Mauricio Contreras, Onofre Monzó y Luis Puig (Eds.)

Actes de les IX Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana

Volum I

SEMCV Al-Kwhārizmī

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

ACTES DE LES IX JORNADES D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA DE LA COMUNITAT VALENCIANA

Mauricio Contreras, Onofre Monzó y Luis Puig (editores)

ACTES DE LES IX JORNADES D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA DE LA COMUNITAT VALENCIANA

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwārizmī"
Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas
València, Espanya, 2011

Editors:

Mauricio Contreras
IES Benicalap
València, Espanya
mauricio.contreras@uv.es

Onofre Monzó
IES Veles e Vents
Torrent, Espanya
onofre.monzo@uv.es

Luis Puig
Universitat de València Estudi General
València, Espanya
luis.puig@uv.es

Publica:
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwārizmī"
www.semcv.org

Comité de Programa:

Salvador Caballero
Maurici Contreras
Amparo Monedero
Onofre Monzó

Comissió organitzadora:

Josep Amorós
Maurici Contreras
Nicasio García
Mònica Laparra
Eduardo Llopis
Josep Martínez
Encarna Moreno
Ricardo Pérez
Juan Miguel Ribera

© dels textos: els autors

Il·lustració de la portada: logo de les Jornades dissenyat per Eduardo Llopis
Fotografia de la portada: *mar, 110101*, elepé

Citar com:

Contreras, M., Monzó, O., & Puig, L. (Eds.) (2011). *Actes de les IX Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana*. València: Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwārizmī"

ISBN: 978-84-614-9741-6
Dipòsit legal: V-1770-2011

ÍNDEX

VOLUM I: TEXTOS

PRESENTACIÓ

CONFERÈNCIES

Luis Puig I-15
Dos o tres cosas que sé de Hipatia

PONÈNCIES

Manel Sol I-35
Les competències modelitzadores a l'ESO: els projectes matemàtics realístics

David Barba & Cecilia Calvo I-45
Materials manipulables i virtuals: una relació constant entre recursos per a l'ensenyament de les matemàtiques

Jose Antonio Mora I-55
Geometría dinámica y arte. Azulejos en el museo de Onda con Geogebra

Tomàs Queralt I-65
Algunes idees al voltant del concepte de la competència matemàtica

TAULA REDONA

Maurici Contreras I-75
Olimpiades i concursos

Salvador Caballero I-77
Concurs de Fotografia "Matemàtica a la vista"

Maurici Contreras I-79
La revista "Problemes Olímpics" com a recurs per a treballar la resolución de problemes en la E.S.O.

Floreal Gracia I-89
Calendario Matemático

Tomàs Queralt I-93
Les rutes matemàtiques a València

TALLERS

Ricard Peirò I-99
Construcció d'envolupants de corbes amb Cabri

Mauricio Contreras I-111
Estadística y Probabilidad con la ClassPad 330

Juan Manuel Couchoud I-129
Programació amb "Maxima" i "wxMaxima" per a la docència

Fernando Juan I-141
La inclusió d'activitats de Geogebra en Moodle

Gregori García I-153
El.laboració de materials digitals per a Matemàtiques amb eXelearning

Javier Muñoz I-159
Murphyx (el juego del 9) aplicado al aula de Matemáticas

Onofre Monzó & Luis Puig I-167
Materials per a l'estudi de famílies de funcions

Teresa Arabí, Vicent Chorro & Loreto Signes I-187
El cinema com a motivació: L'habitació de Fermat

COMUNICACIONS

Ricard Peirò I-197
Dues revistes de problemes

Ignacio Díaz I-205

Aplicaciones didácticas de la Náutica en el área de Matemáticas en ESO-Bachiller y práctica de su interdisciplinariedad (La Trigonometría y la Náutica en la Historia: lectura de textos náuticos siglos XVI-XVIII)

Mª Teresa Navarro & Luis Puig I-225

L'herència d'Euler: coordenades cartesianes i traçat de corbes al volum II de la Introductio in Analisyn infinitorum

David Arnau I-243

Modelos semánticos y sintácticos para la enseñanza del Álgebra

Gregori García I-251

Materiales digitales de Geometría para Matemáticas I

Fátima Capdevila I-261

La sorpresa de los números: un tiempo dedicado a la lectura

Eduardo Llopis I-271

Historia de un logotipo: de cómo los ojos de Arquímedes nos permiten "ver" las Matemáticas con otra mirada

Teresa Arabí, Vicent Chorro & Loreto Signes I-281

Pel.lícula: 21 Black Jack

Mauricio Contreras I-287

Materiales y recursos para el desarrollo de la competencia matemática

Pedro Berjas I-299

La construcción del concepto de número a partir de las variables que lo conforman

Ana Belén Cabello, Ricardo López & Ana Belén Sánchez I-309

El modelo de Van Hiele aplicado a la Geometría en primero de ESO

VOLUM II: PRESENTACIONS

CONFERÈNCIES

Xaro Nomdedeu II-9
Mujeres en el Ágora

PONÈNCIES

Carme Aymerich & Manuel Barrios II-85
Matecontes, contes i matemàtiques

TAULA REDONA

Rafael Crespo II-115
El proyecto ESTALMAT en la Comunidad Valenciana

Dolors Arnal II-139
Les proves Cangur a la Comunitat Valenciana

Rafael Martínez Calafat II-149
Competicions matemàtiques per a l'alumnat de Primària i Secundària al País Valencià

TALLERS

Joan Pons II-155
En defensa del regle: trenquem les cadenes de Descartes

COMUNICACIONS

Rafael Crespo II-209
Matemático, ¿una nueva profesión?

PRESENTACIÓ

Més de 160 professors, mestres i investigadors de l'ensenyament i l'aprenentatge, van participar en les IX Jornades d'Educació Matemàtica a la Comunitat Valenciana, celebrades els dies 10, 11 i 12 de Setembre en la Facultat de matemàtiques del campus de la Universitat de València en Burjassot. Convocades pel Departament de Didàctica de la Matemàtica i la Facultat de Ciències Matemàtiques de la Universitat de València, la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi" i la Conselleria d'Educació de la Generalitat Valenciana, aquestes Jornades han sigut una eina de reflexió, informació, debat, connexió i recerca de solucions als reptes que planteja l'Aprenentatge i l'Ensenyament de les Matemàtiques en la actualitat.

Tant el lema ("*Matemàtiques, una altra mirada"*), com el logo ("*l'Arbelos o Ulls d'Arquímedes"*) es refereixen al desig i necessitat de veure les matemàtiques des d'un punt de vista diferent a com es veuen normalment. En lloc de mirar-les com una eina allunyada de la vida quotidiana, cal submergir-se en les mateixes per a comprovar què sense matemàtiques potser no podriem **mirar** el món, ni la natura ni la vida de cap manera; no podríem representar les nostres observacions del nostre entorn ni analitzar-les. No podriem **veure** amb claredat. Amb aquest esperit, les Jornades volem difondre una imatge més actual, realista i lúdica, de les matemàtiques i colocar-les en el lloc que es mereixen: més a prop de tots nosaltres i dels nostres alumnes.

En les següents pàgines trobareu tot el material generat per aquestes Jornades, incloguent les conferències, ponències, tallers i comunicacions, a més d'incloure una carpeta amb documents complementaris i recursos, què esperem siguen de profit per a professors i investigadors. A banda d'aquesta carpeta, hem distribuït el material en dos volums: en el primer incloguem documents en format de text, mentre què en el segón aparèixen els documents en format pdf i presentacions de diapositives emprades en les Jornades.

Volem agraïr la col·laboració d'institucions com la Universitat de València, la Diputació de València, editorials, llibreríes i empreses del sector de l'educació (materials i jocs, calculadores i software matemàtic) que ens han donat de forma incondicional el seu suport.

Volem manifestar el nostre agraïment a tots els assistents, especialment a tots els què heu presentat col.laboracions, bé siga conferència, ponència, taller, comunicació o exposició. Sense el vostre treball no haguera sigut possible el desenvolupament de les Jornades.

Per últim, agraïr al Comité de Programa, a la Comissió Organitzadora i al voluntaris de les IX Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana, el seu treball i la seua paciència. Ha sigut un treball dur, però ha merescut l'esforç. Gràcies.

Maurici Contreras
Coordinador de les IX Jornades
d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana

CONFERÈNCIES

DOS O TRES COSAS QUE SÉ DE HIPATIA

Luis Puig
Universitat de València Estudi General

0. INFORMACIÓN, CONOCIMIENTO, SABIDURÍA

Preparando esta charla, hice una búsqueda en Google escribiendo "Hipatia" como una medida de la información que circula sobre ella en la red. Obtuve 317000 resultados. Escribiendo "Hypatia", el número de resultados aumentó a 663000. Hay pues información en buen número sobre Hipatia, un buen número de lugares con información sobre ella. Pero, ¿qué sabemos realmente? De toda esa información, ¿qué garantías tenemos?, ¿cuánta es conocimiento fundado?

T. S. Eliot escribió en 1934 una pieza, *The Rock*, en el primero de cuyos coros hay dos versos que parecen hablar de los peligros de la actual proliferación de la información:

> Where is the wisdom we have lost in knowledge?
> Where is the knowledge we have lost in information?
>
> ¿Dónde está la sabiduría que hemos perdido en conocimiento?
> ¿Dónde el conocimiento que hemos perdido en información? (trad. Jorge Luis Borges)

Pero en el caso de Hipatia, el problema no es tanto la proliferación de información (los números que acabo de citar no son demasiado grandes) como la conversión de su figura en una leyenda desde épocas muy tempranas, como consecuencia de las circunstancias de su muerte a manos de una turbamulta de cristianos fanáticos. El martirio conduce a la hagiografía, y gran parte de lo que se ha escrito sobre ella no abandona ese género tan cultivado por todas las religiones. Hay pocos estudios serios sobre su vida y su obra.

En esta charla presentaré dos o tres cosas que puedo decir que sé de Hipatia, gracias a alguno de esos estudios. En particular, dos o tres cosas que sé de Hipatia como matemática. Pero antes recordemos lo que la convirtió en leyenda.

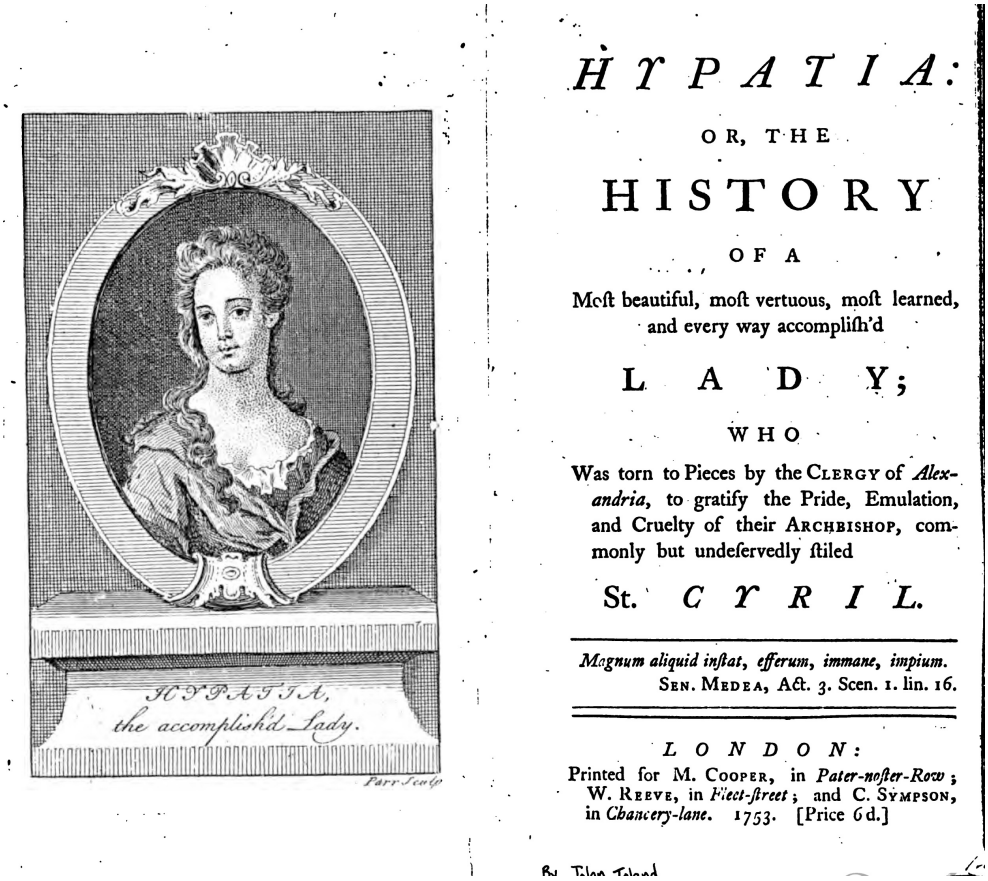
1. EUROPA, S. XVIII. LA LEYENDA DE HIPATIA DE ALEJANDRÍA

Biografías de Hipatia hay muchas. La de Dzielska (2004), junto con la de Deakin (2007), es la más rigurosa de las que conozco. Dzielska apenas menciona la obra matemática de Hipatia, cosa que sí trata el libro de Deakin.

El primer capítulo del libro de Dzielska sobre Hipatia se titula "La leyenda literaria de Hipatia" y en él Dzielska afirma que su leyenda "que disfrutó de amplia popularidad durante siglos […] todavía persiste en la actualidad. Si se pregunta quién era Hipatia, la respuesta más probable será: «Una filósofa pagana, joven y hermosa, que en el año 415 fue despedazada por monjes (o, de manera más general, por cristianos) en Alejandría»". A lo que añade que esa leyenda se basa fundamentalmente en escritos que "presentan a Hipatia como víctima inocente del naciente fanatismo cristiano y su asesinato como señal de la desaparición, junto con los dioses griegos, de la libertad de investigación", y que utilizan esa imagen "en sus polémicas religiosas y filosóficas" (Dzielska, 2004, p. 15).

El interés por Hipatia en Europa llega en el siglo XVIII. Veamos algunas instantáneas.

John Toland escribe un libro en 1720 con un título que ya enuncia todo lo que va a contar: *Hipatia, o la historia de una dama de gran belleza, virtud y sabiduría, competente en todo, que fue descuartizada por el clero de Alejandría para satisfacer el orgullo, la envidia y la crueldad del arzobispo, a quien se conoce de manera universal, aunque inmerecida como San Cirilo*.



Voltaire también utiliza la figura de Hipatia para atacar a la iglesia católica en varios de sus escritos. En uno de ellos, el *Diccionario filosófico*, publicado por primera vez en 1764, su ironía, su crítica ácida a la iglesia, se mezcla al burlarse de Cirilo con expresiones machistas, con lo que muestra que le importa poco Hipatia, que la está usando para combatir a la iglesia:

> Je me contente de remarquer que saint Cyrille était homme, et homme de parti; qu'il a pu se laisser trop emporter à son zèle; que quand on met les belles dames toutes nues, ce n'est pas pour les masacrer; que saint Cyrille a sans doute demandé pardon à Dieu de cette action abominable, et que je prie le père des miséricordes d'avoir pitié de son âme[1].

> [Me contento con señalar que San Cirilo era un hombre, y un hombre de partido; que pudo dejarse llevar en exceso por su celo; que, cuando se desnuda a las mujeres hermosas, no es para masacrarlas; que San Cirilo pidió perdón a Dios por ese acto abominable, y que yo ruego al padre misericordioso que tenga piedad de su alma.]

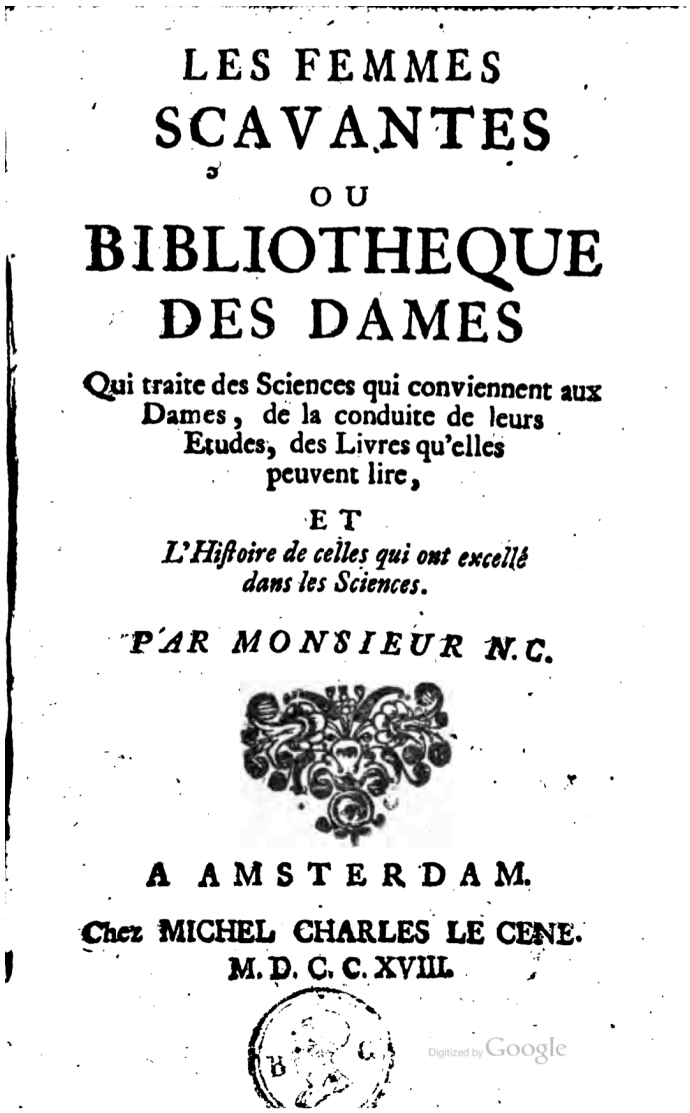
[1] Cito de la edición de 1829 del *Dictionnaire philosophique*. La frase está en la página 264 del tomo V.

Edward Gibbon en su monumental *Historia de la decadencia y caída del Imperio Romano*, publicada entre 1776 y 1789, también "declara a Cirilo responsable de todos los conflictos que estallan en la Alejandría del comienzos del siglo v, sin olvidar el asesinato de Hipatia" (Dzielska, 2004, p. 17), y utiliza la imagen de una Hipatia representante de la razón y la cultura como apoyo de su tesis según la cual la consolidación del cristianismo es la causa principal de la caída del Imperio Romano.

En un curioso libro de principios del siglo XVIII firmado por Monsieur N.C. que contiene un catálogo de mujeres sabias, se dice

> Hipatia hija del filósofo Teón, floreció al comienzo del siglo v en Alejandría. Había hecho progresos tan grandes en la Filosofía, que superaba en saber y en espíritu a todos los filósofos de su tiempo. El obispo Sinesio la llamaba su maestra y testimoniaba un respeto extraordinario por ella. Tan inocentes eran sus costumbres como excelente era su espíritu. Fue muerta en una sedición popular en 415. Dejó varias obras de las que hablan los autores eclesiásticos. (N. C., 1718, p. 64)

Monsieur N. C. nos dice que de ella hablan "los autores eclesiásticos". No es de extrañar que sea así y veremos después que casi todas las fuentes primarias que tenemos sobre ella son efectivamente de autores eclesiásticos. En efecto, Hipatia vive en Alejandría en un momento de gran agitación política y religiosa.


LES FEMMES
SCAVANTES
OU
BIBLIOTHEQUE
DES DAMES
Qui traite des Sciences qui conviennent aux Dames, de la conduite de leurs Etudes, des Livres qu'elles peuvent lire,
ET
L'Hiſtoire de celles qui ont excellé dans les Sciences.
PAR MONSIEUR N.C.
A AMSTERDAM.
Chez MICHEL CHARLES LE CENE.
M. D. C. C. XVIII.
Digitized by Google

2. El contexto religioso

La religión cristiana es la religión del imperio romano desde Constantino. Pero decir esto no basta para explicar toda la historia: tanto el imperio romano como la religión cristiana están ambas en un momento convulso. El imperio romano se divide en vida de Hipatia y está acosado por los bárbaros, y la doctrina cristiana se está constituyendo. En el centro del debate teológico está el establecimiento de dos grandes dogmas de la iglesia cristiana: la trinidad y la unión hipostática, que resolverán el problema de la naturaleza humana y divina de Cristo. Cirilo de Alejandría es uno de los forjadores de la ortodoxia. Y hay múltiples variantes del cristianismo en liza por ser la ortodoxia o ser relegados a la consideración de herejías. Entre ellas, tres que tienen que ver con lo que será el dogma de la Trinidad: los Arrianos, que mantienen que Jesús no es consubstancial con Dios Padre; los Nestorianos, que mantienen que Jesús era dos personas, una divina y otra humana; y los Monofisitas (luego Coptos), que mantienen que Jesús tenía una sola substancia, ni divina ni humana, sino mixta. Junto a ellos desempeñan un papel importante en los sucesos que se produjeron en tiempos de Hipatia en Alejandría los Novacianos, cuyo rasgo característico no es teológico, sino cómo considerar a los que renegaron del cristianismo en los tiempos de persecución y que ahora que es la religión oficial se apuntan, y qué hacer con ellos.

