè pis d'un edifici a les dues de la vesprada i tots dos van baixant. El més ràpid tarda un minut d'anar d'un pis a un altre, mentre que el més lent tarda dos minuts. El primer ascensor que arriba a un pis haurà de parar tres minuts per a obrir portes, pujar i baixar passatgers i tancar portes. Quin ascensor arriba abans al primer pis? A quina hora arribarà cada ascensor a la planta baixa? 	**21**
	22	**23** Trobeu els naturals tals que la meitat dels seus divisors siguen parells i l'altra meitat imparells 	**24** Trobeu les parelles de capicues de quatre xifres la suma de les quals siga un capicua de cinc xifres 	**25** **26** A casa tinc un rellotge despertador que endarrereix dos minuts cada hora, mentre que el meu rellotge de monyica avança un minut cada hora. Un cert dia pose en hora els dos rellotges i isc de casa. En tornar el rellotge de la meua monyica marca les 12 de la nit i en canvi, en el despertador eren les 11 de la nit. Quant temps vaig estar fora de casa? Quina era l'hora exacta quan vaig entrar a casa? 	**27** El producte d'un número de dues xifres per les seues pròpies xifres dona 1950. Trobeu aquest número 	**28**
	29 **30** Col·loqueu 1 o –1, en cada casella d'una quadrícula 4x4 perquè el producte de tots els números d'una fila o una columna siga sempre –1. Quina és la mínima i màxima quantitat de –1 que hem de posar? Quines serien aquestes quantitats en una quadrícula nxn?  			 			

AUTOR: JOSÉ COLÓN LACALLE. PROFESSOR JUBILAT.

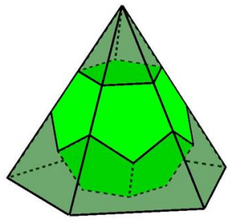
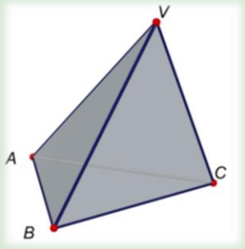
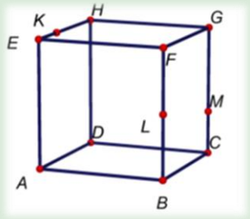
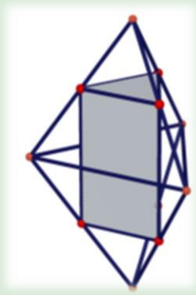
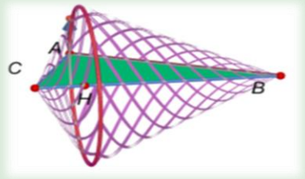
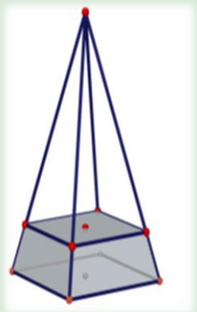
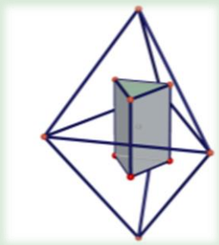
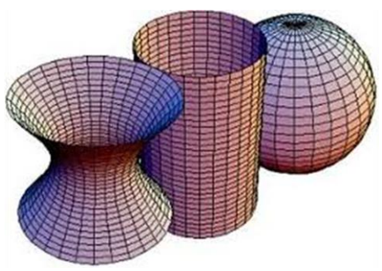
DESEMBRE

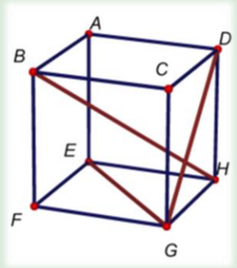
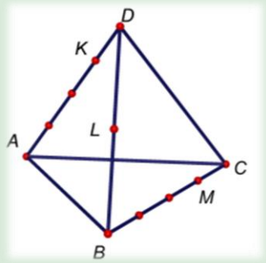
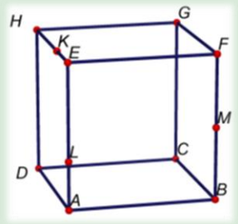
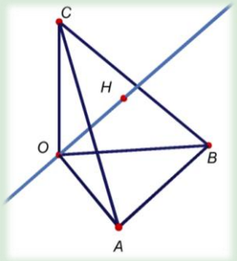
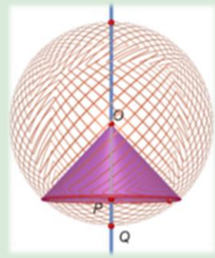
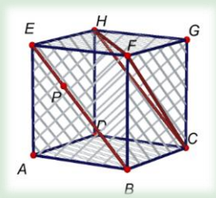
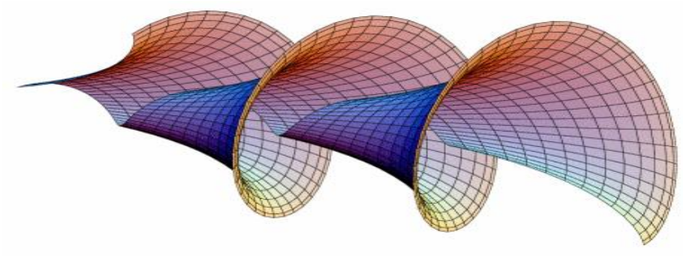
DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES	DIJOUS	DIVENDRES	DISSABTE	DG.
		**1** La suma de tres dígits dona 15. Si un d'ells es reemplaça per 3, el producte dels nous dígits dona 36. Quins dígits hi havia al principi? 	**2** 	**3** En la imatge hi ha dues circumferències iguals de centres A i B. Cadascuna d'elles passa pel centre de l'altra i la recta que passa per A i B talla a les circumferències en C i D. Si E és la intersecció de les dues circumferències, troba $\angle CED$	**4** En un examen de matemàtiques, si cada xic haguera obtingut tres punts més dels que va obtindre, la mitjana de tota la classe hauria sigut 1,2 punts més alta del que va ser. Troba el percentatge de xiques que hi ha en la classe 	**5** 
6 	**7** Siga donat el triangle ΔABC, siguen BE i AD dues mitjanes amb intersecció F. Suposem que $A_{\Delta FDC} = 3$. Trobeu l'àrea dels triangles ΔEAB i ΔAFB i l'àrea del quadrilàter EFDC	**8** Trobeu els naturals menors que 100 amb major nombre de divisors 	**9** Tinc dos daus, un roig i un altre blau. Si llance els dos alhora, quina és la probabilitat que el número que mostra el dau roig siga major que el número que mostra el dau blau? 	**10** 	**11** Dividim un quadrat de 125 cm² d'àrea en cinc regions, quatre quadrats i un polígon en forma de L, totes elles d'igual àrea. Quina és la longitud, en cm, del costat més curt del polígon en forma de L?	**12** 
13 Troba els naturals de manera que, el quadrat dels quals i el propi número acaben en els dos mateixos dígits i en el mateix ordre 	**14** 	**15** En un dodecàgon regular hem inscrit un quadrat, com s'observa en la figura. A més, hem dibuixat els simètrics dels costats del dodecàgon amb eix de simetria els costats del quadrat. Troba la mesura de l'angle x i l'àrea de l'estrela si el costat del dodecàgon mesura 1	**16** 	**17** En la figura adjunta els segments AB, CF i ED són paral·lels. Si la longitud de AB és 10 i la longitud de ED és 7, troba la longitud del segment CF	**18** Amb els dígits 1, 2, 3, 4 i 5 escrits en algun ordre formem el número PQRST. Si PQR és múltiple de 4, QRS és múltiple de 5 i RST és múltiple de 3, troba el número PQRST 	**19** 
20 	**21** Es té un quadrat ABCD i un quadrant de ràdio CB i centre B. P és un punt del quadrant que dista 8 unitats del costat DA i una unitat del costat DC. Troba el costat del quadrat	**22** Del natural N se sap que és múltiple de p, però no és múltiple de 2p. Trobeu el residu de N en ser dividit per 2p 	**23** Inscrivim una semicircumferència en un triangle isòsceles de base 16 i altura 15, com a mostra la figura. Trobeu el radi de la semicircumferència 	**24** 	**25** Quant val la suma de la mesura dels angles A, B, C, D i E de l'estrela de la figura adjunta?	**26** 
27 Dos costats d'un quadrilàter mesuren 4 i 1. Una de les diagonals, de longitud 2, divideix al quadrilàter en dos triangles isòsceles. Calcula el perímetre del quadrilàter 	**28** 	**29** Emplena les cel·les de la matriu adjunta amb dígits de manera que totes les files sumen el mateix, que totes les columnes sumen el mateix, encara que la suma d'una fila puga ser diferent de la suma d'una columna	**30** Calculeu el residu de dividir $x^{100} - 2x^{99} + 4$ entre $x^2 - 3x + 2$ 	**31** Una bossa conté 3 boles roges i 2 verds. Traiem, una a una i sense devolució, boles de la bossa fins que hàgem tret totes les d'un mateix color. Quina és la probabilitat que hàgem tret les 3 boles roges? 		

GENER

DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES	DIJOUS	DIVENDRES	DISSABTE	DG.
					**1** Quants números menors que 100 són el producte de tres nombres primers? 	**2**
3 En la figura hi ha un octàgon regular de costat 4 cm. Troba l'àrea de l'estrela octogonal 	**4** Una bossa conté m boles blanques i n negres. Extraiem una bola a l'atzar i la retornem afegint k boles del mateix color que l'extreta. Traiem una altra bola a l'atzar, quina és la probabilitat que la segona bola extreta siga blanca? 	**5** Quant val la suma de tots els productes de dos naturals diferents presos de l'1 al n? 	**6** **7** Els punts A, B i C de la figura divideixen a cada costat del triangle ΔMNP en dos trossos que estan en la relació 1:3. Trobeu la fracció de l'àrea del triangle ΔMNP acolorida de roig 		**8** ¿Per a quins valors de x la expressió: $\frac{\sin^3 x \cdot \cos x}{1+\tan^2 x}$ aconsegueix el seu major valor i quin és aquest? 	**9**
10 Si $x^2 + x\cdot y + y^2 = 84$ $x - (x\cdot y)^{1/2} + y = 6$ trobeu x·y 	**11** El dibuix mostra un quadrant de ràdio s i dues semicircumferències tangents. Troba el radi de la semicircumferència xicoteta. 	**12** En un triangle rectangle la bisectriu d'un angle agut talla al catet oposat en dos trossos de longitud 1 i 2: Quina és la longitud del segment de bisectriu interior al triangle? 	**13** Considerem els naturals amb nou xifres. Quants números hem d'extraure per a assegurar que almenys dos d'ells tenen la mateixa xifra en les desenes de miler? 	**14** Resolgueu **f(f(f(x))) = 0**, on: $f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{sii } x \le -2 \\ -x & \text{sii } -2 < x < 0 \\ x & \text{sii } x \ge 0 \end{cases}$ 	**15** De la funció f(x) se sap que es periòdica de període 5 i que en [3, 8[verifica: **f(x) = x² – 10x + 25** Trobeu f(2022) 	**16** 
17 Quantes parelles d'enters (x, y) amb x ≤ y, verifiquen que el seu producte és igual a cinc vegades la seua suma? 	**18** Quin és el residu de la divisió de **P(x)=x²⁰⁰-2x¹⁹⁹+x²+x+1** entre D(x)=x²-3x+2? 	**19** Es tenen deu naturals consecutius. La suma de nou d'ells dona 2022. Quin número no hem sumat? 	**20** Els punts A i B són punts de la gràfica de **y = x² – 7x – 1** Trobeu la longitud del segment AB si (0, 0) es el seu punt mitjà 	**21** 	**22** El cercle i el rectangle de la figura tenen el mateix centre. Les dimensions del rectangle són 6x12 i els costats xicotets del rectangle són tangents al cercle, quina és l'àrea de la regió comuna al cercle i al rectangle?	**23**
24/31 	**25** En el dibuix EF//DG//AB. Les zones ombrejades tenen igual àrea i CD = 4·DA Troba la raó entre CE i EA	**26** Resoleu en $\mathbb{R}$ $x^2 + y^2 = \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$ 	**27** Si el quocient entre el radi del sector circular i el radi del cercle és tres, quin és el quocient entre les seues àrees? 	**28** Si la base major d'un trapezi isòsceles mesura igual que la diagonal i la base menor mesura igual que l'altura del trapezi, troba el quocient entre la longitud de la base menor i la de la base major 	**29** Un quadrat té un vèrtex en el punt P(1, 2) i un altre en la recta y = 3x + 4. Quin és el menor valor possible per a la seua àrea? 	**30**