Por otro lado, Hipatia es neoplatónica. La doctrina de Plotino habla de la Unidad Absoluta o Lo Uno como primer ente (en el orden lógico). De él emana el Logos o Inteligencia. De la Inteligencia emana el Alma. Lo Uno, el Logos y el Alma coexisten eternamente. Este resumen sucinto y sin duda simplificador del neoplatonismo permite pensar que no sea extraño que Sinesio de Cirene, obispo cristiano y discípulo de Hipatia, fuera el discípulo de una neoplatónica y obispo cristiano en el momento en que se está elaborando la idea de la Trinidad. De hecho San Agustín, que escribe un libro sobre la Trinidad de raíz neoplatónica, es contemporáneo de Hipatia, y vive en Hipona (actualmente en Argelia, entonces Numidia), cerca de la diócesis de Sinesio de Cirene en Libia.

Además, Jámblico, un neoplatónico que pudo ser inspirador de la filosofía de Hipatia (aunque se discute si era seguidora de él o de Porfirio, otro neoplatónico), mantiene que los números los genera lo Uno, la Unidad Absoluta, por lo que el estudio de las matemáticas es una vía de ascesis, de acceso a la virtud, de unión con lo Uno, el Absoluto. Las enseñanzas neoplatónicas de Hipatia necesitan las matemáticas con este fin. Hipatia es pues una maestra de vida, y enseña en Alejandría en una escuela neoplatónica.

3. La muerte de Hipatia

Hipatia aparece ligada siempre a un hecho violento, que marcará la narración de su vida y su obra: su muerte, desnudada, cortada con trozos de cerámica, despedazada y quemada, por una turbamulta. Alejandría en el siglo v está sacudida por confrontaciones de todo tipo. La religión cristiana es la religión oficial del Imperio Romano desde el año 313, en que así lo hizo establecer el emperador Constantino I el Grande; ya ha pasado el corto mandato de Juliano el Apóstata como emperador (361 a 363), quien intentó revivir sin mucho éxito los cultos paganos. En Alejandría ha habido conflictos de base religiosa fundamentalmente entre cristianos y judíos, entre los propios cristianos y entre cristianos y paganos. Desde el nombramiento como obispo de Alejandría de Cirilo, quien sería después San Cirilo de Alejandría, existe un enfrentamiento entre el poder eclesiástico y el poder civil, ambos cristianos, entre Cirilo y Orestes, prefecto del Imperio en Alejandría. Hipatia es una persona influyente en Alejandría, por sus buenas relaciones con los cristianos del entorno del gobierno del Imperio, y con el propio Orestes, y sus enseñanzas tienen fama y cuentan

con discípulos devotos, paganos y cristianos, entre los que se encuentra Sinesio de Cirene, que será nombrado obispo de Ptolemais (en la actual Libia). Corre el rumor por la ciudad de que Hipatia es responsable del enfrentamiento de Orestes con Cirilo, que es su mala influencia la que hace que el representante del emperador se oponga al obispo. El rumor se alimenta, quizá por el propio Cirilo, con la especie de que Hipatia practica ritos teúrgicos, que es una bruja. Su muerte está narrada en las fuentes que se conservan de varias maneras. El *Suda*[2] dice que "según algunos fue culpa de Cirilo, pero según otros, resultó de la inveterada insolencia y rebeldía de los alejandrinos. Ya que ellos hicieron lo mismo a muchos otros de sus propios obispos", y cita el caso de dos obispos de Alejandría, impuestos por el poder imperial, que también fueron asesinados en disturbios multitudinarios, arrastrados por las calles, despedazados y quemados. El *Suda* añade un motivo más para la animadversión de Cirilo hacia Hipatia: la envidia. Cuenta el Suda que, en una ocasión, Cirilo, al pasar frente a la casa de Hipatia, o el lugar donde enseñaba, vio que había una gran multitud entrando, saliendo y plantada frente a la casa, y preguntó a qué se debía. Le contestaron que Hipatia estaba hablando y que toda esa gente venía a escucharla. "Cuando supo esto" –dice el *Suda*– "su alma se amargó con envidia, e inmediatamente urdió su muerte, la más profana de las muertes".

Ya haya sido Cirilo instigador sólo de la campaña contra Hipatia o de su propia muerte, lo cierto es que la muerte de Hipatia eclipsa su vida y su obra, y se convierte en símbolo del fin del paganismo helénico, eliminado violentamente por el cristianismo, y del fin de una época ilustrada.

4. Las fuentes primarias de la vida y obra de Hipatia

La leyenda de Hipatia está propiciada por su muerte violenta, pero además describir una Hipatia no legendaria no es tarea fácil. No se conserva ningún escrito que se pueda afirmar que es de la mano de Hipatia, y las fuentes primarias sobre su vida o que den noticia de su obra son muy escasas. En Deakin (1995, 2007) se ofrece una descripción minuciosa de cuáles son, que resumo a continuación. Las fuentes son ocho:

1. Una voz en la enciclopedia *Suda Lexicon*.
2. Un pasaje de la *Historia Eclesiástica* de Sócrates Escolástico.
3. Un fragmento de la Crónica de Juan, obispo copto de Nikin.
4. Las cartas de Sinesio de Cirene, en particular las que tienen a Hipatia como destinataria.
5. Una inscripción al comienzo del libro III del comentario de Teón a la *Syntaxis* o *Almagesto* de Ptolomeo.
6. Una breve referencia en una historia de la iglesia Filostorgios.
7. Una breve referencia en una crónica de Malalas.
8. Una referencia en la *Cronografía* de Teófanes.

[2] Existe una edición on line del *Suda Lexicon* en griego, con traducción al inglés. El texto griego de esta edición on line es el establecido por Ada Adler en su edición de 1935 en cinco volúmenes con el título *Suidae Lexicon*, en el que la voz "Hipatia" está en las páginas 644-646 del volumen cuarto (cf. Deakin, 1995, p. 2). Yo cito de la edición on line, la versión española es mía. La voz "Hipatia" de esa enciclopedia parece que no es original, sino que está hecha a partir de dos textos anteriores: uno de una enciclopedia anterior del siglo VI, y otro, de *La vida de Isidoro* escrita por el filósofo neoplatónico Damascio, nacido en Damasco en 458. De ambos libros sólo se conservan fragmentos y noticias en otros textos posteriores (cf. Deakin, 1995, pp. 2-3).

1. El *Suda Lexicon* es una enciclopedia del siglo x, que ya he citado antes, y he descrito brevemente en la nota 2. Como digo en ella, parte de la voz "Hipatia" proviene de la *Vida de Isidoro* de Dasmacio, texto que no se conserva, pero del que sí que se conserva un resumen hecho por Focio, patriarca de Constantinopla del siglo IX, que está recogido en la *Patrología Griega*[3], una recopilación en 165 tomos de escritos de griegos que son importantes para la historia de la iglesia cristiana.

La voz Ὑπατία de esta enciclopedia comienza diciendo: ἡ Θέωνος τοῦ γεωμέτρου θυγάτηρ, τοῦ Ἀλεξανδρέως φιλοσόφου, καὶ αὐτὴ φιλόσοφος καὶ πολλοῖς γνώριμος ["La hija de Teón el geómetra, el filósofo alejandrino, también filósofa y conocida por muchos"].

2. Sócrates Escolástico es un historiador cristiano de la iglesia del siglo v. Su *Historia eclesiástica*[4] sí que se conserva ("lo que no es extraño", como señala Deakin, "porque los cristianos ganaron") y está recogida en la *Patrología Griega*.

3. Juan de Nikin era copto, y los coptos derivan de los monofisitas, secta cristiana que se hizo con la diócesis de Cirilo tras su muerte y que se proclamaron sus seguidores. El texto se conserva en una traducción al etíope, hecha a partir de una traducción al árabe del original, que probablemente estaba escrito en griego. La versión de la muerte de Hipatia que aparece en este texto es favorable a Cirilo y subraya la maldad de Hipatia.

4. Las cartas de Sinesio de Cirene[5] dirigidas a Hipatia son seis y un fragmento, más el ensayo conocido por su título latino *De Dono Astrolabii*, en el que habla de Hipatia, diciendo que construyó un astrolabio con su ayuda.

5. La inscripción al comienzo del libro III del comentario de Teón a la *Syntaxis* o *Almagesto* de Ptolomeo es una breve frase en la que Teón parece decir que el comentario de ese libro no lo ha hecho él sino que lo ha hecho su hija Hipatia. Sobre este asunto hay controversia entre los historiadores, ya que no todos piensan que la frase deba interpretarse como que el comentario sea exclusivamente de Hipatia, sino que hay quien piensa que lo que indica es que el comentario de ese libro lo escribieron padre e hija en colaboración, y sólo el orgullo paterno le hace a Teón decir que es obra exclusiva de su hija. Veremos después los argumentos de Knorr a favor de que sea de Hipatia.

6. Filostorgios era de una secta arriana y contemporáneo de Hipatia. Por ser arriano, sus obras están perdidas. Lo que se conserva es un resumen en dos frases hecho por Fotio.

7. La referencia en la crónica de Malalas, del siglo VI, no es valiosa, al parecer de Deakin, porque está constatada la falta de rigor de sus obras.

---

[3] Editada en el siglo XIX por J. D. Migne, está disponible on-line en http://www.ellopos.net/elpenor/greek-texts/fathers/migne-patrologia-graeca.asp

[4] La historia eclesiástica de Sócrates Escolástico está disponible on-line. El párrafo dedicado a Hipatia, que se titula "Hipatia, la mujer filósofa", está en http://www.newadvent.org/fathers/26017.htm.

[5] Las cartas, así como otros escritos de Sinesio de Cirene están publicados en la colección Clásicos de Gredos, con introducción, traducción y notas de F. A. García Romero. La edición canónica de Sinesio de Cirene es la de A. Fitzgerald, hecha en 1926, cuya traducción al inglés está disponible on-line en http://www.livius.org/su-sz/synesius/synesius_letters.html. Ésa traducción inglesa es la que yo he consultado. También se pueden encontrar en http://www.geocities.com/hckarlso/synesius.html.

8. La referencia en la Cronografía de Teófanes (s. VIII-IX) no sólo es breve, sino que da una fecha distinta e improbable para la muerte de Hipatia (406).

El conjunto de todo esto son sólo unas pocas páginas: la voz "Hipatia" del Suda, que es particularmente larga, tiene unas setecientas palabras, las cartas de Sinesio son en general breves, algunas de apenas tres párrafos. Las tres últimas fuentes carecen de interés, las otras describen someramente la vida de Hipatia, en ocasiones sólo el episodio de su muerte.

Pero si queremos saber algo más que acontecimientos de su vida, es decir, si queremos saber algo de su obra, la situación aún es peor: sólo podemos recurrir a unas pocas frases en el *Suda* y en las cartas de Sinesio, y a la indicación de Teón al comienzo del comentario al libro III de la *Syntaxis* de Ptolomeo.

Sinesio, pese a que fue discípulo ferviente de Hipatia en Alejandría y su seguidor a partir del momento en que dejó de asistir a sus clases para ser obispo en Ptolemais, no menciona ninguna obra de Hipatia en las cartas que le dirige, y apenas dice nada sobre el contenido de su enseñanza. Sinesio se dirige a ella como "la filósofa", y expresa su admiración por ella como guía espiritual y como mentora, como atestigua que, en una de las cartas, someta a su consideración dos libros que ha escrito, que sólo hará públicos con su aprobación: "Si no te parece que sean dignos de oídos griegos, si, como Aristóteles, aprecias la verdad más que la amistad, una oscuridad cerrada y profunda los ensombrecerá, y la humanidad nunca los oirá mencionar".

La única referencia explícita a obras de Hipatia que se conserva está contenida en el *Suda*, y sólo menciona obras matemáticas. Nada sabemos de que escribiera obra alguna de filosofía, pese a que las fuentes hablan de que su enseñanza era básicamente filosófica.

5. El contexto matemático

Tras la conquista de Egipto por Alejandro Magno y la fundación de Alejandría, se instaura una monarquía de la que el primer rey es uno de los generales de su ejército, Ptolomeo I. Éste funda el Museo en 330 a.n.e., una institución académica, que en la época de Hipatia ya no está en su mejor momento.

Algunos matemáticos que nos interesan para la historia de Hipatia y que trabajaron en Alejandría son, de antes de nuestra era, Euclides (325-265 a.n.e.) y Apolonio (262-190 a.n.e.); y, ya en nuestra era, Ptolomeo (100-170), Diofanto (200-284), Pappus (290-350) y Teón (335-405), el padre de Hipatia (355/370-415/416).

Euclides, Apolonio, Ptolomeo, Diofanto son matemáticos que desarrollan las matemáticas, la reorganizan y la fundamentan, descubren teoremas y resuelven problemas, inventan lenguajes y plantean problemáticas de estudio.

En los tiempos de Pappus y Teón, sin embargo, ha habido un cambio de énfasis en el trabajo de los matemáticos, ya no nos encontramos con creadores de matemáticas: se trata ahora más bien de conservar y transmitir las obras de los matemáticos anteriores. El estilo de libro que se desarrolla es el comentario. La obra de Pappus, en ocho tomos, se llama la *Colección Matemática*, y Teón escribe comentarios a los libros de Ptolomeo y de Euclides. Estos comentarios los podríamos comparar con un libro de texto o, mejor, con los apuntes para clase preparados por un profesor que tiene que explicar un libro de texto.

6. Las matemáticas de Hipatia

El pasaje del *Suda* en que se mencionan las obras de Hipatia tiene pocas palabras y ha sido objeto de un par de lecturas distintas. El texto es ἔγραψεν ὑπόμνημα εἰς Διόφαντον, τὸν ἀστρονομικὸν Καν όνα, ε ἰς τ ὰ Κωνικ ὰ Ἀπολλωνίου ὑπόμνημα, "escribió un comentario a Diofanto, el *Canon astronómico* y un comentario a las *Cónicas* de Apolonio". La lectura más aceptada es la que hizo Paul Tannery en 1880, para quien, aunque al referirse a ese "Canon astronómico", no se reitera la palabra "comentario", eso no significa que se esté diciendo que Hipatia escribiera un libro de ese título, sino que ahí se estaría haciendo referencia también a un comentario sobre una obra astronómica, que podría ser el comentario que Teón dice que hizo su hija al libro III de la *Syntaxis* de Ptolomeo, o, en todo caso, a las tablas de Ptolomeo (Tannery, 1880). Lo único que las fuentes nos dicen que haya escrito Hipatia es, por tanto, lo siguiente:

1. Un comentario a las *Cónicas* de Apolonio.
2. Un comentario a un *Canon astronómico* o un *Canon astronómico*.
3. Un comentario a algún libro de Diofanto.

No se conserva ningún manuscrito que corresponda a ninguno de estos textos, lo que ha dado pie a especulaciones sin fundamento sobre su contenido, pero también a algunas hipótesis que vale la pena examinar. Eso es lo que voy a hacer a continuación.

6.1. Sobre el comentario a las *Cónicas* de Apolonio, poco hay que decir: no se conserva ni rastro de él.

Lo que queda de las *Cónicas* de Apolonio no es el conjunto de los ocho libros que lo componían, sino sólo cuatro de ellos en griego y otros tres de los que sólo existe una traducción en árabe. En el estudio crítico más reciente del conjunto de las *Cónicas*, hecho por Michael Fried y Sabetai Unguru, que es de 2001, ya que nada se sigue sabiendo del comentario de Hipatia, se limitan a comentar que "Hipatia (370?-415 A. D.), la hija de Teón de Alejandría, escribió supuestamente un comentario de las *Cónicas*, pero no hay manera de saber cuánta parte del texto de Apolonio cubría realmente su comentario. […] Es probable, sin embargo, que ya en tiempos de Hipatia no se leyeran las *Cónicas* completas" (Fried y Unguru, 2001, p. 5). No sólo no sabemos nada pues del contenido de este comentario de Hipatia, sino que ni siquiera sabemos si comentó todos los libros que componían el texto original de Apolonio, o sólo los que se conservan. Fried y Unguru son de la opinión de que no los comentaría todos, pese a que afirman que Pappus (290-350) aún comentó más que los que se conservan actualmente.

Apolonio (262-190 a.n.e.) nació en Perga, actualmente en Turquía, y vivió en Éfeso, Pérgamo y Alejandría. Parece ser que fue en Alejandría donde redacto las *Cónicas*, en ocho libros. Pappus (290-350) en su *Synagoge o Colección Matemática* (también ocho libros de los que se ha perdido el primero y el segundo se conserva mal) todavía se refiere a los ocho. Los que se conservan en griego proceden del comentario de Eutocio (s. VI), quien se sabe que tenía los otros cuatro libros porque prometió que los editaría también, pero nunca lo hizo, o al menos no hay noticia de que lo hiciera. No es raro que los ocho libros de las *Cónicas* aparezcan en dos bloques de cuatro. El propio Apolonio en una carta a Eudemo, que se suele incluir como prólogo en las ediciones de las *Cónicas*, le dice que los cuatro primeros libros constituyen "un curso en los elementos" [de las *Cónicas*]. Quizá por eso Eutocio sólo comentó esos cuatro libros, preparando así para sus alumnos un curso elemental de *Cónicas* y esperando si resultaba interesante comentar los demás.

La historia de los libros que se han conservado sólo en árabe es un buen ejemplo de las dificultades de transmisión y conservación de los libros en épocas antiguas. Los hermanos Musa dicen que tienen los cuatro primero en la edición de Eutocio y los tres siguientes "según los compuso Apolonio". Los Banū Mūsā (Muhammad, Ahmad y al-Hasan) son del siglo IX, algo posteriores a al-Khwārizmi. La historia de cómo llegaron a tener esos siete libros en dos versiones distintas es la siguiente. Habían comprado esos siete libros de las *Cónicas*, pero, cuentan, "la tarea [de traducirlos y entenderlos] resultó serles imposible por el excesivo número de errores que se habían acumulado en ese manuscrito. Unos años más tarde, en Siria, Ahmad ibn-Mūsā encontró una copia de la edición de Eutocio de los primeros cuatro libros […] esto les permitió entender el texto de las *Cónicas* que habían encontrado antes, y en particular los libros V a VII que sólo estaban en el primer manuscrito que compraron" (Fried y Unguru, 2001, p. 7). Los Banū Mūsā encargaron la traducción, que la hicieron Hilāl ibn Abī Hilāl al-Himsi (libros I-IV) y Thābit ibn Qurra (V-VII). Hay noticia de otra traducción árabe que no se conserva hecha por el hijo de quien fue el director de la Casa de la Sabiduría durante esos años, responsable de que se hicieran gran parte de las traducciones, que era un cristiano nestoriano.

El libro VIII, que no se conserva ni en griego ni en árabe, se ha intentado reconstruir en varias ocasiones a partir de la descripciones que hay de él del propio Apolonio o en la *Colección* de Pappus. La primera reconstrucción de la que se tiene noticia la hizo alrededor de 1021 ibn al-Haytham. La más conocida es la que hizo Halley, en 1710, junto con su edición princeps de los cuatro libros griegos y su traducción al latín de los tres árabes de los Banu Musa.

De paso, vale la pena decir que el intentar reconstruir textos antiguos perdidos no es algo que sólo se hiciera con este libro de Apolonio. Sin salir de la obra de Apolonio, François Viète publicó en 1600 un libro que firmó como Apollonius Gallus en el que resolvió el problema de encontrar una circunferencia tangente a tres circunferencias dadas de radios cualesquiera, que según Pappus en su Colección era el problema más difícil del *Tratado de los contactos*, un libro de Apolonio que también se ha perdido.

Nada quedapues de la edición de Hipatia, ni en los manuscritos que se conservan en griego, ni tampoco en los que están en árabe, y lo más plausible es que fuera de los cuatro libros elementales.

6. 2. SOBRE EL COMENTARIO A UN *CANON ASTRONÓMICO* O UN *CANON ASTRONÓMICO*.

Si no seguimos la lección de Tannery y pensamos que Hipatia escribió un *Canon astronómico*, nada podemos decir de ese libro, porque no se conserva el menor rastro de él. Otra cosa es si la seguimos y pensamos que lo que Hipatia escribió es un comentario a un *Canon astronómico*, y que ese comentario es en realidad el que Teón atribuye a su hija, es decir, el comentario al libro III de la *Syntaxis* de Ptolomeo. Ya he indicado antes que hay historiadores que no aceptan que ese comentario lo escribiera Hipatia sola, entre los que sí mantienen que ese comentario es de Hipatia, quien argumenta con más detalle esa atribución a Hipatia es Wilborn Knorr, en su libro relativamente reciente *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry* (Knorr, 1989). El argumento de Knorr está basado en un estudio del estilo con que está escrito el conjunto del comentario de Teón a la *Syntaxis* de Ptolomeo. Knorr concluye que Hipatia debió de trabajar para sus clases a partir de un comentario escrito por su padre, y que "fue responsable de una forma revisada del Libro III de Teón, pero que los cambios textuales no afectaron a todas sus secciones", por lo que busca "secciones del libro III que sean diferentes en algún sentido del resto del comentario" (Knorr, 1989, p. 757). La diferencia de estilo que encuentra es lo

suficientemente grande para afirmar que el comentario al libro III está escrito por una mano distinta de la de Teón. Knorr describe la diferencia en estos términos: el estilo "asignado a Hipatia –con su formato cuidadosamente modelado y sus verbos en aoristo– tiene el tono de un informe, basado en notas cuidadosas, de un cálculo ya completado"; por su parte, "la explicación de Teón suena extemporánea, con su asistemática diversidad en la elección de vocablos y sus verbos en futuro, que sugieren un cálculo en el proceso de realizarse" (Knorr, 1989, p. 763). Esa diferencia de estilo, le permite a Knorr atribuir el comentario al libro III a Hipatia, pero también afirmar que Teón puede permitirse el lujo de tener ese estilo en el que se muestran las cosas haciéndose y se deja a los alumnos que completen las lagunas, corrijan los errores y vean cómo se despliega ante ellos el pensamiento del maestro mientras resuelve los problemas. Hipatia no puede permitirse ese lujo "ya que la pericia académica de una mujer sería especialmente vulnerable, sería absolutamente apropiado para alguien en la posición de Hipatia explotar el poder retórico del lenguaje preciso, para así asegurar su autoridad" (Knorr, 1989, p. 763).