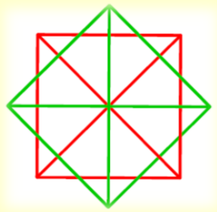
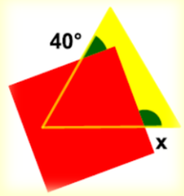
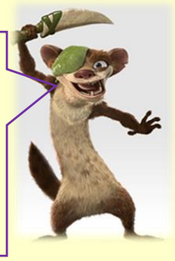
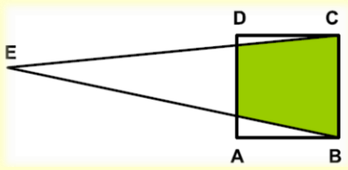
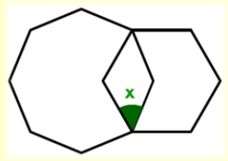
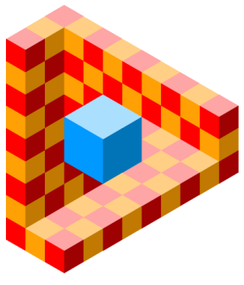
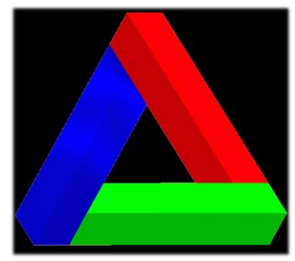
FEBRER

DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES
	**1**  **2** La base d'un tetraedre es un triangle equilàter, i les tres cares laterals desplegades i ficades en un pla formen un trapezi de costats 10, 10, 10 i 14 unitats de longitud. Calculeu la suma de les longituds de totes les arestes del tetraedre i també determineu la seua àrea. KöMaL C1559.	
7 e-day  **8** Siga ABCDEFGH un cub d'aresta $\overline{AB} = 1$. Siga K de la aresta $\overline{EH}$ tal que $\overline{HK} = 2 \cdot \overline{EK}$ Siga L el punt mitjà de la aresta $\overline{BF}$. Siga M de la aresta $\overline{CG}$ tal que $\overline{GM} = 2 \cdot \overline{CM}$. Determineu els costats de la secció del cub que genera el pla que passa per els punts K, L, M.		**9**  **16** Dos tetraedres regulars estan units per una cara. Determineu la proporció entre el volum del prisma de vèrtexs els punts mitjans de les arestes dels tetraedres i la suma dels volums dels dos tetraedres.
14 La hipotenusa d'un triangle rectangle és 5. Trobeu els catets sabent que els volums engendrats pel triangle en girar al voltant dels catets són, un el doble que l'altre. Calculeu el volum dels dos cons. Determineu el volum del doble con engendrat pel triangle en girar sobre la hipotenusa	**15** 	
21  **28** L'altura d'una cara lateral d'una piràmide regular quadrangular és el doble que l'aresta de la base. Quin percentatge d'aquesta altura de la piràmide (comptant des de la base) hem de tallar amb un pla paral·lel a la base de manera que l'àrea total de la superfície lateral més el quadrat superior del tronc de piràmide resultant siga igual a la meitat de la superfície lateral de la piràmide original.	**22** Donat el doble tetraedre regular, determineu la proporció entre els volums del poliedre dual (prisma de vèrtexs els centres de les 6 cares) i del doble tetraedre regular **23**  	

DIJOUS	DIVENDRES	DISSABTE	DG.
3  **4** Siga el cub ABCDEFGH, d'aresta 1. Proveu que $\overline{BH}$ és perpendicular a $\overline{EG}$. Proveu que $\overline{BH}$ és perpendicular a $\overline{GD}$. Proveu que $\overline{BH}$ és perpendicular al pla EDG. Calculeu la intersecció de $\overline{BH}$ i el pla EDG. Calculeu la distancia de $\overline{BH}$ al pla EDG		**5** 	**6**
10 Siga ABCDEFGH un cub d'aresta $\overline{AB} = 1$ Siga K de l'aresta $\overline{EH}$ tal que $\overline{HK} = 2 \cdot \overline{EK}$ Siga L de l'aresta $\overline{AE}$ tal que $\overline{EL} = 2 \cdot \overline{AL}$ Siga M el punt mitjà de l'aresta $\overline{BF}$. Determineu el perímetre i l'àrea de la secció del cub que determina el pla que passa per els punts K, L, M.	**11** 	**12** Siga el tetraedre ABCD d'aresta 1. Siga K el punt de l'aresta $\overline{AD}$, tal que $\overline{AK} = 3 \cdot \overline{DK}$. Siga L el punt mitjà de l'aresta $\overline{BD}$. Siga M el punt de l'aresta $\overline{BC}$ tal que $\overline{BM} = 3 \cdot \overline{CM}$. Calculeu l'àrea de la secció del tetraedre determinada per el pla que passa per els punts K, L, M.	**13**
17  **24** Les arestes que ixen del vèrtex O del tetraedre OABC són perpendiculars dos a dos. Demostreu que la projecció ortogonal H d'O sobre la cara ΔABC és l'ortocentre del triangleΔABC. Proveu que $\frac{1}{\overline{OH}^2} = \frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{1}{\overline{OB}^2} + \frac{1}{\overline{OC}^2}$. Demostreu que el simètric d'O respecte del baricentre del tetraedre és el centre de l'esfera circumscrita al tetraedre..	**18** Una esfera de ràdio r té inscrit un con que té el vèrtex en el centre de l'esfera i un angle 2α en el vèrtex. Determineu l'àrea i el volum de la zona de l'esfera que talla el con. *Problema proposat per Joan Galiana, alumne i matemàtic* **19** 	**20**
	25  **26** Siga ABCDEFGH un cub d'aresta 1. Siga P un punt del segment $\overline{BE}$ tal que $\overline{EP} : \overline{BE} = 1 : 3$. Calculeu la distancia del punt P al pla que determinen els vèrtexs C, F, H del cub.	**27**
		

AUTOR: RICARD PEIRÓ I ESTRUCH. IES "Abastos". València

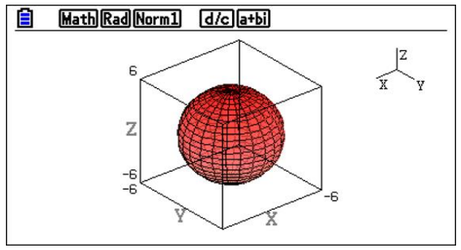
MARÇ

DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES	DIJOUS	DIVENDRES	DISSABTE	DG.
	**1**  Quants quadrats hi ha en la figura? I triangles?	**2** Quants capicues de tres xifres són múltiples de tres? I d'onze? 	**3**  En la figura tenim un quadrat i un triangle equilàter. Trobeu x	**4** Don Retorcido s'ha inventat aquest joc: Ell et dona un número, si és parell ho multipliques per dos i li sumes un, si és imparell ho multipliques per tres i li sumes un. Si després d'aplicar la regla al número que t'ha donat Don Retorcido i dues vegades seguides a cadascun dels números que vas obtenint, arribes al 208, quin número et va donar Don Retorcido?	**5** 	**6**
7 **8** L'avi Gerardo ha repartit la seua col·lecció de monedes entre els seus sis nets. A Carlos li va donar la meitat de les quals tenia. A Ferran li va donar la meitat de les quals li quedaven. A Dani li va donar la meitat de les quals li quedaven i així va seguir primer amb Laia, després amb Aitana i finalment amb Clara i es va quedar amb tres monedes. Quantes monedes tenia al principi i quantes li va donar a cada net? 		**9** El producte de tres naturals diferents és 30. Quins són els possibles valors de la suma dels tres naturals? 	**10** 7 9 5 1 6 3 - 4 9 6 7 1 8 Elimina tres xifres en el número de dalt i en el número de baix perquè el resultat de la nova resta siga el més xicotet possible	**11** 	**12** Dani i altres socis han format la penya AVANT. En les festes, cada soci ha convidat a tantes persones com companys de penya té. Si se sap que hi haurà més de 66 assistents i menys de 99, quantes persones assistiran a l'acte? 	**13**
14 Quants triangles podem formar que tinguen els seus vèrtexs en els vèrtexs d'un pentàgon regular? I en un hexàgon regular?  **π day**	**15** Utilitzant les xifres 8, 0, 7, 2, 6, 2, 5, 4 una sola vegada cadascuna, cal generar quatre números de dues xifres menors que 53 de manera que no hi haja dues d'ells consecutius. Quins són? 	**16** Col·loca tots els nombres naturals des de l'1 fins al 9 sense repetir cap en la matriu adjunta, tenint en compte que els números exteriors indiquen el producte dels números situats en la fila o la columna	**17** Un metre són mil milions de nanòmetres. Per a calcular el gruix d'una fulla, Lucia, ha observat que deu fulles mesuren un mil·límetre. Quants nanòmetres mesura el gruix d'una fulla? 	**18** Dani té una fulla de dimensions 40 cmx20 cm. Amb tres talls, divideix aquesta fulla en quatre rectangles iguals. Cadascun d'aquestos rectangles els divideix en altres quatre iguals, amb la mateixa mena de talls. Aquesta última operació la repeteix dues vegades. Quant mesura el perímetre de tots els rectangles que s'aconsegueixen al final?	**19** 1 A B C D E x 3 A B C D E 1 A, B, C, D i E representen dígits diferents. Si el producte de dalt està ben fet calculeu el valor de cada lletra	**20**
21 Calculeu els possibles valors d'A i de B si els ¾ dels 2/5 d'A és igual als 2/3 dels 3/5 de B 	**22** Ordeneu de major a menor: 11^{525}, 1317^{175}, 37^{350} 	**23** 21 60 288 112 72 45	**24** **25** L'àrea del quadrat ABCD és 16 cm² i la del triangle ΔBCE és 32 cm². Trobeu l'àrea del trapezi ombrejat  		**26** En la figura hi ha un hexàgon i un octàgon regulars. Trobeu la mesura de l'angle x  	**27**
28 **29** Aitana ha escrit en un foli tots els nombres naturals que sap escriure. Laia ha esborrat els que, segons ella, són primers i els ha sumats, obtenint 230. El germà major, Dani, felicita a Aitana perquè no s'ha oblidat de cap número i li diu a Laia que ha sumat un número que no és primer. Fins a quin número ha escrit Aitana? Quin número ha considerat Laia nombre primer i no ho és? 		**30** Dani col·lecciona figures geomètriques. La meitat de les quals són triangles, la tercera part de les altres són cercles i un quart de les que queden són trapezis. Si té 20 trapezis, quants triangles i cercles té? 	**31** En un cinema hi ha 200 persones. D'elles 130 són dones. A més, hi ha 90 persones que usen ulleres. Si la meitat dels homes usen ulleres, quantes dones no les usen? 			

ABRIL

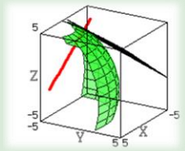
DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES



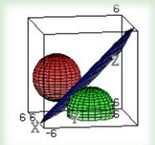


4 Trobeu l'equació de l'esfera de centre C (3, -5, -2) tangent al pla:

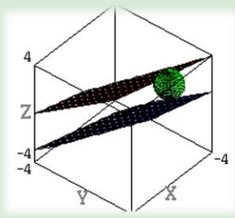
$2x - y - 3z + 11 = 0$



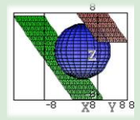
5 Trobeu l'equació de l'esfera de radi 3, que es tangent al pla $x + 2y + 2z + 3 = 0$ en el punt A (1, 1, -3)



6



11



12 Determineu les equacions dels plans tangents a l'esfera

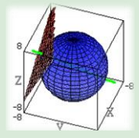
$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$

paral·lels al pla $4x + 3z - 17 = 0$

Demostreu que el pla $2x - 6y + 3z - 49 = 0$ és tangent a l'esfera

$x^2 + y^2 + z^2 = 49$

Calculeu les coordenades del punt de tangència



13 Una esfera té el centre en la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$$

i es tangent als plans

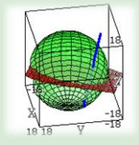
$\Pi \equiv x + 2y - 2z - 2 = 0$

$\Omega \equiv x + 2y - 2z + 4 = 0$

Determineu la seua equació.