Además de encontrar este argumento de estilo para atribuir el comentario a Hipatia y mostrarnos qué caracteriza el estilo de Hipatia, Knorr también examina la atribución a Hipatia, hecha por otros historiadores, de un procedimiento para realizar divisiones entre números expresados en el sistema de numeración sexagesimal. Efectivamente, el comentario al libro III contiene un procedimiento para hacer tales divisiones, en el que la división se efectúa consultando una tabla de múltiplos del divisor que se construye en primer lugar, viendo entre qué dos múltiplos se encuentra el dividendo, restando el menor de ellos del dividendo, y reiterando la búsqueda en la tabla con el resto obtenido. El procedimiento permite continuar la división indefinidamente. Knorr, sin embargo, sólo atribuye a Hipatia el haber incluido el procedimiento en su comentario al libro de Ptolomeo, que no está en el libro original de éste, pero no la autoría del procedimiento, ya que éste se encuentra también en el comentario que Pappus escribió al mismo texto de Ptolomeo un siglo antes, que Teón utilizó en la preparación de su comentario, y es de hecho una técnica babilónica ya existente en el segundo milenio antes de nuestra era (Knorr, 1989, p. 763). En cualquier caso, Hipatia destaca aquí de nuevo por su preocupación por la realización precisa y detallada de cálculos.

Veamos en qué consiste exactamente el procedimiento de división con un ejemplo que Knorr atribuye al comentario de Hipatia y que se encuentra en el libro III.

Ptolomeo da el resultado de calcular el ángulo recorrido en un día. El número de días en un año, escrito tal y como lo hace Ptolomeo, es τξε ιδ μη.

Lo primero que hay que entender pues es cómo esta escrito este número, y lo está con una combinación del sistema de numeración alfabético griego con el sistema de numeración sexagesimal babilónico, que es el que se usa en astronomía.

Si pasamos ese número al sistema de numeración decimal posicional con nuestras cifras, el número está formado por tres bloques:

365 14 48

que están en posiciones sucesivas de un sistema sexagesimal:

$365 + 14/60 + 48/60^2$

Por ejemplo, si quisiéramos escribir así 322, como es 5·60+22
se escribiría

ε κβ

con letras distintas para los dos doses porque este sistema no es posicional sino aditivo, en cada bloque. Por su parte, las posiciones sexagesimales no llevan ninguna indicación del orden de cada posición, es decir, se trata de una sistema sexagesimal "de coma flotante".

Para seguir con más facilidad el procedimiento, expondré los cálculos escribiendo los números con nuestras cifras con valor posicional decimal.

La operación que hay que hacer es dividir 360 grados por 365'24666…, que resulta 0'98563578.

En la notación de Ptolomeo, hay que dividir 360 por 365 14 48, pero 365 es 6·60+5, así que se escribe 6 5 (14 48).

Lo primero que se hace es construir una tabla de múltiplos del divisor. Los múltiplos necesarios, es decir, hasta 60.

1	6	5	14	48
2	12	10	29	36
3	18	15	44	24
4	24	20	59	12
5	30	26	14	0
6	36	31	28	48
7	42	36	43	36
8	48	41	58	24
9	54	47	13	12
10	60	52	28	0
20	121	44	56	0
30	182	37	24	0
40	243	29	52	0
50	304	22	20	0
60	365	14	48	0

Luego se busca el múltiplo más cercano y se resta. Se reitera las veces necesarias, como puede verse en la figura.

360			subt	304	22	20	0	50′
55	37	40	subt	54	47	13	12	9′
50	26	48	subt	48	41	58	24	8″
1 44	49	36						
104	49	36	subt	60	52	28	0	10‴
43	57	8	subt	42	36	43	36	7‴
1 20	24	24						
80	24	24	subt	60	52	28	0	10⁗
19	31	56	subt	18	15	44	24	3⁗
76	11	36	subt	60	52	28		10⁗′
15	19	8	subt	12	10	29	36	2⁗′
188	38	24	subt	182	37	24	0	30⁗′
6	1		subt	6	5	14	48	1⁗′

El resultado es 59 8 17 13 12 31

Hipatia no ha inventado el procedimiento. Lo que hace es, en un lugar en el que Ptolomeo da el resultado de una división que resuelve un problema interesante, aprovechar para explicar ese procedimiento, y hacer posible que sus alumnos puedan calcular esa división y cualquier otra de la misma naturaleza.

Hipatia está pues preparando el texto de Ptolomeo para sea más sencillo para sus alumnos, y lo que vemos es que la preparación del texto para los alumnos consiste en que éstos no tengan que inventar nada, que todo lo tengan ya hecho.

6.3. Sobre el comentario a Diofanto.

Esta mención a un "comentario a Diofanto" en el *Suda* ha sido interpretada desde el siglo XIX como que Hipatia habría hecho un comentario a las *Aritméticas* de Diofanto. Al comienzo del libro I de las *Aritméticas*, Diofanto dice que "su elaboración se realizará en trece libros" (Ver Eecke, 1959, p. 9). Sin embargo, hasta el año 1971, sólo se conocían seis de esos trece libros, los seis libros que reaparecieron en el occidente cristiano en el siglo XV, cuando Johann Müller, conocido como Regiomontanus, comunicó su hallazgo en 1464, y empezaron a conocerse y estudiarse gracias a las traducciones al latín de Xylander en 1575, y, sobre todo, la de Bachet de Méziriac en 1621. La edición canónica de esos seis libros es, sin embargo, la que hizo Paul Tannery en 1893. Tannery hizo la hipótesis de que el motivo por el cual sólo se conservaban seis de los trece libros de las *Aritméticas* era porque todos los manuscritos que se conservaban procedían del comentario Hipatia y que Hipatia sólo habría comentado esos seis libros. La hipótesis de Tannery hizo fortuna y se ha repetido en historias de las matemáticas y en historias de Hipatia, pese a que para mantenerla tuvo que añadir una segunda hipótesis que explicara por qué el texto de los libros que se conservan no tiene ninguno de los rasgos propios de un comentario. La segunda hipótesis *ad hoc* para salvar la primera era que alguien se habría preocupado de eliminar todos los comentarios en algún momento entre la época de Hipatia y la época de los manuscritos más antiguos que se conservan, que son del siglo XIII. En su edición, Tannery incluye un árbol genealógico de los manuscritos que él examinó, haciéndolos derivar todos del hipotético comentario de Hipatia.

Anteriormente, Bachet de Méziriac, en su edición de 1621 de las *Aritméticas* de Diofanto, hizo una interpretación muy distinta: leyó el fragmento del *Suda* donde se mencionan las obras de Hipatia sin separación entre el nombre de Diofanto y la mención del *Canon astronómico*, lo que le llevó a decir que Hipatia había escrito un comentario sobre un supuesto *Canon astronómico* de Diofanto, y a identificar a Diofanto con un astrónomo del tiempo de Nerón, con lo que habría vivido en el siglo I de nuestra era (Ver Eecke, 1959, p. IX). Bachet hizo estas afirmaciones en la "Epístola al lector" con que comienza su edición del texto griego de Diofanto y su traducción al latín, y en ella excluye explícitamente que Hipatia escribiera comentario alguno sobre las *Aritméticas* (Bacheto Meziriaco, 1621, pp. iii-iiii). Ninguna de estas afirmaciones de Bachet de Méziriac se mantienen hoy en día.

La atractiva e ingeniosa hipótesis de Tannery dejó de tener sentido cuando en 1971 se descubrieron cuatro de los libros perdidos de las *Aritméticas*, en una traducción al árabe del siglo IX, de Qustā ibn Lūqā, que obligó a volver a considerar la historia de los manuscritos de las *Aritméticas* de Diofanto. Esos cuatro libros en árabe encontrados hace algo más de treinta años parece que van a continuación de los tres primeros que se conservan en griego, y han sido editados desde su descubrimiento dos veces, por dos historiadores con opiniones dispares y que se han enfrentado en una agria polémica, con cruces de acusaciones mutuas de ignorar o robar el trabajo del otro, y de errores e inconsistencias. Se trata de la edición con traducción al inglés de Jacques Sesiano en

Springer (Sesiano, 1982), y la edición con traducción al francés de Roshdi Rasched en Les Belles Lettres (Rashed, 1984).

Jacques Sesiano afirma que la hipótesis de Tannery sobre que el comentario de Hipatia estuviera hecho exclusivamente de los seis libros que se conservan en griego, si ya era endeble en el momento en que la enunció, ahora no sólo es insostenible, sino que hay que sustituirla por la hipótesis de que los que proceden del comentario de Hipatia son precisamente los libros que se acaban de encontrar en árabe, y no los que se conservan en griego.

Sesiano se apoya para esta afirmación en que el manuscrito de los libros en árabe, a diferencia de lo que sucede con los manuscritos de los libros en griego, sí que tienen partes que pueden atribuirse a un comentario. Para fundamentar su afirmación, Sesiano compara el estilo general de presentación de los problemas en los libros en griego, con el estilo que tienen en los libros en árabe y concluye que son diferentes, y que la diferencia fundamental consiste en que, en los libros en griego, la resolución del problema termina cuando acaba el análisis y el valor de la incógnita del problema está determinado (ya que Diofanto concluye el análisis siempre con una igualdad entre expresiones que sólo contienen una especie de números, o, dicho en términos modernos, con una igualdad entre monomios). En los libros en árabe, la resolución no termina ahí sino que continúa con la comprobación de que el valor obtenido para la incógnita verifica las condiciones del problema (lo que Sesiano llama "síntesis"). En los libros en griego, esa comprobación no está nunca y la resolución concluye con expresiones del estilo de "se cumple lo propuesto". En los libros en árabe, esa comprobación está siempre presente, seguida de un comentario final. Según Sesiano las verificaciones provendrían del comentario de Hipatia, y el comentario de un escoliasta posterior.

Para apoyar aún más su afirmación Sesiano no sólo compara el estilo general de los cuatro libros en árabe con los libros en griego, que como no coinciden no permite una comparación textual problema a problema, sino que hace la hipótesis de que los fragmentos de Diofanto citados por al-Karajī en su álgebra también proceden del comentario de Hipatia. Como al-Karajī está citando tanto libros que se conservan en griego (los tres primeros) como uno de los que se conservan en árabe (el primero de los que se conservan en árabe, que sería el libro IV), esto le permite comparar el texto citado por al-Karajī de problemas correspondientes a los tres primeros libros con el texto que se conserva en griego problema a problema y comprobar que efectivamente aparecen ahí añadidas las comprobaciones. Eso le conduce a establecer que el comentario de Hipatia se extendió al menos a los siete primeros libros de las *Aritméticas* y consistió en añadir las comprobaciones y poco más.

Un ejemplo de esto podemos verlo en el problema 14 del libro II de Diofanto, tal y como lo recoge al-Karajī (ver Rashed, 1984, pp. XXXV-XL), cuyo enunciado pide

> Dividir un número dado en dos números, y encontrar para éstos un cuadrado que, aumentado de cada una de las partes, resulte un cuadrado.

Como es habitual, Diofanto continúa tomando un número concreto, en este caso, veinte, y resuelve el problema para ese número, usando una incógnita auxiliar, que Diofanto llama *arithmos*, y que en el texto árabe aparece con el nombre propio del álgebra árabe "cosa". El texto griego termina el análisis, obtiene el valor siete décimos para la incógnita auxiliar, determina los dos números en que se divide veinte, "El uno será 68 décimos y el otro 132 décimos", y concluye con la expresión "y verifican lo propuesto".

El texto árabe continúa así:

> Ya que hemos puesto una de las dos partes de veinte, cuatro dirhams más cuatro cosas, será seis dirhams más cuatro quintos de dirham; la segunda parte es trece dirhams más un quinto de dirham. El tesoro, que es el cuadrado obtenido del producto de siete décimos por sí mismo, es cuarenta y nueve partes de cien partes de la unidad. Eso es lo que, si lo añades a cada una de las partes de veinte, dará una suma cuadrada (Rashed, 1984, p. XL).

Es decir, en el texto en árabe se verifica que lo obtenido en el análisis verifica las condiciones del enunciado (al menos en parte, pero hay que tener en cuenta que esto es el resumen de al-Karajī de lo que Sesiano supone que es el comentario de Hipatia, no el comentario de Hipatia completo). Si aceptamos la hipótesis de Sesiano, tenemos aquí un ejemplo del trabajo matemático de Hipatia, y este ejemplo es de índole similar a lo que Knorr ha mostrado que pertenece a Hipatia en el comentario a Ptolomeo.

Sesiano indica que el comentario de Hipatia, además de añadir estas comprobaciones (que él llama "síntesis"), también contiene algunos añadidos en el análisis que consisten en hacer más explícitos los pasos del análisis y lo que se usa en ellos, indicando, por ejemplo, que en un paso se están usando identidades del estilo de "$a^2/a = a$ (p. e., en IV, 20), $a^3/a = a^2$ (p. e., en IV, 21)" o teoremas del estilo de "si $a^2 = b^2$, entonces $a = b$ (p. e., en IV, 9), si $a^3 = b^3$, entonces $a = b$ (p. e., en IV, 18), si $a^4 = b^4$, entonces $a = b$ (p. e., en IV, 17), o si a/b es un cuadrado, entonces ($a/b \cdot b^2 =$) $a \cdot b$ es un cuadrado (en IV, 21)" (Sesiano, 1982, p. 69). Otros añadidos en el análisis son, según Sesiano, volver a enunciar el problema con los números concretos o referencias a otros de los libros de las *Aritméticas*.

En Deakin (1994) aún se puede encontrar la indicación de otros añadidos procedentes del comentario de Hipatia, que Deakin califica de "ejercicios para estudiantes". Estos ejercicios están interpolados al comienzo del libro II, y "el primero pregunta por la solución del par de ecuaciones simultáneas

$$x - y = a, x^2 - y^2 = (x - y) + b,$$

con a y b conocidas. El siguiente es una generalización menor: pide la solución del par de ecuaciones simultáneas

$$x - y = a, x^2 - y^2 = m(x - y) + b,$$

donde a, m y b son conocidas" (Deakin, 1994, pp. 239-240).

Con estos datos delante, las valoraciones de Sesiano y Deakin de lo que se puede atribuir a Hipatia son similares: "Desde un punto de vista puramente matemático el valor de tal reescritura es mínimo" (Sesiano, 1982, p. 70); "sus contribuciones al conocimiento matemático mismo fueron ligeras o inexistentes" (Deakin, 1994, p. 240).

Sesiano es aún más contundente que Deakin porque aún entra en más detalles, señalando que Hipatia "deja de explicar los pasos más difíciles de algunas resoluciones (problemas IV, 44b o V, 1-3), y ninguno de los resultados de problemas intermediarios, dados directamente por Diofanto y obtenibles con métodos enseñados en el libro II, se calcula efectivamente" (Sesiano, 1982, p. 70). Más aún Sesiano (1982, pp. 63-64) muestra que en algunas ocasiones los cálculos de Hipatia no son correctos (problemas IV, 27 y VIII, 4).

En efecto, lo que está mal en el comentario de Hipatia al problema IV, 27 es lo siguiente. El problema pide hallar dos números tales que $(a^3)^2 + kb$, con $k = 5$ sea un cuadrado. Diofanto encuentra los valores $a = 4$ y $b = 32$. Hipatia en la comprobación calcula $a^3 + kb$,

[5184, cuadrado de 72] en vez de $(a^3)^2 + kb$ [9216, cuadrado de 96]. Como da la casualidad de que para esos valores $a^3 + kb$ también es un cuadrado, Hipatia no se da cuenta de que la comprobación no se corresponde con lo que pide el problema.

El error en VIII, 4, por su parte, consiste en que los números que se piden han de ser proporcionales al tesoro tesoro, y en la comprobación se calculan como si fueran proporcionales al tesoro. Ambos casos indican que Hipatia, o quien hiciera el comentario, no manejaba demasiado bien las especies de nombre compuesto, o, en nuestra terminología, las potencias mayores de tres.

El comentario de Hipatia formaría parte de una tradición que se inicia en el siglo IV "que diluye el material de los tratados clásicos para los estudiantes" e Hipatia "no estaría haciendo poco más que diluir un razonamiento ya existente, y calcular valores que pueden obtenerse mediante cálculos elementales" (Sesiano, 1982, p. 70), con lo que estaría presentando el texto de Diofanto "masticado" para que los alumnos no tuvieran problemas con los cálculos, en vez de embarcarlos en su reinvención a la manera socrática.

Esta afirmación de Sesiano no sólo menosprecia el trabajo de los profesores y autores de libros de texto, negándoles contribución alguna al trabajo matemático, sino que puede calificarse de anacrónica. El trabajo de los matemáticos de la antigüedad tardía (Pappus, Proclo, Teón, Hipatia) puede calificarse con menosprecio como débil reflejo de un esplendor perdido, comentario trivial que no aporta nada al desarrollo de las matemáticas, o puede estudiarse en su especificidad, como hace Netz (1998). La opinión de Netz es que los comentarios a cuya tradición hace referencia Sesiano, a los que Netz (1998) llama "textos deuteronómicos", generan una nueva práctica matemática que acaba afectando a la manera en que se conciben y se practican las matemáticas. Los matemáticos de épocas anteriores resuelven problemas y demuestran teoremas, éstos reflexionan a la vez sobre la forma en que se resuelven teoremas y se demuestran teoremas, y establecen las reglas de la práctica de escritura de textos matemáticos.

La opinión de Netz se aplica claramente a libros como la *Synagōgē* de Pappus, donde expone el arte del análisis o el *Comentario al libro primero de los Elementos de Euclides* de Proclo, donde éste establece las partes de la demostración de un teorema. Para incluir lo que tenemos de Hipatia dentro de los textos deuteronómicos es preciso considerar también la transformación que el trabajo de preparación de un texto matemático para la enseñanza produce en la propia práctica matemática, como lo hace Belhosta, para quien "la puesta en común del saber matemático […] constituye un aspecto esencial de la actividad matemática, parte integral de la actividad de invención" (Belhosta, 1998, p. 289).

Pero esta discusión sobre la valoración que hace Sesiano del comentario de Hipatia dejaría de tener sentido si en la polémica entre Sesiano y Rashed nos colocáramos en el bando de Rashed. En efecto, para Rashed la atribución de los libros en árabe al comentario de Hipatia es un disparate sin fundamento, uno más de los cometidos por Sesiano en su edición. Según Rashed, nada hay en los libros en árabe que pueda atribuirse a la mano de Hipatia, y los comentarios serían del propio traductor Qustā ibn Lūqā (Rashed, 1984, p. LXII). André Allard también es de la opinión de que no hay nada de Hipatia en los manuscritos que se conservan de las *Aritméticas* de Diofanto en griego, que él ha vuelto ha examinar a raíz de la aparición del manuscrito en árabe, añadiendo nuevos manuscritos que Paul Tannery no tuvo o no estudió. Allard (1981 y 1982-1983) demuestra minuciosamente que "se puede dar de la historia de la tradición manuscrita griega de la obra de Diofanto las Aritméticas una visión sensiblemente muy diferente de la de Paul Tannery" porque Tannery utiliza sin confesarlo la edición de Bachet de Méziriac y sacrifica deliberadamente

"toda la tradición que deriva de un manuscrito autógrafo de Máximo Planudes" (Allard, 1982-1983, p. 58). Allard ni menciona a Hipatia en su voluminoso trabajo en el que examina el intento de edición de Joseph Auria a finales del siglo XVI o principios del XVII, y treinta y un manuscritos griegos que organiza en un árbol, diferente del de Tannery y del que Hipatia ha desaparecido.

7. HIPATIA, MAESTRA DE VIDA

Lo poco que sabemos de las matemáticas de Hipatia pues es que hace y añade cálculos minuciosos y precisos, y aclara pasos de razonamientos. Sesiano minusvalora su trabajo. Rashed sencillamente niega que esté presente en lo que tenemos de Diofanto. Knorr explica que lo haga por la necesidad de estar en guardia ante los ataques que pueden venirle por el hecho de ser mujer.