18 Determineu l'equació de l'esfera de centre 0(2,3,-1) que talla a la recta

$$s \equiv \begin{cases} 5x - 4y + 3z + 20 = 0 \\ 3x - 4y + z - 8 = 0 \end{cases}$$



en una corda de longitud igual a 16.

19 **20**

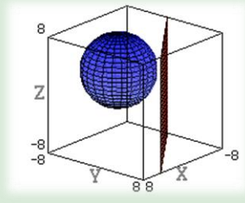
En l'esfera d'equació

$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (x-3)^2 = 25$

determineu el punt M més pròxim al pla

$\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$

i calculeu la distancia del punt M a aquest pla.



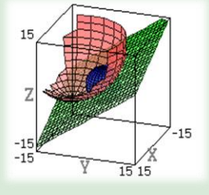
25 **26**

Siguen les esferes d'equacions:

$E_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 25$

$E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 15y - 25z = 0$

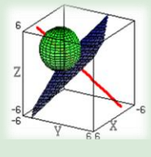
Proveu que les dues esferes són secants. Determineu el pla que conté la intersecció de les dues esferes. Determineu el centre i el radi de la circumferència intersecció.



27 Proveu que el punt T (1,0,1) pertany al pla:

$\pi \equiv x - 2y + 2z = 3$

Determineu l'equació de l'esfera que passa per el punt P(1,0,5) i és tangent en T al pla π.



DIJOUS	DIVENDRES	DISSABTE	DG.



1

Siga l'esfera d'equació:

$E \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z = 0$.

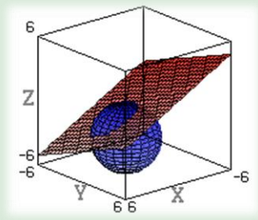
Determineu les coordenades del centre i la mesura del radi. Verifiqueu si el pla:

$\Pi \equiv 3x - 2y + 6z + 1 = 0$

i l'esfera són secants. Determineu el radi de la circumferència intersecció de E, Π.

Determineu el centre de la circumferència intersecció de E, Π.

2



3

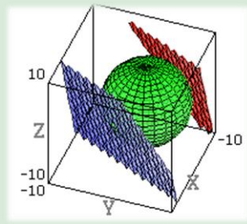
7 **8**

Determineu l'equació de l'esfera que es tangent a los plans:

$\Pi \equiv 6x - 3y - 2z - 35 = 0$

$\Omega \equiv 6x - 3y - 2z + 63 = 0$

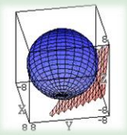
sabent que el punt M (5,-1,-1) és un punt de tangència en un dels plans.



9 Determineu l'equació del pla tangent a l'esfera

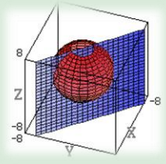
$x^2+y^2+z^2=49$

en el punt M (6,-3,-2)



10

14 Determineu l'equació de la circumferència que passa per els punts A (3,-1,-2), B (1,1,-2) i C (-1,3,0)



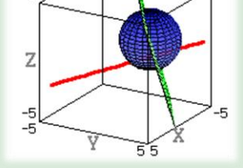
15 **16**

Determineu la posició relativa de la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\alpha \\ y = -\frac{7}{2} + 3\alpha \\ z = -2 + \alpha \end{cases}$$

i l'esfera

$E \equiv x^2 + y^2 + z^2 + x - 4y - 3z + \frac{1}{2} = 0$



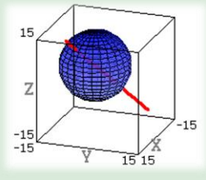
17

21 **22**

Calculeu la distancia més curta del punt A (1,-1,3) a l'esfera

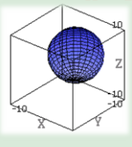
$E \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 10z - 62 = 0$

En quin punt de l'esfera s'aconsegueix la distancia més curta?



23 Determineu l'equació de l'esfera que passa por els punts A (3,1,-3); B (-2,4,1); C (-5,0,0) i té el centre en el pla:

$\Pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$

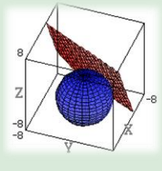


24

28 Determineu l'equació del pla tangent a l'esfera:

$(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 24$

que passa per el punt M (-1,3,0)

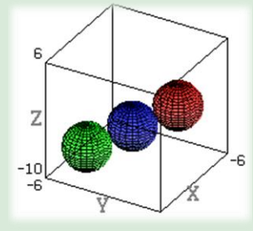


29 **30**

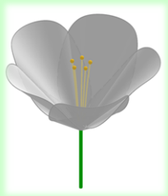
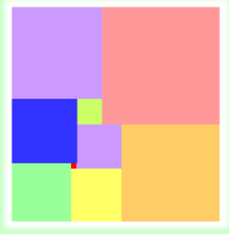
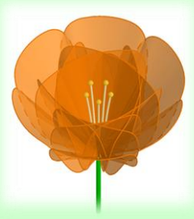
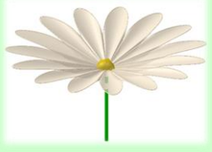
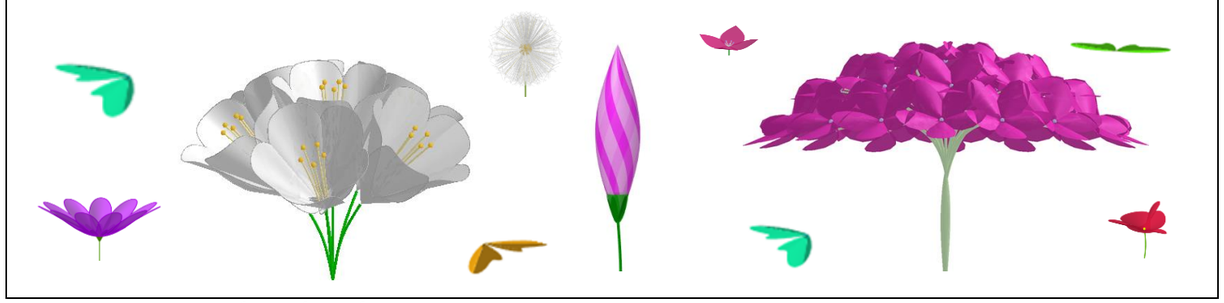
Siga l'esfera:

$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 8z + 20 = 0$

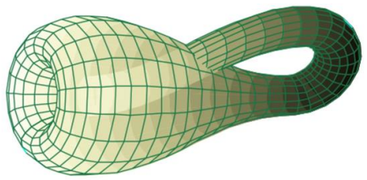
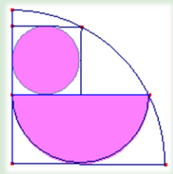
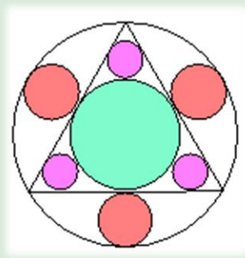
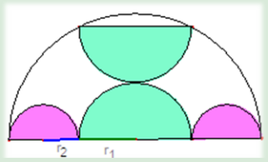
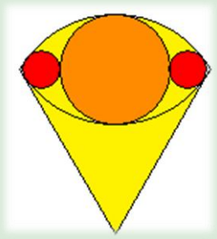
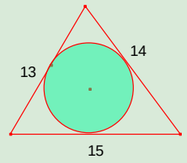
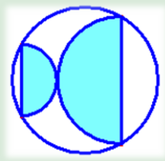
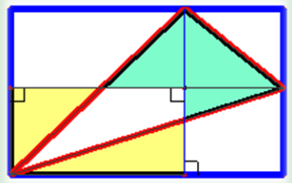
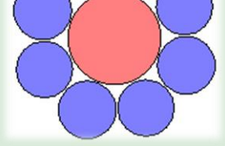
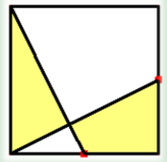
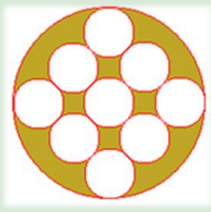
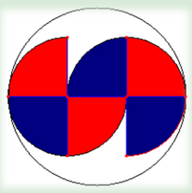
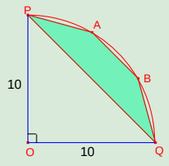
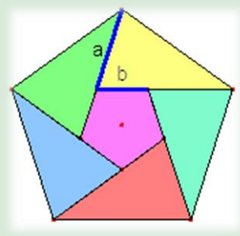
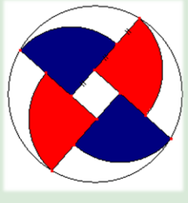
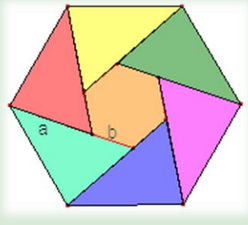
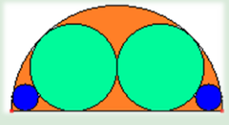
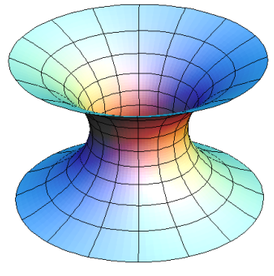
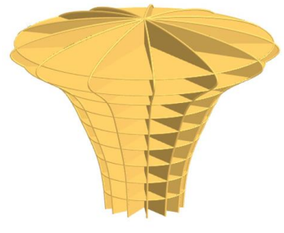
Calculeu l'esfera de igual radi, tangent exterior en el punto A (1,4,-3) de l'esfera. Calculeu l'esfera de igual radi, tangent exterior en el punt diametralment oposat al punt A de l'esfera.



MAIG

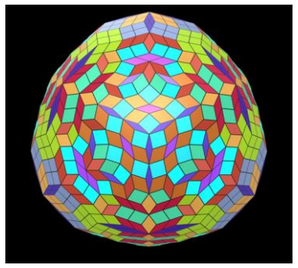
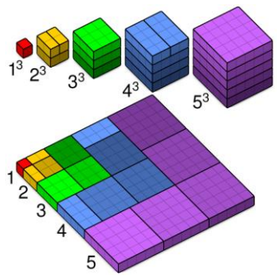
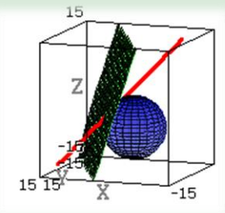
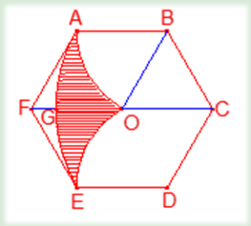
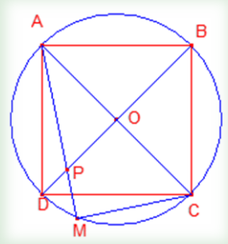
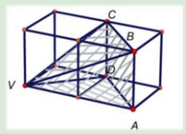
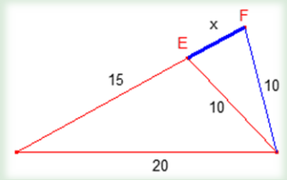
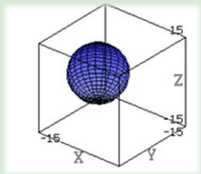
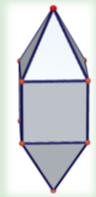
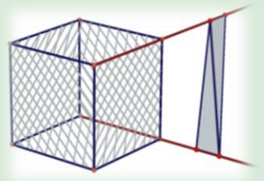
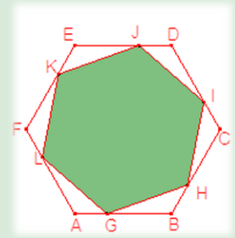
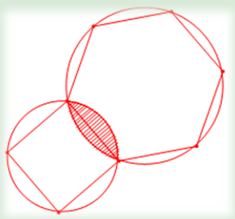
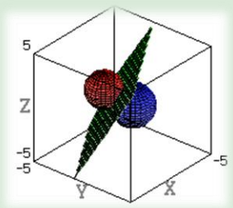
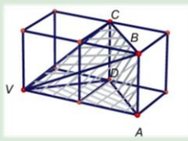
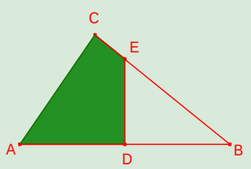
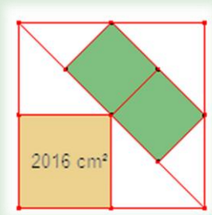
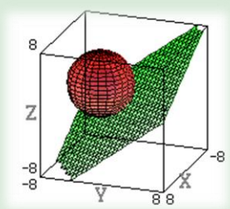
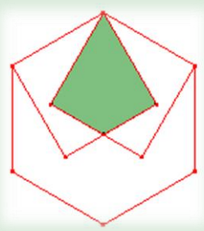
DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES	DIJOUS	DIVENDRES	DISSABTE	DG
2 	**3** Les germanes Laia i Aitana escriuen les seues edats, una a continuació de l'altra, i obtenen un número de quatre dígits que és el quadrat de l'edat del seu pare. Nou anys més tard tornen a escriure les seues edats de la mateixa forma i torna a ocórrer que és el quadrat de l'edat del seu pare. Quina és l'edat de Laia, Aitana i el seu pare?	**4** Disposem de dos rellotges d'arena, un de 7 minuts i un altre d'11 minuts. Quin és el mètode més ràpid per a controlar la cocció d'un guisat que ha de durar 15 minuts? 	**5** 	**6** El poble de Benirredrà té un conjunt molt estrany de límits de velocitat. A un quilòmetre del centre del poble hi ha un avís que resa 120 Km/h, a ½ quilòmetre del centre, un avís diu 60 km/h, a 1/3 de km del centre hi ha un avís que anuncia 40 km/h, a ¼ de km del centre hi ha un senyal que diu 30 km/h, a 1/5 del centre un avís de 24 km/h i a una distància de 1/6 de km l'avís diu 20 Km/h. Si es viatja sempre al límit de velocitat, quant temps es tardarà a arribar al centre del poble des del primer anunci?	**7** Trobeu cinc enters consecutius tals que la suma de quadrats dels tres primers siga igual a la suma de quadrats dels dos últims 	**1/8** 
9 Fa un mes un 10% d'una població tenia una malaltia i un 90% no la tenia. Passat el mes, un 10% de les persones malaltes es curen i un 10% de les persones que no la tenien van passar a estar malaltes. Què percentatge de la població no té la malaltia? 	**10** 	**11** Un cavall i un mul caminaven junts, portant sobre els seus lloms, pesats sacs. Lamentaves el rossí de la seua enutjosa càrrega, al que el mul li va dir: De què et queixes? Si jo et prenguera un sac, la meua càrrega seria el doble que la teua. En canvi, si et done un sac, la teua càrrega s'igualaria a la meua. Quants sacs porta cadascun?	**12** Una ONG ven 140 bitllets per a recaptar fons. Alguns bitllets es van vendre al preu original (un enter), però els altres es van vendre a la meitat del preu inicial. Es van recaptar 2001 €. Quin és el preu inicial dels bitllets? 	**13** 	**14** En cada estació d'una xarxa ferroviària es venen tants bitllets diferents com estacions a les quals es pot anar o des de les quals es pot vindre (els bitllets d'anada i de tornada són diferents). S'inaugura una nova línia amb diverses estacions i això obliga a imprimir 34 nous bitllets. Quantes estacions hi havia i quantes s'han inaugurat?	**15** 
16 	**17** Dos jugadors A i B, juguen per torns al següent joc: Es té un munt de 2021 pedres. En el seu primer torn A tria un divisor de 2021 i retira aquest nombre de pedres del munt. A continuació, B tria un divisor del nombre de pedres que queden i retira aquest nombre de pedres del munt i així, successivament. Perd el jugador que retira l'última pedra. Demostreu que un dels jugadors té una estratègia guanyadora i descrigueu aquesta estratègia	**18**  En cubolandia, els planetes són cubs. Aitana en té un, d'aresta 1 km. Si la seua atmosfera té 500 m d'altura en tots els seus punts, quin és el volum de l'atmosfera?	**19** 	**20** El preu de venda d'un abric era menor en un 40% al preu suggerit pel fabricant. Laia va comprar l'abric per la meitat del preu de venda. En quin percentatge és menor el valor que va pagar Laia per l'abric respecte al preu suggerit pel fabricant?	**21** 	**22** 
23 Trobeu, si és possible, el major i menor natural, la suma de xifres del qual, és 2022 	**24** 	**25** El rectangle de la figura està dividit en nou quadrats. Calcula la seua altura i la seua longitud sabent que el quadrat més xicotet és de costat 2 cm	**26** Una persona té 500 € en un compte corrent d'un banc. Pot fer dos moviments indefinidament, mentre tinga diners en el compte: traure 300 € o depositar 198 €. Quina és la màxima quantitat de diners que pot traure del seu compte?	**27** 	**28** En els vèrtexs d'un quadrilàter està escrit amb tinta invisible un número secret i amb tinta visible la suma dels números invisibles dels altres tres vèrtexs Pots donar una regla per a calcular els números invisibles a partir dels números visibles?	**29** 
30 	**31** Un club de bàsquet té una secció masculina i una secció femenina. La mitjana aritmètica del pes dels xics de la secció masculina és de 90 quilos, la mitjana aritmètica del pes de les xiques de la secció femenina és de 65 quilos. La mitjana aritmètica del pes de tots els components del club és de 75 quilos. Hi ha més xiques que xics? Quina proporció de xiques hi ha entre tots els jugadors del club?					