Pero aún cabe interpretar la presencia de esos cálculos precisos y minuciosos de otra manera. El centro de la enseñanza de Hipatia es la filosofía, entendida como forma de vida, como disciplina para obtener la serenidad, el dominio de sí, la *sofrosine*. Hipatia no enseña en el Museo, como su padre Teón, una institución que de forma anacrónica podemos llamar "de ciencias", sino en una escuela de filosofía neoplatónica. Las matemáticas no son más que un medio para ese fin espiritual y su práctica es también una práctica de sí. En ese contexto, la realización precisa de cálculos minuciosos es también una disciplina para la *sofrosine*, la finalidad del cálculo no es obtener el resultado, sino el dominio de sí.

La enseñanza de Hipatia es la de una filósofa neoplatónica, y así la presenta Dzielska, para quien la pregunta clave es si sigue a Porfirio o a Jámblico (Dzielska, 2004, p. 75). Hay quien cree más bien que es una cínica, y lo fundamenta en que Sócrates Escolástico habla de su *parresía*, su decir la verdad, "casi se oye al perro cínico ladrando" (Rist, 1995, p. 221). En todo caso, su enseñanza es para sus alumnos no la de una profesora de matemáticas, sino la de una maestra de vida. Sinesio de Cinere, en la última carta que le escribe, poco antes de su muerte en 413, la llama "madre, hermana, maestra, y además benefactora, y cualquier otra cosa que se honre por nombre o hecho".

8. HIPATIA, PROFESORA DE MATEMÁTICAS

Como matemática, Hipatia no es una investigadora, no crea matemáticas. No plantea nuevos problemas, ni enuncia conjeturas que demuestre para convertirlos en teoremas. Lo que hace es preparar sus clases. Hipatia es una profesora de matemáticas, y si nos atenemos a los testimonios de sus alumnos, en particular a Sinesio de Cirene, una buena profesora de matemáticas a la que sus alumnos adoran.

Pero no hay que ser anacrónico y traducir esa apreciación de sus alumnos en que la manera de enseñar de Hipatia pueda servirnos de modelo. Sí de modelo de esa parte importante de la organización de la enseñanza que es conseguir el interés de los alumnos, la fascinación de los alumnos por lo que se les esté presentando, las ganas de aprender porque la profesora tiene ganas de enseñar y desea que el alumno aprenda. Pero no de modelo de cómo presentar la materia. Lo poco que sabemos de lo que hacía Hipatia está muy lejos de favorecer que los alumnos descubran, reinventen matemáticas, a la manera socrática; más bien se parece a preparar los textos para dárselos a los alumnos totalmente mascados, sin margen para la invención y el descubrimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Allard, A. (1981). La tentative d'édition des Arithmétiques de Diophante d'Alexandrie par Joseph Auria. *Revue d'Histoire des Textes XI*, pp. 99-122.

Allard, A. (1982-1983). La tradition du texte grec des Arithmétiques de Diophante d'Alexandrie, *Revue d'Histoire des Textes XII-XIII*, pp. 57-137.

Bacheto Meziriaco, C. G. (1621). *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum Libri sex, et De Numeris Multangulis Liber unus*. Lutetiæ Parisiorum: Hioronymi Drovart.

Belhoste, B. (1998). Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques. *Revue d'histoire des mathématiques 4*(2), pp. 289–304.

Deakin, M. A. B. (1994). Hypatia and Her Mathematics. *The American Mathematical Monthly 101*(3), pp. 234-243.

Deakin, M. A. B. (1995). The Primary Sources for the Life and Work of Hypatia of Alexandria. *Monash University History of Mathematics Paper 63*. Versión electrónica descargada en mayo 2009 de http://www.physics.utah.edu/~jui/3375/Class Materials Files/y2007m08d22/hypatia-primary-sources.html.

Deakin, M. A. B. (2007). *Hypatia of Alexandria: Mathematician and Martyr*. Amherst, NY: Prometheus Books.

Dzielska, M. (2004). *Hipatia de Alejandría*. Traducción española de José Luis López Muñoz. Madrid: Siruela.

Fried, M. & Unguru, S. (2001). *Apollonius of Perga's* Conica*. Text, context, subtext*. Leiden, Boston, Köln: Brill.

Knorr, R. (1989). *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*. Boston: Birkhäuser.

N. C., M. de (1718). *Les femmes sçavantes ou bibliothèque des dames. Qui traite des sciences qui conviennent aux dames, de la conduite de leurs études, des livres qu'elles peuvent lire, et l'histoire de celles qui ont excellé dans les sciences*. Amsterdam: Chez Michel Charles le Cene.

Netz, R. (1998). Deuteronomic Texts: Late Antiquity And The History Of Mathematics *Revue d'histoire des mathématiques 4*(2), pp. 261–288.

Rashed, R. (Ed.). 1984. *Diophante. Tome III. Les Arithmétiques. Livre IV,* et *Tome IV, Livres V, VI et VII.* Texte de la traduction arabe de Qustâ ibn Lûqâ établi et traduit par Roshdi Rashed. Paris: Les Belles Lettres

Rist, J. M. (1965). Hypatia. *Phoenix 19*(3), pp. 214-225.

Sesiano, J. (1982). *Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica in the Arabic Translation attibuted to Qustâ ibn Lûqâ*. New York, Heidelberg, Berlin: Springer Verlag.

Tannery, P. (1880). L'article de *Suidas* sur Hypatie. *Annales de la faculté des lettres de Bordeaux 2*, pp. 197-200.

Tannery, P. (Ed.) (1893). *Diophanti Alexandrini Opera Omnia cum graecis commentariis*. Edidit et latine interpretatus est Paulus Tannery. 2 vols. Stuttgart: B. G. Teubner. [Reimpresión 1974.]

Ver Eecke, P. (Ed.) (1959). *Diophante d'Alexandrie, Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones.* Paris: Albert Blanchard.

Voltaire (1829). *Dictionnaire philosophique. Tome V*. Paris: Chez Legrien fils, libraire.

PONÈNCIES

LES COMPETÈNCIES MODELITZADORES A L'ESO: ELS PROJECTES MATEMÀTICS REALÍSTICS

Manel Sol
Ins. Vilatzara, Vilassar de Mar,-Barcelona
msol@xtec.cat

0. INTRODUCCIÓN

Des de l'any 2007 que estan aprovats els currículums que estableixen que l'objectiu de l'educació dels nostres joves és el desenvolupament de les competencies bàsiques, entre elles les matemàtiques. Les implicacions que això té en la tasca docent són importants i planteja reptes que tot just s'han començat ha abordar i no estan superats. És per això que malgrat el temps que ha passat encara se 'n ha de parlar per avançar en la implantació d'una educació per competències.

La competència implica una nova manera d'aprendre, cap a lo útil i funcional, i també una reformulació del que vol dir saber. L'economista Niño (2009) ho ha expressat bé:

> *lo fundamental son los conocimientos*
> *(adquiridos de la forma que sea) orientados hacia*
> *lo útil, es decir que sirvan para hacer cosas útiles*
> *y con eficiencia.*
>
> (Santiago Niño Becerra, 2009)

La societat es gasta molts recursos en formar als seus membes per a que arribin a ser bons ciutadans, i nosaltres com a professors hem de ser conscients d'aquest fet i actuar amb responsabilitat. Crec que és el nostre repte, els coneixements que nosaltres impartim han de ser útils per a formar ciutadans. Tots els elements i estaments que participen per a fer possible l'educació d'avui estan implicats en aquests canvis, però segurament els reptes més complexos es plantegen als docent que al final són els que entren a les aules i treballen directament amb els alumnes. Per tant, tenim una especial responsabilitat en que aquest projecte educatiu es faci realitat. D'entre els diferents fronts als que s'ha de respondre nosaltres en aquesta ponència abordarem només el que fa referència als tipus d'activitats i a la seva gestió. He triat aquests perquè afecten directament a l'alumnat i per una altra banda és una responsabilitat inexcusable del professorat. És el professorat qui decideix quina tasca vol proposar als seus alumnes i com la vol gestionar.

Per això és al professor al qui li correspon saber diferenciar entre una tasca que promou el desenvolupament competencial d'aquelles que el promouen menys. Per exemple entre aquestes dues propostes:

Tasca 1: Calcula el volum d'un con que té un radi de 3 cm i una alçaria de 4 cm.

Tasca 2: Dissenya i construeix un con de 200 cm3 de volum.

El professorat sap que per desenvolupar les competencies matemàtiques és més eficient la segona que la primera. Per a poder prendre aquestes decisions s'ha de tenir una idea clara el que significa la competència matemàtica. Podem trobar algunes idees als mateixos decrets del currículum6 però també pot ser útil aprofitar els treballs que ja estan fets i es poden trobar als documents de les proves PISA i també a Niss(2003) i d'altres com Alsina (2010) Sol, Giménez i Rosich (2007). Però poder millor és referir-se a a les competencies matemàtiques que apareixen al projecte KOM dirigit per Niss ja que la majoria s'han inspirat en elles. En ell s'estableix que la competència matemàtica es reconeix a través de vuit competències que són:

- Pensar matemàticament
- Plantejar i resoldre problemes
- Modelització matemàtica
- Raonament matemàtic
- Representació matemàtica d'objectes i situacions
- Manipular simbols i formalismes matemàtics
- Comunicar idees matemàtiques
- Ús d'ajudes i eines

Entre totes elles hi ha un reconeixement de la comunitat d'educació matemàtica de que la modelització és de les més complexes i de més interès educatiu. De fet la importància donada a la modelització no és nova, ja des de els anys 70 del segle passat la relació entre las matemàtiques i el món real ha sigut un tema prioritari per a l'educació matemàtica, com es pot veure revisant els programes de les principals conferències internacionals Icme, Ictma o CERME per citar-ne algunes de les més importants. És significatiu que la primera conferencia ICTMA (International Conference Teaching Modelling and applications) va ser l'any 1983.

En alguns països aquest interès es va reflectir en els currículums i en els llibres de text que van incorporar propostes en aquesta línia. Però, al principi dels anys 90, es constatava que malgrat aquest interès i els esforços realitzats , aquest tipus de tasques no van arribar a generalitzar-se i a poc a poc es van deixar de proposar a les aules. Alguns investigadors van analitzar les causes d'aquestes dificultats per portar-los a la pràctica (Blum & Niss, 1991).

Cap a finals dels anys 90 es va recuperar l'interès per portar a les aules de tots els nivells educatius les activitats d'aplicació i modelització i que pocs anys més tard es van accentuar, a partir de les proves PISA por una banda i la incorporació de les competències com objetiu educatiu per una altra. Però la seva generalització continua resistint-se ja que no s'han superat del tot les antigues dificultats per portar-les a les aules i alguns investigadors continúen resaltant la distància que actualment existeix entre els ideals educatius i la realitat del dia a dia a les aules de matemátiques de tot el món (Blomhoj & Kjeldsen, 2006; Burkhardt & Pollak, 2006).

A nivell de l'estat espanyol es coneixen alguns treballs a nivell universitari, per exemple Alsina (2001, i 2007), Gómez (1998, 2002) i Montero (2008). A nivell no universitari el Grup Vilatzara es va interesar per les aplicacions matemàtiques a la realitat al final de la

[6] Decret 111/2007 per primaria decret 112/2007 per secundària de la Conselleria d'Educació de la Generalitat Valenciana. Real Decreto 1513/2006 i 1631/2006 del Ministerio de Educación y Ciencia

década dels 90 (Grup Vilatzara, 2001 a, b) . En aquells primers treballs es troben l'origen dels Projectes Matemàtics Realístics que presento en aquesta ponència. Actualment el currículum actual de la ESO en la Comunitat Valenciana recull aquest repte i assenyala explícitament que un dels objectius de les matemàtiques és *Aplicar amb soltesa i adequadament les ferramentes matemàtiques adquirides a situacions de la vida diària.* i també es troben referències a les apliacions a la vida diaria als objectius 4,5,6,i 8. [7]

1. ELS PROJECTES MATEMÀTICS REALÍSTICS

Desde fa més de 15 anys que proposo als alumnes de secundària tasques de modelització matemàtica. Per això hem disenyat una tasca que hem anomenat Projectes Matemàtics Realístics (PMR) (Sol, 1998 , G. Viltzara, 2001). Entenem que els PMR són activitats de llarga duració, riques en matematització, que començant des d'una perspectiva real promou processos de modelització, seguint l'esquema clàssic de la modelització, i autonòmia en els alumnes (Sol & Giménez, 2004). El principal objetiu d'aquest tipus d'activitats és que els estudiants desenvolupin les competències modelitzadores (Blomhoj & Jensen, 2003) requerides per abordar situacions problemàtiques de la realitat. Situacions que estan relacionades amb la seva vida personal i són d'interès per als alumnes, com per exemple l'institut, l'esport, la ciutat, l'ecologia o l'economia. Aquest desenvolupament es porta a terme durant unes 6 setmanes. Durant aquest temps els alumnes treballen en grup i amb una gran autonòmia ja que han de prendre les seves propies decisions sobre quins problemes abordar i amb quin nivell d'aprofundiment tractar-los

2. METODOLOGIA I GESTIÓ DELS PMR

Per a portar a la pràctica els PMR podem diferenciar tres etapes o fases, la de definició, la de desenvolupament i la de comunicació.

FASE 1: DEFINICIÓ

A la definició del projecte podem distingir tres moments, la formació del grup, la selecció del tema i la formulació de les preguntes que han d'orientar tot el treball posterior.

El grup ideal és de tres alumnes, excepcionalment pot ser de dos o de quatre i es deixa que el formin lliurament entre ells. A la pràctica el professorat ha d'intervenir per assegurar que es respecten aquests criteris. L'organització i funcionament del grup ha de ser tal com es recomana a la teoria d'aquesta manera de treballar. D'aquesta manera d'un grup classe amb uns 24 alumnes surten uns 8 grups de tres alumnes cadascún, quantitat raonable per a gestionar després el seguiment i acompanyament dels alumnes al llarg del procés de realització.

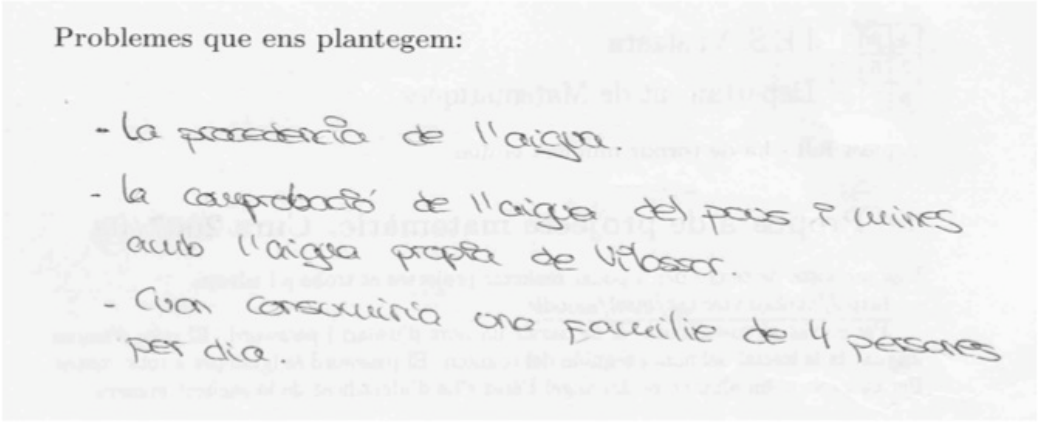
Per la selecció del tema es facilita als alumnes un llistat amb diferents propostes de projectes. Estan classificats per qüestions relatives al poble on viuen (Vilassar de Mar), societat, economia, ecologia. Des cada proposta es posa 4 ratlles suggerint algunes possibilitats. La idea és que aquest llistat no és més que un disparador d'idees i per tant no es tracta de que els alumnes seleccionin forçosament un dels temes proposats, sinò de que en triïn i es facin seu un. Això és, que els alumnes triïn un que ja sigui tal com està presentat, o a partir del que es diu ells facin la seva proposta particular donant-li l'orientació que a ells els interessa. També s'accepta que els alumnes deixin de banda el

[7] Diari Oficial de la Comunitat Valenciana núm. 5562 del 24/07/2007 pàgina 30554

llistat proposat i en facin ells la seva pròpia proposta. El que sí és important és escoltar-se'ls perquè a part de que ens facilita la incorporació de nous temes que els interessa als alumnes, a més a més es promou el protagonisme de l'alumnat des del primer moment de la realització del projecte. En general tractem de traspassar la idea de que a qualsevol àmbit de la vida les matemàtiques ens poden ajudar a comprendre'l millor i a preveure comportaments. Per això hem d'acceptar qualsevol proposta que els alumnes ens facin.

Una vegada seleccionat el tema ve la part més difícil i de més trascendència per a la realització del projecte que és el plantejament del problema. Normalment costa una mica perquè no tenen massa costum de fer-se preguntes. Com a suggerència se'ls proposar de fer una mirada matemàtica sobre el tema que s'han plantejat, això és sobre formes, quantitats, mesures, patrons, canvis, optimització... A partir d'aquí esperem que reflexionin i es plantegin qüestions. Però les preguntes no poden ser de qualsevol manera, és a dir, ni poden ser que vulguin resoldre problemes de gran complexitat que desbordin els seus coneixements de matemàticas com per exemple estudiar si un avió pot volar amb un motor de menys, ni que sigui trivialitats que es responguin fent una simple operació o una consulta a una font d'informació com per exemple que em costa anar a Barcelona en tren durant una setmana. De totes maneres s'haurà de tenir en compte el nivell de coneixements i habilitats del grup que ho proposi i el professor tindrà els seus arguments per acceptar-ho o no.

Per a facilitar-ho podem seguir diferents estratègies. Una és que les formulin per escrit al professor i aquest se les miri i respongui també per escrit. Així per exemple un grup que s'havia plantejat un projecte sobre el consum de l'aigua va proposar les següents preguntes:


Problemes que ens plantegem:

- La procedència de l'aigua.
- La comprobació de l'aigua del pous i rius amb l'aigua pròpia de Vilassar.
- Cuan consumirà una familia de 4 persones per dia.

El problema que orienti el projecte no pot ser *quina és la procedència de l'aigua de Vilassar?* perquè sembla massa trivial i no té interès matemàtic. Però en canvi la última de les preguntes que es formulen *Quanta aigua consumirà una familia de 4 persones al dia?* sí que pot tenir interès per a enfocar un projecte. Aleshores el professor els respon amb algunes reflexions fent veure que les dues primeres preguntes no són de les que els faran plantejar-se un bon projecte i en canvi sí la tercera.

En cap cas el professor els retorna la pregunta feta, és el que diem l'acompanyament a distància que fa el professor. Normalment per aconseguir bons problemes serà necessari que aquest intercanvi de preguntes i respostes es doni suficients vegades fins aconseguir unes preguntes que serveixin per orientar el treball, que no siguin ni massa trivials ni massa pretensioses. Aquestes preguntes tene per finalitat enfocar l'inici del projecte, però després mentre es desenvolupa el treball poden reformular-se i fins i tot canviar-se. De fet a la pràctica sovint passa així. Aquest manera de procedir no ocupa hores de classe però allarga uns dies l'inici del projecte .

Una segona estratègia per aconseguir aquests problemes és començar igual que abans demanant als alumnes que plantegin ells la seva pregunta. i a partir de la seva resposta el professor els retorna una proposta amb 3 ó 4 preguntes que poden servir per iniciar el treball de les que els alumnes han de seleccionnar 1 ó 2. Aquests problemes que proposa el professor han de estar relacionats amb el que els alumnes han proposat conservant en la mesura de lo possible l'orientació que li han donat els mateixos alumnes. D'aquesta manera escurcem el procés de concretar aquests problemes inicials, es manté un cert grau de protagonisme de l'alumnat ja que inicien el procés amb la seva proposta, el professor fa la seva rèplica però respectant els interessos dels alumnes i finalment els alumnes trien el o els problemes que enfocaran el seu projecte.

Si com hem dit en un grup classe hi ha 8 grups de treball amb 8 projectes diferents, el professor pot donar les respostes a cada projecte una darrera l'altre presentades amb un programari de presentacions a on a cada diapositiva es posa la proposta que fan els alumnes i la resposta que dóna el professor. A a figura 1 es pot veure un exemple de una diapositiva a les preguntes que es plantejaven un grup per fer un projectes sobre es olimpíades.

Aquesta manera de treballar és especialment útil quan els alumnes encara no han fet mai un projecte i per tant no entenen ben bé que se'ls està demanant. Ens estalvia temps i ens permet començar rapidament el projecte.