Juny

DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES	DIJOUS	DIVENDRES	DISSABTE	DG.
		**1**  Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrant.	**2** En una circumferència de radi R s'ha inscrit un triangle equilàter. S'han dibuixat set circumferències. Calculeu el radi de les circumferències. *Sangaku. Prefectura de Chiba*	**3** 	**4**  En la figura, calculeu: $\frac{r_1}{r_2}$	**5**
6 	**7** En la figura, el radi de l'arc superior és el diàmetre de la circumferència taronja. Determineu la proporció entre els radis de les circumferències taronja i roja. *Sangaku. Prefectura Tochigi*	**8** Els costats d'un triangle mesuren $13, 14, 15$. Calculeu el radi del cercle inscrit. 	**9** Els diàmetres dels semicercles són paral·lels. Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del cercle. 	**10** **11** L'àrea del triangle roig és la tercera part del rectangle exterior blau. Calculeu la proporció entre l'àrea pintada de verd i la pintada de groc. 		**12**
13 Les dues circumferències tenen radi 4. Calculeu el radi de la semicircumferència 	**14** 	**15** En la figura, el radi de la semicircumferència es R=1. Calculeu el radi dels quatre tipus de circumferència. *Prefectura de Fukushima*	**16** **17** Huit circumferències són tangents exteriors dos a dos i totes son tangents exteriors a una altra. Calculeu la proporció entre els radis dels dos tipus de circumferències i la proporció entre les àrees de la suma de les huit blaves i la roja 		**18** Els punts assenyalats són els punts mitjos dels costats del quadrat. Calculeu la proporció de les àrees de la regió ombrejada i el quadrat. 	**19**
20 **21**  Nou circumferències iguals i tangents dos a dos, estan en l'interior d'altra circumferència. Calculeu la proporció entre les àrees de la suma de las nou circumferències i la circumferència exterior. *Prefectura Shisouka*		**22**  Calculeu la proporció entre l'àrea de la zona ombrejada i l'àrea del cercle exterior	**23**  Siga el quadrant de radi 10. Siguen A, B los punts de l'arc tals que PA=AB=QB. Calculeu l'àrea del quadrilàter PABQ	**24** **25** El pentàgon regular de la figura s'ha dividit en cinc triangles i un pentàgon regular. Les sis regions tenen la mateixa àrea. Calculeu $\frac{a}{b}$ 	**26**
27 Calculeu la proporció entre l'àrea de la zona ombrejada i l'àrea del cercle exterior. 	**28** 	**29** Les set regions de la figura tenen la mateixa àrea. Calculeu: $\frac{a}{b}$	**30**  Donat el semicercle de radi R, calculeu els radis de les altres circumferències.	 		

AUTOR: RICARD PEIRÓ I ESTRUCH. IES "Abastos". València

JULIOL

	DILLUNS	DIMARTS	DIMECRES	DIJOUS	DIVENDRES	DISSABTE	DG.
					**1** Per els punts intersecció de la recta $r \equiv \begin{cases} x = -5+3t \\ y = -11+5t \\ z = 9-4t \end{cases}$ i de l'esfera d'equació $E \equiv (x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2 = 49$ s'han traçat plans tangents a l'esfera. Determineu les seues equacions.	**2** 	**3**
	4 	**5** Siga ABCDEF un hexàgon regular de centre O i costat c. Des de B i D i amb radi c es dibuixen dos arcs: AO i EO. Amb centre en C i radi AC es dibuixa l'arc AGE. Trobeu l'àrea de la zona ombrejada	**6** 	**7**  Siguen dos cubs iguals units per una cara. Determineu la proporció entre el volum de la piràmide ABCDV i la suma dels volums dels dos cubs	**8** En la figura, calculeu la mesura del segment EF 	**9** En un hexàgon regular ABCDEF s'inscriu un altre hexàgon regular GHIJKL tal que: $\overline{AG} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ Calculeu la proporció entre les àrees dels hexàgons	**10**
	11  Determineu l'equació de l'esfera que passa per els punts A(1,-2,-1); B(-5,10,-1); C(4,1,11) i D(-8,-2,2)	**12** La figura està formada per un cub d'aresta a i dos piràmides de base quadrada i d'altra a. Determineu l'àrea i el volum del cos. 	**13** El quadrat ABCD està inscrit en una circumferència de radi 30. La corda AM mesura 50 i talla a la diagonal BD en el punt P. trobeu la mesura del segment AP	**14** 	**15** Dues arestes que es creuen d'un cub, s'estenen. En cada extensió s'agafen segments de longitud 1. On deuen estar situats aquestos segments perquè el volum del tetraedre format pels quatre extrems dels segments siga màxim?	**16** 	**17**
	18 	**19** Donades les esferes: $E_1 \equiv 2x^2+2y^2+2z^2+3x-2y+z-5=0$ $E_2 \equiv x^2+y^2+z^2-x+3y-2z+1=0$ determineu la posició relativa d'E_1 i E_2. Si són secants, trobeu el pla on es tallen. Determineu el centre i radi intersecció de les esferes	**20** 	**21** Siga donada l'esfera: $x^2+y^2+z^2+6y-4z+9=0$ Calculeu l'equació de l'esfera concèntrica amb ella que siga tangent al pla: $2x-3y+2z+4=0$	**22**  Siguen dos cubs iguals units per una cara. Trobeu l'àrea total de la piràmide ABCDV	**23** ΔABC es un triangle rectangle en C. D és el punt mitjà d'AB i DE⊥AB. Si AC=12 i AB=20, calculeu l'àrea de ADEC 	**24**
	25 Sobre un costat d'un hexàgon regular de costat c s'ha dibuixat un quadrat. Trobeu l'àrea de la intersecció de les dues circumferències circumscrites als polígons regulars	**26** 	**27** Un quadrat s'ha dividit en dos triangles per la diagonal. En el triangle inferior s'ha inscrit un quadrat d'àrea 2016 cm^2 i en el triangle superior s'han inscrit dos quadrats iguals. Trobeu l'àrea d'un de eixos quadrats	**28** 	**29** **30** En dos costats consecutius d'un hexàgon regular s'han dibuixat, cap al interior, dos quadrats. Determineu la proporció entre l'àrea de la zona comú als dos quadrats i l'àrea del hexàgon inicial 		**31**

AUTOR: RICARD PEIRÓ I ESTRUCH, IES "Abastos". València