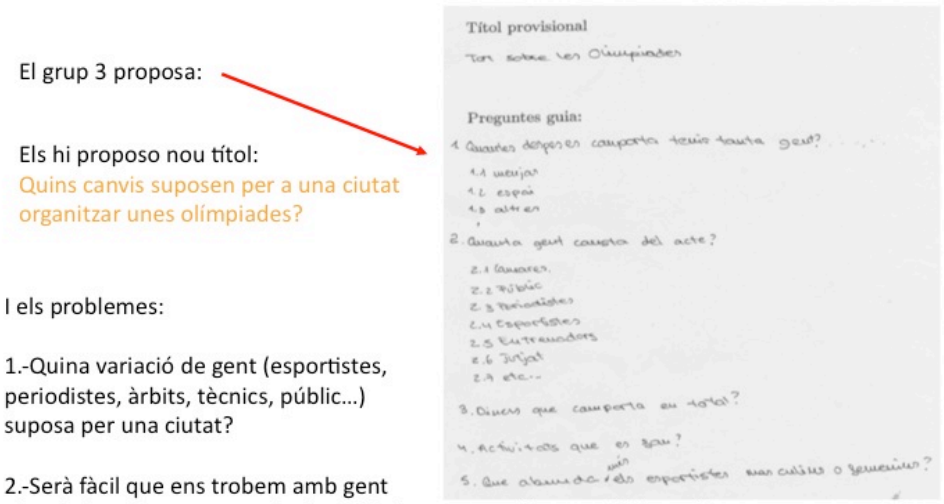


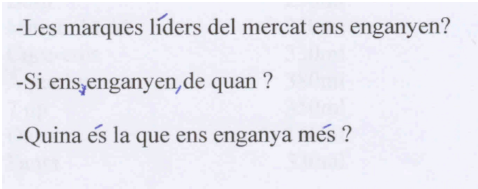
Figura 1

Una tercera estratègia per aconseguir formular els problemes inicials és mitjançant una pluja d'idees. Cada grup d'alumnes arriba a classe amb el seu full d'inici del projecte amb el tema i la seva proposta de preguntes. El professor recull les diferents propostes i començant per una d'elles escriu a la pissarra el tema i les preguntes que proposen. A continuació dóna la paraula a un representan del grup per a que expliqui per què han triat aquest tema i han formulat aquestes preguntes i afegir els aclariments i noves propostes si ho vol fer. Seguidament la resta del grup classe pot participar dient les idees que se li pasin

pel cap sobre el tema proposat. El professor ho va recollint tot a la pissarra, encara que d'entrada pugui semblar que se'n va fora del tema. Al final s'organitzen les propostes, s'agrupen les que tinguin coses en comú, així per exemple tot el que faci referència a aspectes econòmics per una banda, tot el que sigui disseny i geometria per una altra, càlcul de variacions per una altra etc. Al mateix temps s'intenta formular en preguntes que aglutinin els diferents aspectes que han sortit. Aquelles que no tinguin interès quedaran excloses. El grup que li correspon recull totes aquestes propostes i després en un full presenta les seves preguntes definitives.

Aquesta manera de fer és la més rica, la que surten més propostes i tot l'alumnat participa. Té l'inconvenient de que s'allarga una mica en el temps ja que poden necessitar-se unes dues hores per a fer tots els grups de la classe.

L'experiència ens mostra que si el tema dels projectes el proposen els mateixos alumnes perquè és alguna cosa que els preocupa en ells les preguntes surten bé a la primera proposta que fan. Per exemple un grup de 2n d'ESO va voler fer un projecte per investigar si els fabricants de refrescs posen les quantitats de beguda que diuen en el envàs o bé els enganyen. Amb aquesta preocupació van plantejar-se directament aquestes preguntes:



Deixant a banda l'ortografia, que això és una altra qüestió, les preguntes tal com les formulen ja són útils per a començar el projecte.

Sigui quina sigui l'estratègia que es segueixi per aconseguir la formulació dels problemes inicials aquesta fase s'acaba quan cada grup presenta el fulll d'inici del projecte amb la proposta de cada grup i la signatura d'autorització del professorat donant el vist i plau per començar el treball amb els problemes formulats.

FASE 2: DESENVOLUPAMENT.

A la fase anterior els alumnes s'han plantejat un problema real. En aquesta fase, han de matematitzar-ho i resoldre'l. Podem destacar com el més característic del procés el reconèixement de les variables que intervenen i les seves relacions, la simplificació de la situació, l'obtenció de dades i la decisió dels valors d'algunes de les variables l'expressió d'aquestes relacions en llenguatge simbòlic i la interpretació de les solucions. Pel que fa al professorat i la gestió de la tasca el més característic són les reunions de seguiment. Com que els alumnes no tenen el costum de fer aquestes coses els resulta difícil.

Un dels procesos que més els costa als alumnes és reconèixer a la realitat les variables que intervenen en la situació que analitzen. Així per exemple un grup es panteja un projecte sobre el bar de l'institut en el que pretenen redissenyar les taules i la seva distribució per aconseguir que hi capiga més gent. En aquest cas, el procés que ha de portar aquest problema cap el món matemàtic, el que es coneix com la matematització horitzontal (Treffers, 1987), els ha de fer veure les taules rodones com a cercles on les seves dimensions depenen del nombre de persones que es vulguin posar i de la longitud de taula que necessita una persona per a dinar i tot això al final definirà el radi del cercle. A més a més haurà de tenir present els espais que es necessiten per seure i aixercar-se. A aquest procés él que diem que és el reconeixement de les variables i les seves relacions.

La simplificació es fa per acotar el problema a l'àmbit de les possibilitats dels alumnes. Es refereix a la restricció de l'àmit de possibilitats. Així per exemple el projecte que havia de plantejar-se un aprofitament millor de l'espai de la bibilioteca va acabar sent el mateix però només d'una de les sales que hi ha. També es refereix a no tenir en compte algunes variables que intervenen en la situació. Per exemple en un altre treball sobre les Torres de guaita en el que els alumnes havíen de calcular el temps que trigaven els vaixells del segle XVI en arribar a la costa des de que els veien aparèixer per l'horitzó van acordar agafar un valor mitjà dels vaixells de l'època i no tenir en compte les forces dels vents. Un altre exemple de simplificació és en el treball de trobar la posició òptima per a xutar a la porteria des de una recta pararl·lela a la banda lateral de l'estadi i situada a 2m etres d'ella. Per fer-ho bé, es tracta d'un problema de optimització on intervé una funció trigonomètrica. Els alumnes de 1r d'ESO ho han pogut fer perquè s'ha simplificat el problema, En lloc de triar la posició òptima han buscat quina es la millor posició d'entre les 5 ó 6 que ells han buscat. En lloc de fer-ho per trigonometria ho han fet mesurant els angles amb un transportadors d'angles sobre un dibuix de l'estadi fet a escala i aleshores per semblança han pogut trobar la millor posició. Un altre exemple de simplificació és en el projecte que tracten de establir quin és l'esport més cansat. En primer lloc defineixen quins són els esports que estudiaran i després quin serà l'indicador que faran servir per establir comparacions de cansament. Van fixar que seria el nombre de pulsacions mesurades després de 5, 10 i 15 minuts de pràctica esportiva sense entrar en cap altre consideració.

L'obtenció de dades és una altre qüestió que no sempre els resulta fàcil , sovint s'ha de recorrer a recursos imaginatius. En un projecte que els alumnes es plantejavan la proporció entre suc i la resta de la fruita havien de calcular el volum que ocupa una taronja, els alumnes van fer-ho omplint un recipient graduat fins a una alçada determinada i després sumergir una taronja i mesurar el nou l'alçada. Per diferencia dels dos registres es pot saber amb força exactitud quin és el volum de la taronja (figura 2).



Figura 2

Internet també és una molt bona font d'informació que els alumnes saben fer servir. Posem per exemple el projecte sobre l'IPC on els mateixos alumnes ens expliquen com van obtenir les dades:

> *Llavors vam tenir dues idees la primera va ser demanar al supermercat tota la llista de preus de tots els productes i l'altre va ser la magnífica idea de buscar-ho a Internet a les webs dels supermercats*

Una altra idea per a recollir dades és fer servir la càmara de video. És el que van fer un grup d'alumnes de 1r d'ESO que estavan estudian els rebots de les pilotes de tennis. Així és com expliquen la seva recollida de dades:

> PROCÈS DE L'EXPERIMENT:
>
> Primer enganxem el paper a la paret. Tot seguit agafem una de les tres pilotes i la llencem des de 1 m, 1'1 m, 1'2m, 1'3m i 1'4 m a una de les pistes elegides, mirem el vídeo per saber fins a on ha arribat el rebot, ho marquem al paper i ho mesurem amb la cinta mètrica. Així ho hem fet amb les 3 pilotes i les 3 pistes.

Aquest mètode va funcionar força bé i va permetre d'obtenir les dades molt coherents.

Al final del procés cal interpretar els resultats, això és donar sentit en el context real a les solucions matemàtiques que han obtingut. Per exemple en el projecte sobre el bar de l'institut al final arriben a la solució de que els hi caben 4 files de taules però se'n adonen de que si tinguessin 15 cm de més podrien afegir una cinquena fila, millorant així la solució i que si treiessin 1,5 cm de cada banada a cada una de les taules que han posat els hi permetria d'inquibir la cinquena fila. D'aquesta manera els estudiants mostren que han reconegut el significat i abast de les solucions en el context real en el que treballen.

Els alumnes no poden fer tots aquests procesos de matematització de manera autonòma sinò que necessiten l'ajuda del professorat. Aquesta ajuda es dóna a través de les reunions de seguiment on el paper principal del professor és escoltar com es plantegen els alumnes el seu projecte, com pensen abordar-ho, com descobreixen la presència de les matemàtiques en la sitació que es plantegen, que volen fer, amb quines dades, com les obtindran. La resposta del professor ha de ser la mínima per a que els alumnes puguin avançar en el seu treball de manera autonòma. Una estratègia és la de plantejar-los preguntes sobre el seu treball. Quan realment es troben atascats perquè tenen massa dificultats i no poden seguir endavant, el professorat pot fer-los suggerències de com avançar. Per exemple en el cas de les fruites va ser suficient suggerir-los que fessin servir un recipient amb aigüa i en el de les pilotes de tennis de fer servir la càmera de video.

Aquestes entrevistes de seguimnent és bo fer-ne una al començament per facilitar l'inici del treball i una altra cap al final per revisar que el projecte està ben acabat. Cada revisió d'aquestes pot ocupar unes dues hores de classe.

En aquesta manera d'actuar del professorat s'ha de veure que el paper que fa és diferent al tradicional en una classe expositiva. En alguns moments és un col·laborador més del grup, ja que no sempre té la solució preparada pel que li puguin plantejar i es troba obert a que el puguin sorprendre amb qüestions que no tingui previstes.

FASE 3: COMUNICACIÓ

Aquesta fase és molt important ja que han de poder mostrar tot el procés que han seguit, des del que s'han plantejat, el desenvolupament i les conclusions a les que han arribat. Aquesta comunicació és doble per una banda en un dossier escrit i per una altra fan una comunicació oral als seus companys de classe. Tant per a un per com per a l'altre se'ls hi dóna una pauta per a que facin una comunicació coherent.

Als alumnes els costa molt posar per escrit les seves idees, els seus raonaments, les seves justificacions de per què han fet les coses com les han fet. Una anàlsi més detallada de com els alumnes fan la comunicació escrita es pot veure a Sol (2010).

La comunicació oral dura uns 10 minuts per a cada grup, la fan amb el suport d'un programa de presentacions. Al final els assistents poden plantejar preguntes als que han fet l'exposició.

3. PER CONCLOURE

Les idees principals que hem tractat d'exposar són que les competències venen a millorar l'aprenentatge de les matemàtiques dels nostres alumnes. La competència modelitzadora està considerada com la de més alt nivell d'educació matemàtica. Això implica: una modificació sobre el que és saber matemàtiques, un canvi en les tasques proposades a les aules, i una nova manera de gestionar la classe. El repte és molt exigent i necessitem l'aportació de bones pràctiques i bones experiències de tothom.

Els PMR són una proposta per promoure la modelització de situacions reals amb alumnes de l'ESO.

BIBLIOGRAFIA

Alsina, C. (2001) Mathematical Modelling by means of functional equations: The missing link in the learning of functions. A J.F. Matos, W. Blum, K. Houston, Carreira, S. P. (eds.) *Modelling and Mathematics education: ICTMA 9 Applications in science and technology* 300-310. Chchester: Horwood Publishing Limited.

Alsina, C. (2007) Less chalk, less words, less symbols...more objects, more context, more actions. A W. Blum, P.L. Galbraith, H-W. Henn i M. Niss *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* 35-44 Sprnger.

Alsina, C. (2010) Matemàticas para la ciudadanía. A M.L.Callejo, J.M. Goñi (coords.) *Educación matemática y ciudadanía*. Graó. Barcelona

Blomhoj, M. & Kjeldsen, T.H. (2006) Teaching Mathematical modelling through project work- experiences from an in service course for upper secondary teachers. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 38, 163-177

Blum, W. & Niss, M. (1991) Applied mathematical problem solving, Modelling, Applications and Links to other Subjects- state, trends, and Issues in Mathematical Instruction. *Educational Studies in Mathematics* 22, 37-68

Burkhardt, H. & Pollak H. (2006) Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developements and future. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 38, 178-195.

Gómez, J. (1998) *Contribució a l'estudi delsprocessos de modelització a l'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques a nivell universitari*. UAB Tesi doctoral.

Gómez, J. (2002) *De la enseñanza al aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Paidós

Grup Vilatzara (2001 a) Proyectos en la ESO. Una actividad rica. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 27, 21-36

Grup Vilatzara (2001 b) Experiencias sobre proyectos e investigaciones matemáticas en secundaria. *Revista Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas. Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas* 46, 29-46.

Montero, J. A. (2008) *Hacia una metodología docente basada en el aprendizaje activo del estudiante presencial de ingeniería, compatible con las exigencias del E.E.E.S.* Universitat Ramon Llull. Tesi doctoral.

Niño, S (2009) *El crash de 2009. Toda la verdad sobrela crisis*. Debolsillo. Barcelona

Niss, M. (2003) Mathematical Competencies and the learning of mathematics : The danish KOM Project. in Gagatsis, A. & papastavridis, S. (eds.) *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* 115-124. Athens, Greece: Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society.

Sol, M. Giménez, J. (2004) Proyectos matemátixcos realistas y resolución de problemas. A J. Giménez, L. Santos, J.P. da Ponte (coords.) *La actividad matemática en el aula. Homenaje a Paulo Abrantes,* 35-57. Barcelona: Graó Editorial. Biblioteca de UNO 204.

Sol, M. Giménez, J. Rosich, N. (2007) Competencias y proyectos matemáticos realistas en la ESO. *UNO* 46, 43-60.

Sol, M. (2010) Processos comunicatius i de representació en projectes matemàtics realístics. a N. PLanas (coord.) *Pensar i comunicar matemàtiques.* Fundació Propedagògic. Barcelona.

Treffers, A. (1987) *Three dimensions. A model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction The Wiskobas Project.* Dordrecht. Kluwer Academic.

MATERIALS MANIPULABLES I VIRTUALS: UNA RELACIÓ CONSTANT ENTRE RECURSOS PER A L'ENSENYAMENT DE LES MATEMÀTIQUES

David Barba
Cecilia Calvo
Universitat Autònoma de Barcelona

0. INTRODUCCIÓ

Els materials manipulatius van tenir la seva eclosió als anys 80 i d'una manera o una altra han estat presents a les aules de Matemàtiques. Actualment sembla que han anat guanyant importància de nou, precisament ara que les noves tecnologies tenen cada cop més presència a les nostres aules. Això fa que ens plantegem la pregunta sobre quina és la relació que hi ha entre l'ús de materials manipulatius i les noves tenologies, pel que caldrà reflexionar sobre tres aspectes: l'us dels materials manipulatius a l'actualitat, les relacions possibles que es poden establir entre els materials i les noves tecnologies i finalment la necessitat de crear espais d'informació i recursos que serveixin de consulta o guia els materials manipulatius del professorat, en el nostre cas la pàgina web del projecte "espai jordi esteve"

1 ELS MATERIALS MANIPULATIUS

Podem dir que l'ús de Materials manipulatius ha acompanyat a la generació que ara ronda els seixanta des del primer dia que vàrem començar a parlar de didàctica de les Matemàtiques. L'exposició que P.Puig Adam va organitzar al respecte als anys 50 va ser una demostració de com es podien fer les coses. A la dècada dels 80 podríem dir que es va produir l'explosió del seu ús i que les cases comercials estrangeres van apostar pel producte creant catàlegs amb ofertes de tot tipus, que fins i tot van motivar algun viatge per adquirir-los, per no parlar de les aules o laboratoris de material que es van crear en diferents llocs d'España. Com tot va haver-hi un moment en el que es va fer marxa endarrere i van desaparèixer del mapa, o si més no dels debats o propostes que es plantejaven en els fòrums de didàctica. No sabem per quina raó des de fa uns anys han experimentat una revifalla que fa que en tornem a parlar, ara, al segle XXI en un món en el que fins i tot la majoria d'abraçades són virtuals i per tant cal pensar on els hem de col·locar, quin és el seu paper i com els relacionem amb les noves tecnologies

1.1. QUIN ÉS EL PAPER DE LES NOVES TECNOLOGÍES EN RELACIÓ AMB ELS MATERIALS?

En finalitzar la ponència, a manera de resum i per guiar les possibles preguntes l'ultima transparència volia posar de manifest les diferents relacions establertes que s'havien explicat en les explicacions dels diferents materials. Ens ha semblat que en un escrit era millor posar-ho al davant

1. Donen accés a l'ús de **simuladors**
2. Ofereixen la possibilitat de fer "**versions casolanes"** imprimint certs materials virtuals
3. Representen una gran **font de recursos**, ja que forces cops els "applets" presenten llistes d'activitats a fer que podem portar a classe, sigui utilitzant canó i pantalla, sigui utilitzant pissarra, guix i llibreta

4. Permeten **il·lustrar** el seu ús mitjançant vídeos o animacions, com per exemple en el moment de donar instruccions sobre l'us d'algun instrument
5. Faciliten **l'ampliació del banc de materials** a partir d'imatges,
6. **Donen accés a propostes** didàctiques associades a un material
7. **Faciliten les presentacions globals**: classes col·lectives en el que el material es simula en pantalla.
8. Permeten el **treball virtual amb materials difícils de trobar**
9. I finalment, ofereixen la possibilitat de **comprar materials via internet**

1.2. EL PROJECTE "ESPAI JORDI ESTEVE" (EJE)

Aquest projecte intenta donar a conèixer, publicitar i oferir recursos i propostes per facilitar l'us de materials manipulatius als centres docents.
Per iniciar aquest treball es van recuperar, organitzar i classificar els materials de l'antic "Laboratori de Matemàtiques" que té el Departament de Didàctica de la Matemàtica de la UAB i que va ser començat als anys 80, arribant al seu punt màxim a l'any 1998 amb la publicació d'un catàleg, ara recuperat i penjat a la xarxa
http://issuu.com/espaijesteve/docs/cataleg

Els materials manipulatius van ser classificats en tres grans famílies
1. Materials didàctics
2. Instruments de càlcul, mesura, dibuix
3. Jocs de coneixements i estratègies

Posteriorment va sorgir la gran pregunta: com ha de ser un "laboratori de matemàtiques" (o aula de material, al segle XXI i és quan decidim fer la pàgina web, és a dir un catàleg virtual, afegint recursos que ajudin als professorat a desenvolupar les seves classes i que trobareu a http://edumat.ub.cat/materials.



Aquests materials estan presentat en "famílies" on dintre de cadascuna es poden trobar diferents materials acompanyats d'un fitxa on hi ha la descripció, recursos per imprimir, links a pàgines que ens permeten trobar simulacions o demostracions de l'us dels materials, completat amb algunes propostes d'activitats.

1.3. MATERIALS PRESENTATS A LA PONÈNCIA

En la ponència s'exposen uns materials determinats i s'associa a cadascun d'ells alguna de les característiques , ja comentades, que l'aportació de les noves tecnologies pot implicar, . Per altra banda cal dir que les activitats explicades en la presentació dels materials han estat realitzades amb alumnes de primària, secundària, o Magisteri en els últims dos anys. Volem dir amb això que no estem fent un recull d' activitats històriques, sinó classes fetes actualment.

Avís pels lectors que no ven estar a la ponència: cada cop que en aquest la ponència es feia referència a un link, proposta de treball, simulació etc, obríem la pàgina de l'eje i com a suport. És per aquesta raó queen aquest escrit no hi surten els links , atès que si us interessa consultar-ho trobareu la informació sobre cadascun dels materials tractats a la pàgina de l'eje, on hi trobareu totes les connexions i recursos explicats.

2. PRIMERA SESSIÓ

A partir de la presentació de diferents materials, anirem reconeixent les relacions exposades anteriorment posant en el títol al costat del nom del material i entre parèntesi, un dels papers de les noves tecnologíes. En aquesta primera sessió ens centrem en l'apartat "nombres" on analitzem els següents materials: instruments antics de càlcul, graella del 100 i l'àbac de punxes, per acabar amb un taller de probabilitat.

2.1. INSTRUMENTS ANTICS DE CÀLCUL

Saber com históricament les diferents cultures han anat buscant i trobant maneres àgils de calcular i conèixer enginys que han anat apareixent fins arribar a les actuals calculadores hauria de formar part del coneixements dels nostres alumnes, i no solament per l'aspecte històric sinó perquè els ajudaria a entendre moltes coses. Presentem tres instruments: la calculadora de manovella, els reglets de Napier i el regle de càlcul.



2.1.1. CALCULADORA DE MANOVELLA (SIMULACIONS)

La calculadora de manovella, ens pot portar a descobrir la multiplicació com a suma iterada, la propietat distributiva, lligada amb el moviment del carro, o les estratègies utilitzades per certes multiplicacions, com per exemple si volem multipilcar 368x199, enlloc de donar 199 voltes a la manovella, podem donar-ne solament dues, posant el carro en la posició de les centenes, i una al revés en la posició de les unitats. Com que és complicat de vegades trobar-ne, amb una foto i la simulació podem treballar amb comoditat. Existeix una simulació fantàstica (la que es va mostrar a la classe) que recomanem visitar, la trobareu a la fitxa de l'eje.

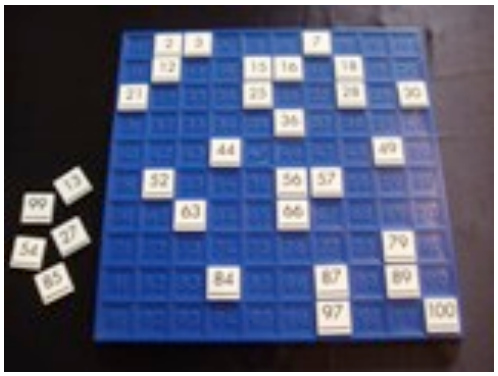
2.1.2. Reglets de Napier (il·lustrar mijançant vídeos o animacions)

John Napier matemàtic escocès (1550-1617) conegut pel seu treball l sobre els logaritmes que va facilitar moltíssim els càlculs sobretot als astrònoms, també es preocupava per trobar algun enginy que facilités els càlculs més bàsics. En aquest sentit va inventar unes regletes que servien per multiplicar de manera fàcil: una col·lecció de prismes amb nombres que inspirats en l'antiga multiplicació en reixa permetien fer multiplicacions . Un vídeo i una animació ens permeten "explicar" el seu funcionament a classe. A més a l'eje podeu trobar una activitat concreta preparada per fer a classe a tercer cicle de Primària o primers nivells d'ESO.

2.1.3. Regle de càlcul (possibilitat de fer versions casolanes)

El regle de càlcul va ser un Instrument ser molt utilitzat en les professions tècniques, fins l'aparició de les calculadores. A la xarxa trobem una proposta de construcció casolana d'un regle de càlcul que considerem força interessant. Tot i que ara està "fora de joc" esbrinar el seu funcionament a classes de secundària ens pot portar a discussions interessants.

2.2. Graella del 100 (presentacions globals, possibilitat de pràctica)



L'organització de la sèrie dels nombres fins al 100 en una graella és un recurs que ofereix moltes possibilitats i que d'entrada presenta un punt de discussió: comencem pel 0 o per l'ú? I sembla que la resposta pot ser: per nivells baixos s'acostuma a utilitzar la del 0 al 99 pel fet que les desenes queden distribuïdes en la mateixa fila, mentre que la de l'1 al 100 és la més freqüent a les publicacions i per tant cal acostumar-s'hi. Pel que fa a possibles activitats, apart del dictat de nombres (0-100) projectant-la en una pissarra amb canó o retroprojector) on els alumnes han de marcar el nombre dictat, o pot ser un model excel·lent per fer sumes o restes movent-se sobre ella, el que recolza les estratègies de càlcul mental.

Si anem a nivells més alts, podem fer pintar el múltiples d'un nombre el que ens dona diferents distribucions espacials, per exemple els múltiples de 2 i de 5 es distribueixen en columnes, mentre que els de 3 ho fan en diagonal, el que ens entra al món de les regularitats. A més, ens permet proposar petites investigacions com per exemple estudiar com es distribuirien els múltiples si enlloc de 10 columnes n'hi haguès solament 9 (per exemple). És especialment interessant veure la disposició dels nombres primers en una graella de sis columnes.

Per altra banda realitzar el garbell d'Eratóstenes per trobar els nombres primers, amb un canó i una pantalla, o projectant sobre una pissarra (aleshores els nombres de la transparència haurien d'estar en blanc) ens facilita la classe col·lectiva.

2.3. L'ÀBAC DE PUNXES (ELS APPLETS COM A BANC DE RECURSOS)

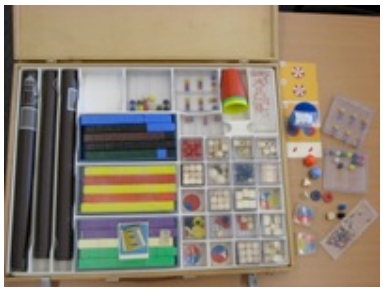
Anomenem així a aquell tipus d'àbac que ens permet entrar boles quan vulguem en contrapartida al que les presenta tancades i no es poden treure això ens permet formular preguntes interessants lligades amb el sistema de numeració decimal.



Podeu trobar un simulador virtual d'aquest tipus d'àbac a http://www.bgfl.org/bgfl/custom/resources_ftp/client_ftp/ks2/maths/bead/index.htm (7-9-10)
A més del seu paper de simulador presenta preguntes interessants a fer, és per això que diem que funciona com a banc de recursos.

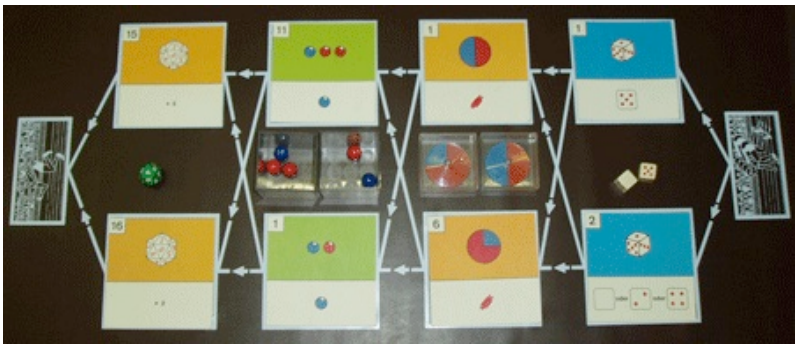
Segurament formula poques preguntes però ens dona idees per fer-ne moltes més. Tal com diu la pàgina de l'eje: "Us recomanem especialment l'apartat "computer questions" que us pot donar interessants suggeriments de preguntes per realitzar en relació a aquest material a les que podeu afegir-ne altres com per exemple: quants nombres diferents podeu escriure sobre aquest àbac de tres punxes fent servir únicament 4 bales?

2.4. TALLER: LA CAIXA DE VARGA (ÚS DE SIMULADORS)



Aquest material ideat pel professor Tamas Varga en els 80, consisteix en una capsa en la que hi ha ruletes, urnes, diferents tipus de daus, cubets encaixables etc, per a poder introduir la probabilitat i l'estadística a partir de nivells baixos de Primària. Incorpora la proposta de sis jocs que ofereixen el context adequat per poder treballar en un ambient de "situacions problema". Per conèixer la caixa treballarem un joc: la cursa de probabilitat (veure eje)

2.4.1. LA CURSA DE PROBABILITAT.



El joc consisteix bàsicament en una cursa en la que en cada casella cal de triar entre dues opcions que es presentes (per exemple una opció és treure un nombre més gran de tres i l'altre un nombre més petit de tres en tirar un dau convencional) el jugador tria posant la seva fitxa sobre l'opció triada i tira el dau, si ho endevina passa de casella, sinó ha d'esperar un torn i tirar de nou.

En aquest cas les noves tecnologies ens ofereixen simulacions, bé sigui per reproduir la partida en pantalla (salvant així la necessitat de disposar de materials per tothom) bé per fer un estudi del joc, on el que cal és estudiar qui és el camí optim. Veure eje.

Finalment i per jugar amb alumnes de cinquè de bàsica també presentem una "versió casolana del joc realitzada imprimint còpies de pantalla, plastificant i retallant les cartes del joc.



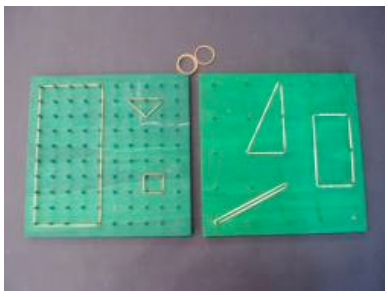
A la fotografia es pot observar el documents utilitzats pels alumnes per realizar l'estudi d'una partida dibuixant, (sense jugar, full de l'esquerra) quin seria, el recorregut idoni per tenir més possibilitats de guanyar, i la justificació de la seva proposta (veure eje).

Podría extranyar el fet de presentar la probabilitat en una sessió de nombres, però deixant de banda que probabilitat, pensem que és un context molt bo per treballar el tema de fraccions: en haver de comparar ruletes estem reconeixent fraccions com a part d'una unitat i buscant la més gran, i si ho fem amb boles i urnes utilitzem el concepte de fracció com a part d'una col·lecció.

3. LA SEGONA SESSIÓ

Dediquem la segona sessió a "l'espai" en la que presentem els materials: Geoplà, Tridio, Tangram i l'assortit de cossos, per acabar amb un taller de cubets encaixables en el que es presenta el joc dels edificis i el tema de visualització i representació de figures en 3D.

3.1. GEOPLÀ ((US DE SIMULADORS, DISCUSSIÓ COL·LECTIVA)

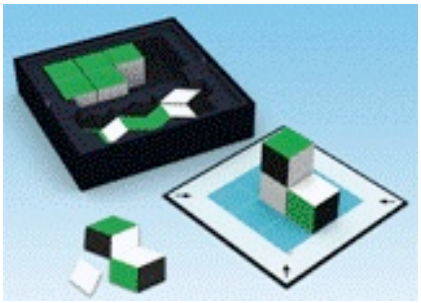


Voldríem incidir, per començar en una característica important que es dóna al treballar en un context de materials: una mateixa proposta pot ser soluciona da amb estratègies diferents segons el nivell del curs en el que estem treballant. Per exemple fer la perpendicular a un segment ja donat com el que veieu a la figura: en cursos baixos els alumnes ho faran a ull, el que ens indicarà si dominen o no la idea de perpendicular, mentre que a cursos de secundària les discussions haurien d'anar per l'aplicació de la idea de pendent i coordenades per resoldre'l.

Pel que fa al material com a "proposador de problemes" és especialment interessant l'activitat de trobar tots els quadrilàters possibles en un geoplà de 9 puntes i que trobareu a l'apartat "propostes" d'aquest material, conjuntament amb fulls per imprimir geoplans, links a simulacions etc.

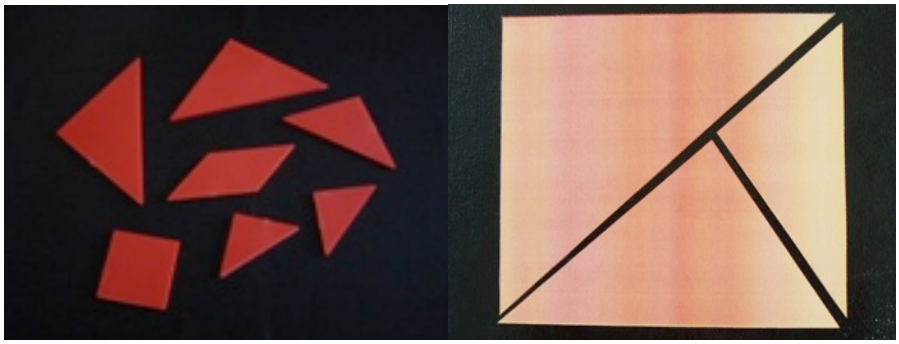
Finalment cal tenir en compte que existeixen simuladors de geoplans isomètrics o circulars que ens eviten haver d'adquirir-los, o transparents que ens permeten treballar amb retroprojector enlloc de canó

3.2. TRIDIO (EL VALOR DELS VÍDEOS)



Un material dels que podríem anomenar "nous" que ens permet relacionar construccions fetes amb cubets amb les seves representacions isomètriques realitzades amb figures planes i que sembla molt interessant per treballar (encara no l'hem provat amb alumnes) la visió del vídeo demostratiu ens ofereix amb menys de dos minuts tota la informació necessària. Val la pena mirar-se el vído penjat a la fitxa del material (eje). Cal dir que aquest material ve acompanyat de multitud de complements, exercicis etc. que fan més fàcil la seva aplicació a classe.

3.3. TANGRAM (MATERIALITZACIONS CASOLANES, APPLETS COM A BANC DE RECURSOS)



El Tangram és un material prou conegut com per fer-ne una presentació, si bé potser no són tant coneguts altres tangrams, com el de Lloyd, l'oval, el de Brugner entre d'altres i que teniu a l'eje. Per tant el que fem és proposar una activitat que de classe: el alumnes disposen de dos tangrams per grup: el de Flechter, de set peces, obtingut a partir d'un quadrat i el de Brugner, de tres, a partir d'un rectangle auri (veure figures) y preguntem amb quin dels dos es poden fer més polígons convexos diferents utilitzant totes les peces. Curiosament i com era d'esperar, venint de gent de matemàtiques, s'en poden fer més amb el de Brugner.

Queden fora d'aquesta explicació les possibilitats dels tangrams en temes com mesura de superfície, fraccions, relacions àrea perímetre, etc.

En un altre ordre de coses i considerant el plegat de paper com a material, és interessant proposar la construcció d'un tangram de Fletcher a partir d'un DINA4 plegant paper, o bé fer-lo dibuixar amb regle i compàs.

Pel que fa a les noves tecnologies, volem incidir en les possibilitats de disposar de recursos, que van des de poder baixar-nos un document imprés per poder retallar i obetir un tamgram per als alumnes o grups que vulguem, simuladors per projectar en pantalla, propostes d'activitats etc.

3.4. Assortit de còssos (Completar informacions a partir d'imatges)





Aquest és un material clàssic que normalment ha estat entre les dotacions del materials que es donaven a les escoles: els còssos geomètrics "oficials" posats en una capsa (figura de l'esquerra). El problema està en que ens quedem en un univers reduït atesa la gran quantitat de poliedres molt més complexos (figura de la dreta) que podem trobar a internet, i que a més podem observar-los tot fent-los girar movent el ratolí per veure totes les cares (cosa que una fotografia no et permet) i fins i tot accedir al seu desenvolupant per si volem construir-ne algún a classe. Disposar d'una bona col·lecció d'aquests poliedres (arquimedians, estrellats etc) sigui en 3D construïts per diferents generacions d'alumnes, sigui en imatges, és una proposta interessant per acostar l'espai a l'escola o al centre, que sense l'ús de noves tecnologIes seria més complicat.

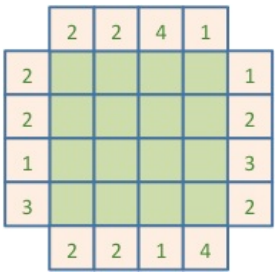
3.5. Taller de cubets encaixables (us de simuladors, versions casolanes)



Quan diem "cubets encaixables" ens referim als també anomenats multilinks o policubs, és a dir uns cubs de plàstic, de diferents colors i de 2cm d'aresta amb un encaix a una de les cares, que permet fer construccions.

Aquest taller presenta dues activitats, un joc que de lluny podria semblar un sudoku, i una activitat de construir una figura de l'espai a partir de tres vistes i que tenen una característica en comú: s'ha invertit el sentit de la relació: enlloc de ser les tecnologies les que simulen el material manipulatiu, construim un material manipulatiu, perquè els alumnes realitzin l'activitat. En el cas del joc per entendre com funciona, construim els edificis , en el cas de les vistes els hi donem els cubets perquè construeixin la figura realment, podent-la mirar des de toes el seus costats.

3.5.1. El joc dels edificis (banc de propostes, versions casolanes)



Tret de la pàgina austríaca (la pàgina està en "idioma complicat" però el Google traductor ajuda força)
http://www.janko.at/Raetsel/Wolkenkratzer/index.htm
i en un primer moment agafat com a divertiment nostre, jugant en pantalla, vàrem decidir portar-lo a classe d'alumnes d'ESO i Primària, però en versió manipulativa que és la que presentem en aquest taller: construim un material manipulatiu amb els cubets encaixables perquè els alumnes aprenguin a jugar-hi: els 16 edificis que composen el joc, i els taulers dissenyas en una quadrícula de 2x2cm, mida de l'aresta del material Multilink (o policubs)

Es juga en taulers com el de la figura, dels quals n'hi ha una col·lecció amb nombres i nivells de dificultat diferents. Per realizar el joc es disposa de quatre edificis de quatre pisos quatre de tres pisos, quatre de dos i quatre d'un (fets amb els cubets) de color diferents entre ells i que s'han de col·locar sobre el tauler seguint aquestes dues normes:

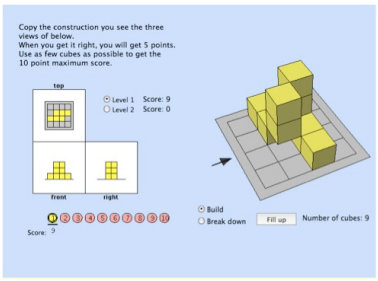
1. Els nombres que hi ha a les caselles indiquen el nombre d'edificis que es veuen des de la posició on està el nombre

2. A cada fila o columna els quatre edificis han de ser de diferent altura.

Aquest tauler és de nivell elemental, a mesura que es va jugant es pot anar complicant la dificultat, per exemple donant solament tres nombres enlloc de tots. Us convidem a provar-lo amb els vostres alumnes.

3.5.2. VISTES (BANC DE PROPOSTES, VERSIONS CASOLANES)

L'applet : www.fi.uu.nl/toepassingen/02015/toepassing_wisweb.en.html



Realitzat per el Freudenthal Institute holandés, presenta una proposta molt interessant en la que demana construir figures amb cubets a partir de les tres vistes que surten a l'esquerra de la pantalla. L'exemple que es veu a l'imatge mostra una l'activitat acabada, al començar la base quadriculada és buida i cal posar els cubets atenen les tres vistes. Les rodonetes de sota les vistes donen accés a diferents figures. Quan un alumne fa la figura correctament, el cercle s'il·lumina de color groc si és que és correcte i de verd si a més ho ha aconseguit amb el mínim de cubets.

Per portar a terme aquest treball amb alumnes de tercer de Primària, la mestra (Anna Cerezo) a l'escola pública de Sentmenat (Barcelona) va fabricar un material manipulatiu a partir de plastificar còpies de pantalla que presentaven l'exercici i que portaven la solució al darrera, una plantilla per fer de base i els cubs multilink. Aquest material és amb el que treballarem en el taller i discutirem la seva utilització a classe.

Cal dir però que al final del procés i treballant ja en pantalla, ens vàrem quedar sorpresos de l'habilitat dels alumnes per resoldre les situacions directament a l'ordinador, i a hores d'ara no sabríem dir si és que la manipulació els va ajudar o que aquestes generacions "nadiues" en el món virtual ja ho viuen com a manipulació. La pregunta és aquesta i suposem que no és fàcil de respondre encara de manera "seria"

4. CLOENDA

Hem intentat posar de manifest la gran importància dels materials manipulatius com ajuda a la construcció del pensament matemàtic per als nostres alumnes. Hem posat exemples tant de Primària com de Secundària, per il·lustrar que els materials no són únicament "pels petits". Hem plantejat que amb les noves tecnologies lluny de desplaçar els materials podem aprofitar les múltiples relacions que es poden establir i hem exemplificats algunes d'aquestes relacions, segur que vosaltres en trobareu més. Volem remarcar que aquesta relació manipulatiu/virtual (tant en sentit informàtic com d'imatge) no s'ha d'interpretar solament com un camí cap a l'abstracció (de manipulatiu a virtual) de manera unidireccional, sinó que ens ofereix un camí d'anada i tornada constant i enriquidor.

Finalment i com a formadors de professorat que som, us hem volgut donar a conèixer el "projecte Jordi Esteve", un equip de treball de mestres, gent de secundària i formadors de professorat que han creat la pàgina web "espai Jordi Esteve" en la que podreu trobar totes les indicacions, links i recursos que hem intentat mostrar-vos en aquestes excel·lents jornades a València.

Barcelona tardor del 2010

GEOMETRÍA DINÁMICA Y ARTE.
AZULEJOS EN EL MUSEO DE ONDA CON GEOGEBRA.

José Antonio Mora
IES San Blas. Alicante
Grupo G4D

0. INTRODUCCIÓN

Esta es una experiencia realizada por los alumnos del IES Sant Blai de Alicante durante el curso 2009-10.

1. PLANTEAMIENTO

El trabajo ha sido realizado en la clase de matemáticas en dos cursos del IES Sant Blai. Cada uno ha seguido una línea de trabajo distinta, en 2º de ESO se ha enfocado hacia la reflexión sobre elementos geométricos y las relaciones entre los polígonos para llegar a la simetría como herramienta que permite moverse de un azulejo a otro para formar un mosaico. Mientras tanto, el objetivo central de 4º consistía en la profundización en las ideas de simetría que habían adquirido en cursos anteriores, la creación de baldosas simétricas y análisis del efecto producido por cada movimiento para construir mosaicos. Ambas han confluido en el diseño y construcción con GeoGebra de azulejos que después hemos pintado con técnicas del siglo XIX en el Museo del Azulejo Manolo Safont de Onda.

En la siguiente dirección de Internet se encuentra una exposición más detallada de la experiencia con los applets interactivos realizados:
http://jmora7.com/Mosaicos/index16.htm

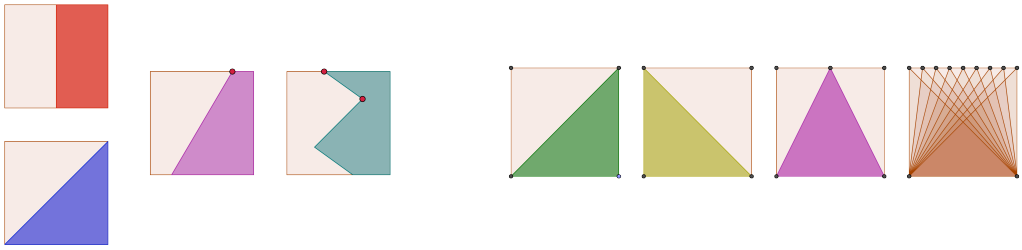
2. LA CLASE DE 2º ESO B



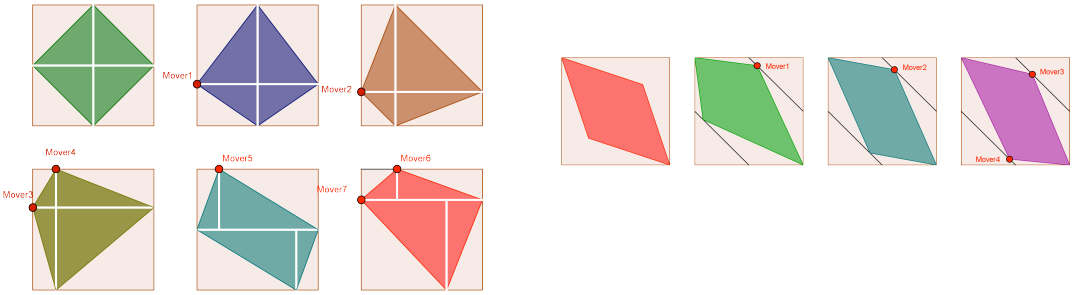
Se tomó como problema inicial una investigación geométrica que parte del siguiente enunciado: *Dado un cuadrado, una forma de construir, dentro de él, un polígono cuya área sea la mitad, consiste en tomar los puntos medios de dos lados opuestos y unirlos con un segmento. Investiga otros procedimientos*.

Para cada procedimiento-solución se les pide el dibujo (a mano o con GeoGebra) el nombre del polígono obtenido, el procedimiento (secuencia de instrucciones) escrito para conseguirlo y una justificación de por qué su solución es la mitad del cuadrado. En un primer momento exploraron libremente la situación generando gran cantidad de soluciones y poco a poco surgieron algunas líneas de trabajo en la clase – de los alumnos y de las intervenciones del profesor.

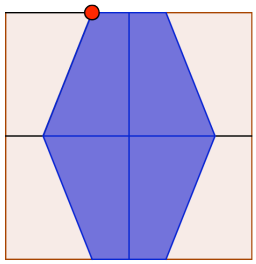
En el proceso de investigación los alumnos encuentran que tanto las líneas como los polígonos pueden ser cada vez más generales

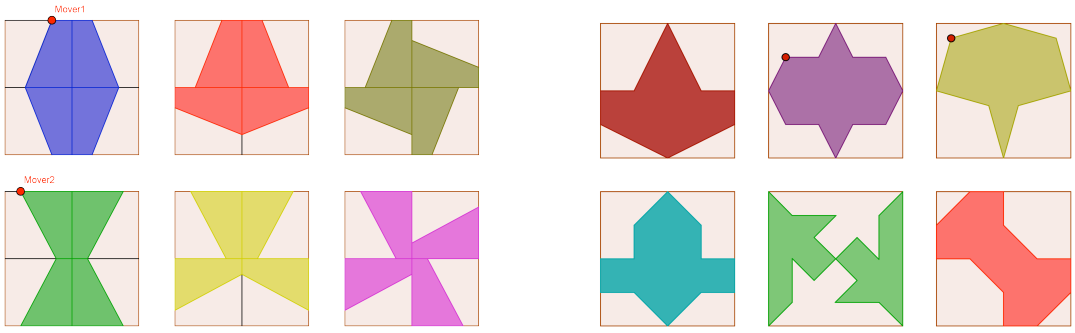


Los cuadrados se convierten en otros cuadriláteros y los rombos dan paso a cometas y paralelogramos

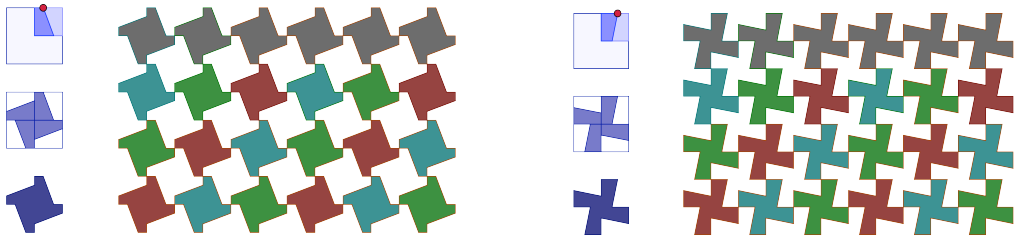


Obtienen muchas más soluciones que se exponen en applets interactivos en la página de Internet. El cambio se produjo después de varias clases en las que habían aparecido decenas de soluciones, unas nuevas y otras relacionadas con procedimientos anteriores. Al final de una clase en la que habíamos analizado con GeoGebra mitades que traían de casa y la pizarra estaba llena de bocetos, Ana colocó su pequeño descubrimiento en un hueco que quedaba justo en el centro. Su procedimiento consistía en dividir el cuadrado en otros más pequeños y aplicarles soluciones encontradas anteriormente. Decidimos enmarcar su solución para representar una ventana hacia nuevas soluciones. A partir de aquí buscaríamos baldosas elegantes y divertidas para seguir la pista que nos ofrecía Ana. La solución del trapecio ofrecía interesantes combinaciones (imagen izquierda). La siguiente clase empezó con una visita (virtual) a la Alhambra guiada con las fotografías del profesor hizo el resto provocando los diseños de la imagen de la derecha.





Nos pusimos a investigar lo que pasaría al aplicar las simetrías a las baldosas para conseguir mosaicos, en algunos casos los huecos que dejan las imágenes contienen la misma forma que las que hemos dibujado



3. La clase de 4º de ESO D y el grupo de Trabajo Monográfico de Investigación

La propuesta de trabajo en 4º de ESO ha sido el estudio de la simetría como forma de comprender y entender la belleza en las construcciones humanas. Han participado los alumnos de la clase de 4º D en la asignatura de matemáticas y los que eligieron la opción de matemáticas para realizar el Trabajo Monográfico de Investigación, una asignatura optativa de 4º de ESO de una hora semanal que, como su nombre indica, se enfoca a la documentación sobre un tema sobre el que los alumnos investigan a lo largo del curso y rinde cuentas al final en forma de trabajo. El tema elegido para este curso era el de Simetría y Mosaicos.

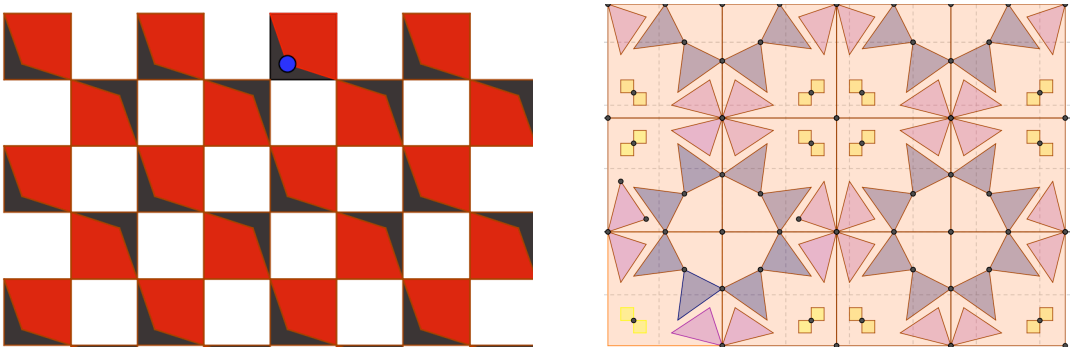
El trabajo se inició con el análisis de las distintas formas de mover una figura de manera que el resultado la haga coincidir con la original, es decir, el análisis de sus simetrías. Para ello nos resultaron de gran interés los azulejos de la Colección del Siglo XIX del Museu del Taulell, aquí tenemos algunos diseños con distintos elementos de simetría



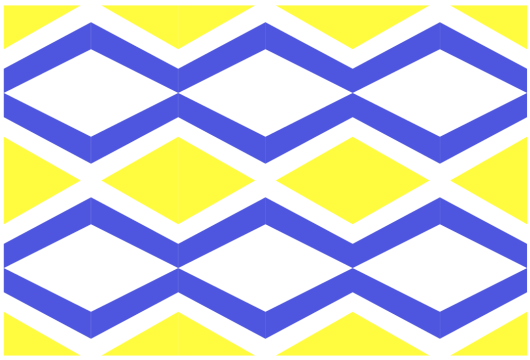
A partir de aquí, la clase se dedicó a analizar las posibles simetrías en el cuadrado para completar la tabla de grupo de simetrías. También analizamos las distintas posibilidades de introducir un diseño en un cuadrado de forma que tenga continuidad con el de las siguientes baldosas al realizar el mosaico y no queden figuras aisladas.

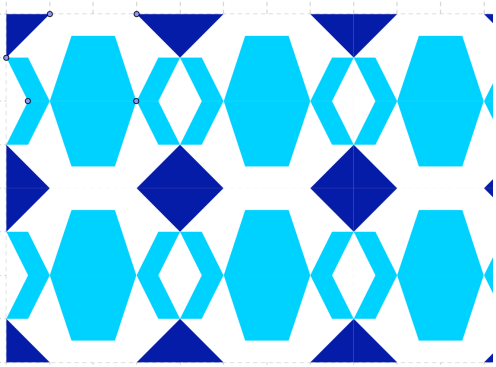
Con lo aprendido, nos embarcamos en un trabajo libre de diseño de azulejos; los alumnos crearon baldosas con una cierta simetría y debían elegir del movimiento adecuado para generar el mosaico. Aquí tenemos algunos resultados:

Sencillas y complejas

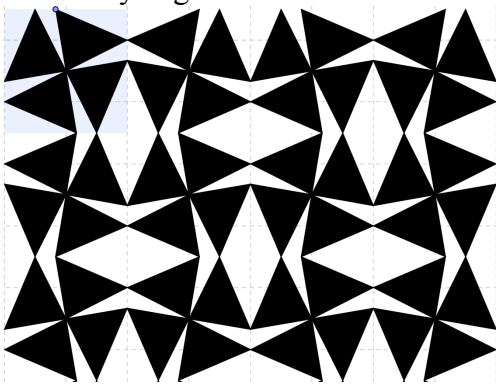


Para la cocina y para el baño



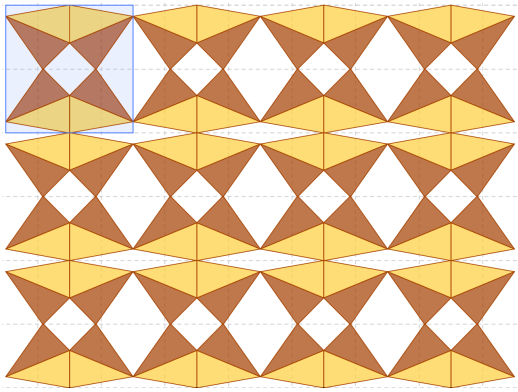


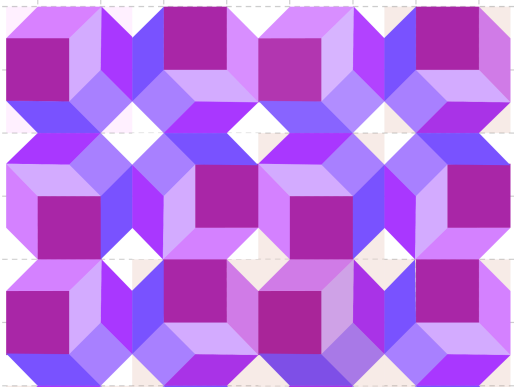
En blanco y negro o a todo color





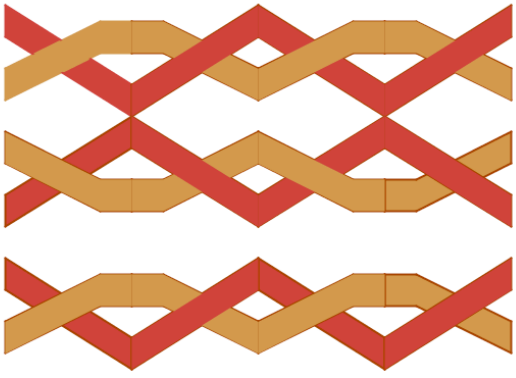
Con efectos en 3D

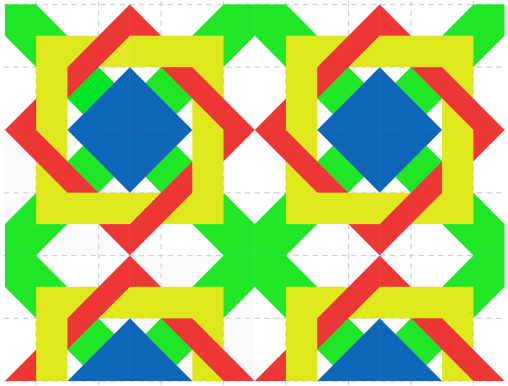




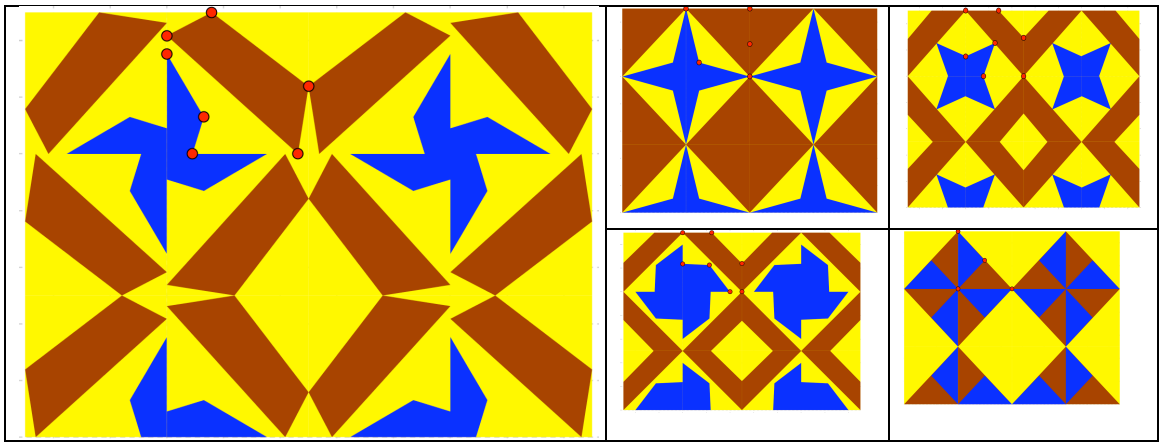
En la imagen de la derecha se combina la ambigüedad del cubo de Neker con el octógono que proviene de cortar las esquinas a un cuadrado y descomponerlo en cuatro paralelogramos y dos cuadrados.

Con líneas y polígonos entrelazados

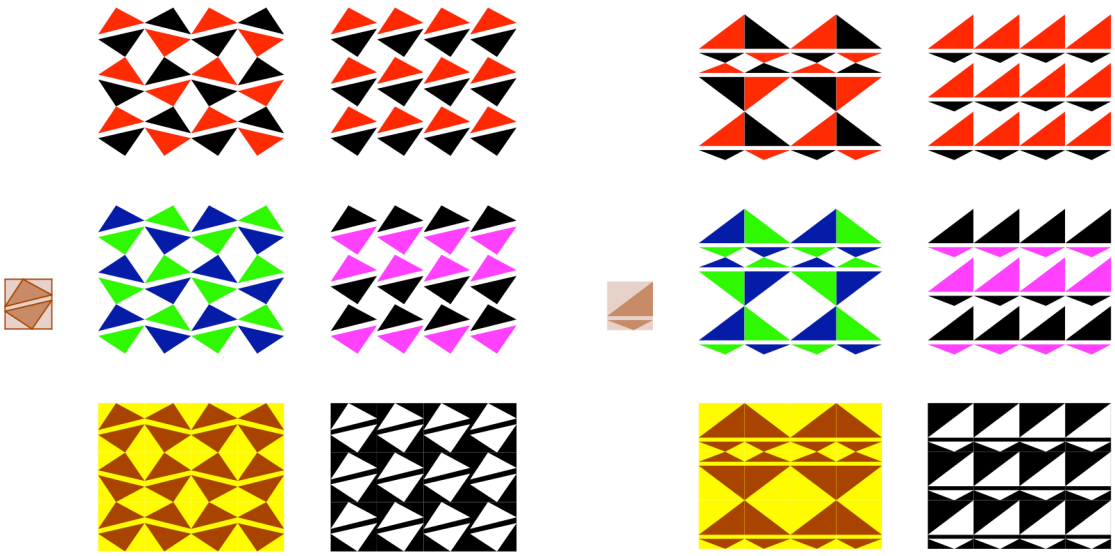




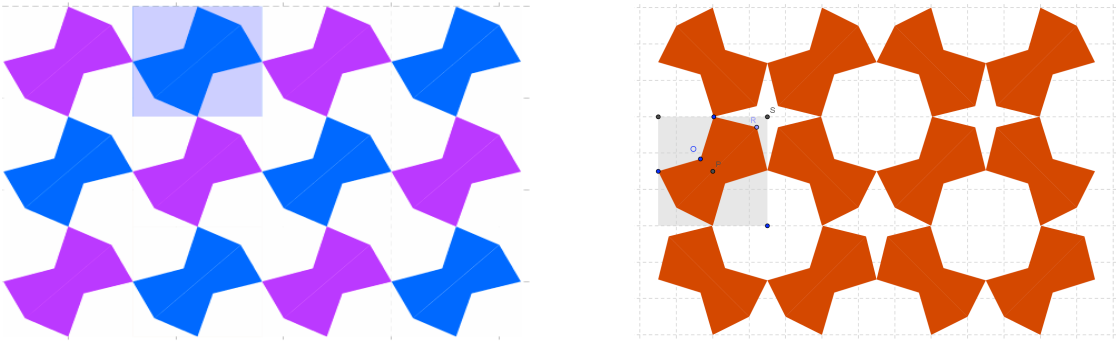
La Geometría Dinámica ofrecía la posibilidad de incluir algunos puntos libres y hacer que el resto de la construcción dependa de ellos. Todo el mosaico cambia con ellos, manteniendo o modificando la simetría del original.



Jugamos con la baldosa, los movimientos y los colores



Y en algunos casos obtenían azulejos relacionados con el trabajo de la mitad del cuadrado de sus compañeros de 2º de ESO



Los dos grupos terminaron enfocando su investigación hacia el diseño de baldosas cuadradas que llevaríamos al Museo del Azulejo y el análisis del tipo de movimiento que harían para pasar de cada una a la siguiente para construir el mosaico.

4. Utilización de GeoGebra

Como único trabajo introductorio a GeoGebra, se diseñaron dos sesiones preparatorias a principio de curso en las que el profesor presentaba las distintas herramientas del software prestando una atención especial a la posibilidad de construir objetos relacionados con otros anteriores. Algunos alumnos, que lo habían utilizado en cursos anteriores, tutoraron a sus compañeros.

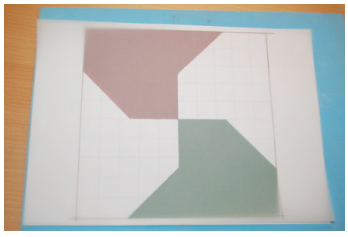
Todos instalaron GeoGebra en sus ordenadores de casa y lo utilizaron desde el principio de curso en tareas de matemáticas que se proponían de un día para otro en la programación habitual de matemáticas. La revisión de este tipo de trabajos se hacía con un ordenador conectado a un cañón de proyección y un ratón inalámbrico que podía desplazarse por toda la clase.

Además, los alumnos de 4º dispusieron un aula móvil de portátiles una o dos sesiones semanales y una pizarra digital permanente en el aula conectada a un ordenador.

En el trabajo de la mitad del cuadrado, los alumnos de las clases de 2º no pudieron disponer del aula móvil, de forma que sólo se trabajaba en casa con su ordenador personal y traían sus archivos en un lápiz de memoria para revisarlos en el ordenador del profesor con toda la clase.

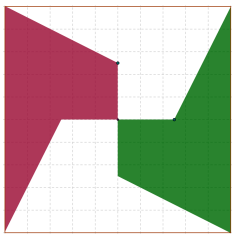
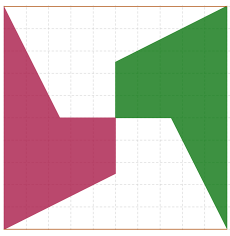
5. Preparación de los diseños

La técnica para pintar los azulejos se remonta al siglo XIX y es la que se conoce como estarcido. Nuestros diseños se habían elaborado en la clase de matemáticas y construido con GeoGebra. Para trasladarlo al azulejo se realiza una plantilla en papel vegetal agujereando por las líneas marcadas. En el museo se extiende un polvo negro con una esponja que deja marcas al atravesar los orificios realizados y servirán de guía para pintar.





Si el movimiento de un azulejo al que está a su lado se hace por simetría axial y la baldosa no tiene ese tipo de simetría en su interior, serán necesarias dos baldosas ya que "no se puede dar la vuelta a un azulejo".

6. La visita al Museo de Onda

El Museu del Azulejo ha puesto todos los medios a nuestra disposición para que pudiéramos cumplir los objetivos que nos habíamos marcado. Queremos agradecer especialmente a Marc Ribera, coordinador del departamento didáctico del museo que fue nuestro guía en la visita y Joana Segura, la ceramista que organizó el trabajo y orientó a los alumnos en el taller de pintura de los azulejos. La dirección de la página de internet del museo es http://www.museoazulejo.org.

Joana dio las indicaciones al alumnado para pasar del papel vegetal agujerado al azulejo, la técnica de pintar y cómo realizar pequeñas correcciones en caso de que las pinceladas se salieran de las marcas.





Las baldosas pintadas quedaron en el museo para el horno y al cabo de unos días llegaron al instituto. Los alumnos se han fotografiado con sus creaciones.

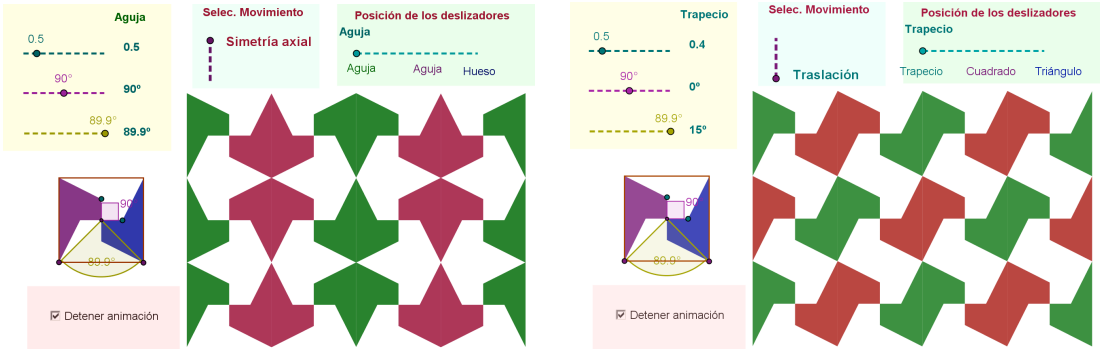




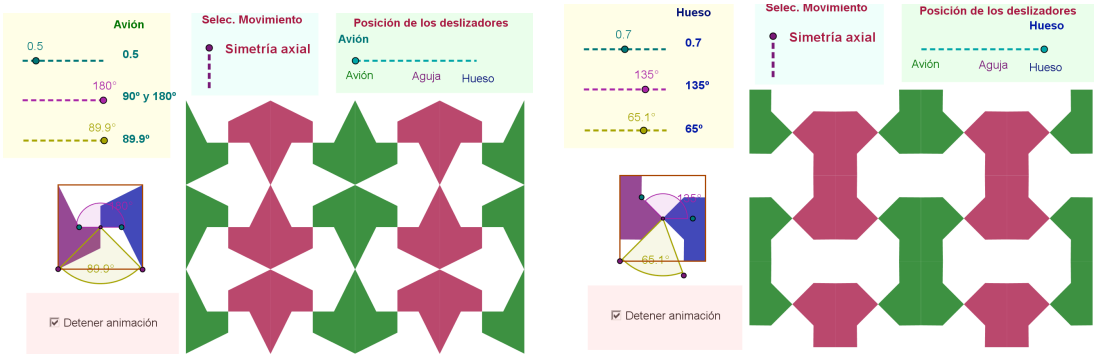
7. La página web

Hemos utilizado GeoGebra para hacer diseños interactivos. En muchas ocasiones se dejan libres algunos puntos y se completa el resto mediante construcciones geométricas dependientes de esos primeros elementos. Al desplazar los puntos que gozan de libertad, todo lo que hayamos construido a partir de ellos mediante alguno de los movimientos o bien sean fruto de una construcción geométrica, también se verán modificados. Para poder apreciarlo mejor e interactuar con los diseños, se puede visitar la sección *Azulejos con GeoGebra en el museo de Onda* de la web http://jmora7.com

Cuando hemos diseñado la baldosa, podemos hacer dos o más mosaicos utilizando distintos movimientos para colocarlas. Con una casilla de control o un deslizador podemos hacer que aparezca uno de los mosaicos y se oculten los demás. En las imágenes se comprueba lo que ocurre al cambiar la simetría axial por la traslación.



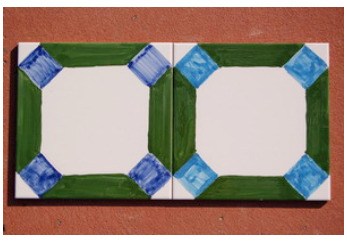
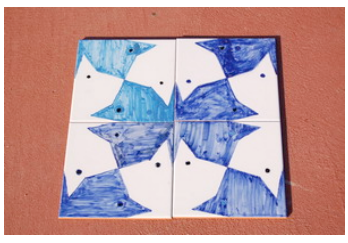
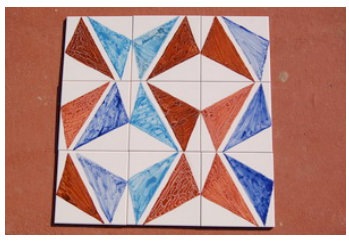
Algunas de las construcciones se han realizado con deslizadores que modifican ciertos parámetros mediante animación automática o cambiando manualmente su valor. Podemos detener la animación y se nos ofrecen los valores que debemos colocar en los parámetros para conseguir algunos mosaicos especiales, pero eso será mejor experimentarlo en la web. En esta versión en papel nos tenemos que contentar con dos instantáneas de un mosaico.



8. EPÍLOGO

Los alumnos han podido vivir la experiencia desde que sólo era un enunciado de las clases de matemáticas. El trabajo de los alumnos lo fue transformando en una investigación y la posibilidad de trabajar en el Museo fue un aliciente para ellos. GeoGebra también supuso una gran ayuda tanto para plasmar las ideas como para sugerir otras nuevas.

Entre los dos grupos conseguimos más de 40 baldosas dignas de ser reproducidas físicamente en el museo, hubo que hacer una difícil selección. Algunos de los mosaicos eran soluciones a nuestros problemas y recuerdan diseños de La Alhambra y de M.C. Escher a la vez que surgieron otros verdaderamente originales como el mosaico de los triángulos de Alejandro.

Después del diseño tuvieron que puntear las plantillas, hacer un largo y divertido viaje a Onda, comprobaron que en el museo se exponen diseños muy parecidos a los suyos, y aún hay que añadir el haberlos pintado en el taller. El proceso ha dado una dimensión afectiva a las ideas de polígono, área o simetría

El envío posterior de los azulejos ya cocidos y la posibilidad de tocar físicamente sus creaciones completa lo que en muchos casos echamos en falta en las clases: la conexión de las matemáticas con el mundo de nuestros alumnos.

Para acabar, el centro ha enmarcado cuatro de los paneles construidos para decorar las paredes. El objetivo es que los alumnos sientan el instituto como algo propio. Se ha aprovechado que faltaba algún azulejo para añadir algunas losetas diseñadas con ordenador que informan del proceso geométrico de construcción, muestran fotografías de ese mosaico en la decoración de algunos edificios e informan de la autoría.



BIBLIOGRAFÍA

Arranz, J.M y otros. (2009) Realities from Geogebra. MSOR. *Connections. Vol 9, No 2, May – July 2009*.

Fielker, D. (1987) *Rompiendo las cadenas de Euclides* (MEC: Madrid)

Mora, J.A. (1991). La mitad del cuadrado. *Revista SUMA núm 8*, pp. 11-29. FESPM: Madrid.

Mora, J.A. y Rodrigo, J. (1993). *Mosaicos*. (Proyecto Sur: Granada)

Mora, J.A. (2007). La mitad del cuadrado con Geometría Dinámica. *La Gaceta de la RSME, Vol. 10.3*. Págs. 743-762

Ruiz Garrido y Pérez Gómez (1987). Visiones matemáticas de la Alhambra. El color. *Revista Epsilon, monográfico dedicado a la Alhambra* pp. 51-59.

ALGUNES IDEES AL VOLTANT DEL CONCEPTE DE LA COMPETÈNCIA MATEMÀTICA

Tomàs Queralt
CEFIRE de Torrent

En la xarrada anem a parlar d'un concepte del qual els professionals de l'educació ja tenen segur a hores d'ara alguna idea formada. No es tracta per tant de donar una definició a partir de la qual es puga començar, sinó que el que es pretén és donar algunes aportacions que permeten contribuir a la idea particular que cadascun té del mateix concepte. Parlarem de la "competència matemàtica", dels origens del concepte, de quines implicacions té este nou element curricular en l'educació obligatòria, i donarem algunes propostes per a que el professorat col·labore en la consecució de la competència matemàtica amb els seus alumnes.

Algunes de les preguntes que anem a intentar respondre són les següents:

- Quin és el concepte de competència?
- Quines són les competències bàsiques?
- Què és la competència matemàtica?
- Com es contempla a nivell normatiu el concepte de competència matemàtica?

Per a començar des d'una perspectiva cronològica, cal remuntar-se al procés de Bolonia, que en 1999 es va marcar com a meta la creació de l'Espai Europeu d'Educació Superior (EEES). El que es tractava era d'armonitzar els sistemes educatius d'educació superior per a, entre altres coses, homologar els estudis universitaris a l'interior de la Unió Europea. Es volia facilitar la movilitat dels estudiants egressats i en conseqüència, facilitar que els titulats superiors de qualsevol país pugueren accedir al mercat de treball de qualsevol membre de la UE. Això va determinar la creació dels diferents perfils professionals de cada carrera i estudis universitaris, i la descripció i desenvolupament dels continguts en funció de les **competències** que cada perfil professional requeria. Actualment estem en el procés d'implantació. El fet de que a nivell d'educació superior es planifique en base al concepte de competència, ha derivat que aparega este mateix concepte en la legislació educativa que fa referència a l'ensenyament obligatori.

L'expressió "competència matemàtica" inclou un concepte principal, que és el de "competència". Qué entenem per competència? Quan diem que una persona és competent en alguna faceta de la seua vida? Segur que ens venen al cap idees que giren al voltant de les següents: habilitat, destresa, eficàcia, expert, coneixedor del treball que desenvolupa, actuació professional,... Si consultem per exemple el diccionari de la Real Academia Española ens diu: "Pericia, aptitud, idoneidad para hacer algo o intervenir en un asunto deterninado." El diccionari Penguin de psicologia diu: "capacidad de realizar una tarea o de finalizar algo con éxito". Observem en esta segon definició que afegeix un matiç important que encaixa amb la nostra idea prèvia, i és el que realitzem una tasca amb èxit. Tanmateix, amb aquestes definicions no ens acabem de conformar.

Una font important de la que podem consultar és la dels ensenyaments professionals. La formació professional ha planificat tradicionalment els seus estudis en termes de competències, tenint en compte que l'estudiant en acabar la seua formació ha de tenir els coneixements tant teòrics com pràctics per a desenvolupar un determinat treball amb eficàcia. Així, Lasnier (Lasnier, 2000) descriu el concepte de competència en els següents termes:

> Una competencia es un **saber hacer complejo** resultado de la **integración**, movilización y **adecuación** de capacidades y habilidades (de orden cognitivo, afectivo, psicomotor o social) y de conocimientos utilizados eficazmente en **situaciones que tengan un carácter común** (situaciones similares, no generalizable a cualquier situación).

Esta definició inclou en el concepte de competència la idea de saber, de saber fer, i de utilitzar eficaçment estos coneixements en el moment en el que facen falta.

Leboterf (Leboterf, 2001) defineix el mateix concepte:

> Una competencia es el conjunto de conocimientos, actitudes y destrezas necesarias para desempeñar una función dada. Incluye la capacidad de movilizar y aplicar correctamente estos recursos en un entorno determinado, para producir un resultado definido.

Segons estes definicions, podem deduir unes quantes conseqüències. En primer lloc, que la competència no s'aprèn, sinó que es produeix. S'atribueix la propietat de *competència* quan s'efectua una acció en un determinat context, acció que ve derivada de la voluntat de posar en marxa els coneixements necessaris, les destreses necessàries i les actituds necessàries per a obtindre un resultat satisfactori. Per tant, pensem que es produeix la competència en el moment en el que es porta endavant una determinada activitat. Segons el projecte DESECO[8], les competències sols es manifesten en la realització d'accions en un context o situació particular. Per elles mateixes, les competències no existeixen, no són independents de l'acció en la que es manifesten. El que podem fer per a aconseguir la competència és ensenyar els diferents components de la competència. Estos components es denominen, segons diferents textos, components de la competència, subcompetències, elements de la competència, unitats de competència, etc. Són aquelles parts o elements que, sense ser observables, és necessari presuposar la seua existència tenint en compte l'èxit en el resultat final. Així, per a Chomsky els components de la competència eren principis, regles abstractes i elements cognitius bàsics. Per a McClelland, eren més variats, ja que inclouen a més d'elements cognitius, altres elements emocionals i actitudinals. Són estos elements de la competència els que cal ensenyar i on fomentar el seu aprenentatge.

En segon lloc, la idea de competència té un caracter més complex que el de un contingut procedimental, en tant que és un saber fer. Els continguts de l'aprenentatge de tipus procedimental s'identifiquen per que cal fer una acció, posar en marxa un contingut conceptual, o aplicar unes determinades regles basades en unes normes prèvies. És un saber fer. Tanmateix, una competència inclou de manera integrada no sols els coneixements i la seua aplicació, sinó també l'actitud d'utilitzar-los i aplicar-los en aquell moment en els que fan falta. La competència inclou el saber i el saber fer, a més a més del saber com i quan s'han d'aplicar eixos coneixements per a obtindre un resultat satisfactori, dins de un context determinat.

---

8 DESECO. Projecte impulsat per la OCDE en el que estan implicades Universitats de la U.E. amb la finalitat de determinar les competències bàsiques. Les sigles venen de: Definición y Selección de Competencias.

En el projecte TUNING[9] les competències representen una combinació d'atributs que descriuen el nivell o grau de suficiència amb que una persona és capaç de desenpenyar-los.

Com a resultat de la reflexió i l'estudi d'estos conceptes, la Unió Europea ha determinat en diferents grups de treball com cal incloure-los de cara a millorar l'educació dels ciutadans europeus. Així determina quines són les competències claus, definides com "un conjunt de coneixements, destreses i actituds que tots els individus necessiten per a la seua realització i desenvolupament personal, inclusió i empleament, que han de ser desenvolupades per al final de l'ensenyament obligatori i haurien d'actuar com la base per a un posterior aprenentatge al llarg de la vida" (Comissió Europea, 2004). El marc de referència europeu de 2005 estableix quines són eixes competències claus:

1. Comunicació en la llengua materna
2. Comunicació en una llengua estrangera
3. Competència matemàtica i competències bàsiques en ciència i tecnologia.
4. Competència digital.
5. Aprendre a aprendre
6. Competències interpersonals, interculturals i socials, i competència cívica.
7. Esperit emprenedor.
8. Expressió cultural.

A partir d'esta tendència, la legislació espanyola inclou les competències bàsiques en el curriculum de la Ley Orgànica de Educación LOE, les quals són:

1. Competència en comunicació lingüística.
2. Competència matemàtica.
3. Competència en el coneixement i la interacció amb el món físic.
4. Tractament de la informació i competència digital.
5. Competència social i ciutadana.
6. Competència cultural i artística.
7. Competència per a aprendre a aprendre.
8. Autonomia i iniciativa personal.

La justificació de la inclussió de les competències bàsiques en el curriculum espanyol apareix justificada en la mateixa norma, de la que fem un xicotet extracte:

> La inclusión de las competencias básicas en el curriculo tiene varias finalidades. En primer lugar, integrar los diferentes aprendizajes, tanto los formales como los informales y no formales. En segundo lugar, permitir a los estudiantes integrar sus aprendizajes, ponerlos en relación con distintos tipos de contenidos y utilizarlos de manera efectiva cuando les resulten necesarios en diferentes situaciones y contextos. Y por último, orientar la enseñanza, al permitir identificar los contenidos y los criterios de evaluación que tienen carácter imprescindible y, en general, inspirar las distintas decisiones relativas al proceso de enseñanza y de aprendizaje.

[9] TUNING Tuning Educational Structures in Europe. Projecte iniciat en 2000 per a enllaçar les polítiques educatives de nivell superior.

La legislació espanyola ha elegit, a l'hora de generar un nou marc legislatiu, per un *enfocament transversal*: s'ha afegit un nou element al curriculum però no se substitueix per cap dels elements prescrits ja presents (objectius, blocs de continguts, criteris d'avaluació i mètodes pedagògics). El que es planifica no és integrar les competències bàsiques amb la resta d'elements curriculars, sinó que demana que cada àrea, dins de les seues tasques habituals, treballe per a veure com pot contribuir a la seua consecució. L'alternativa, es a dir, l'enfocament per competències bàsiques que l'escola belga anomena "pedagogia de la integració" obligaria a tornar a dissenyar els continguts curriculars en funció de les competències bàsiques.

En este punt, m'agradaria fer un parell de reflexions al voltant de la proposta legislativa actual i que segur que molts professionals de l'educació se les han fetes. La primera és la que gira al voltant de que això de les competències pot ser que siga una moda efímera i el millor que podem fer és esperar a que passe com s'ha fet en altres ocasions. També es produeix un trencament en els nous plantejaments pedagògics amb les creences tradicionals relatives al coneixement, ja que a la nostra cultura està molt implantada la idea de que els sabers han de ser teòrics, deixant en un segon ordre importància tot el que siga coneixement aplicat o pràctic. L'arrel d'esta creença ve determinada per la de que qui sap alguna cosa, ja la sap aplicar, plantejament que està completament equivocat.

Aleshores, de qué parlem quan ens referim a la competència matemàtica? El punt de partida hauria de ser el que els professors entenem pel qué son les matemàtiques escolars. A diferència del concepte de "matemàtica" com un cos de coneixement que està en continu creixement, les matemàtiques escolars estan basades en eixe edifici en construcció però sols han de contindre els elements que en cada moment la societat pensa que cal incorporar a la cultura de tots els ciutadans. La concepció del qué son les matemàtiques escolars és el resultat de l'experiència i el contacte que cada persona té amb el món de les matemàtiques. Esta idea, que a nivell individual cada persona (i per tant, cada professor) té respecte del que són les matemàtiques escolars, determina en gran mesura quina és la práctica que com a ensenyants tenim a l'aula. L'evolució del concepte de matemàtiques ha anat passant des d'una posició més *descriptiva* i *formal* a una posició més *constructiva* i *significativa*. La legislació ens orienta respecte del que els professionals de l'educació hem d'entendre pel que han de ser les matemàtiques escolars. Així, els decrets de curriculum a la Comunitat Valenciana diuen: ..."S'entenen així les matemàtiques com un conjunt d'idees i formes d'actuar que comporten no sols utilitzar quantitats i formes geomètriques, sinó, i sobretot, fer-se preguntes, obtindre models i identificar relacions i estructures, de manera que, a l'analitzar els fenòmens i les situacions que es presenten en la realitat, es puguen obtindre informacions i conclusions que inicialment no hi apareixien explícites." (DECRET 111/2007 de 20 de juliol pel qual s'estableix el curriculum de l'Educació Primària a la Comunitat Valenciana).

I afegeix: …"Concebudes d'esta manera, les matemàtiques incorporen les característiques que els han sigut tradicionalment assignades i que s'identifiquen amb la deducció, la precisió, el rigor, la seguretat, etc.; però són i aporten molt més del que es deduïx d'estos termes. També són inducció, estimació, aproximació, probabilitat i temptativa, i milloren la capacitat d'enfrontar-se a situacions obertes, sense una solució única i tancada."

I més endavant: …"En tots els casos, les Matemàtiques han de ser presentades a les alumnes i els alumnes com un conjunt de coneixements i procediments, pròxims a la seua experiència, mostrant, en la mesura que siga possible, com han evolucionat alguns dels seus aspectes en el transcurs del temps."

Estes idees determinen en gran manera quines han de ser les nostres pràctiques a la classe de matemàtiques. Tanmateix, l'aparició del nou element curricular com son les competències bàsiques a l'ensenyament obligatori, fa precís un replantejament metodològic que afecta no sols al que s'ensenya, sino de forma radical al "com ensenyem".

El concepte de "competència matemàtica" no és nou. Ja als anys 80, el Grupo Cero ja ens orientava al respecte i ens determinava quins eren els elements que constituïen la competència matemàtica:

- Fets: termes, notacions, convenis, resultats…
- Destreses: operacions bàsiques, raonable ús de la calculadora, habilitat per a comunicar-se…
- Estructures conceptuals: conceptes bàsics i les seues relacions
- Estratègies generals: estratègies cognitives (estimar, aproximar, raonar, generalitzar, buscar pautes i regularitats, inferir, deduir,…) i metacognitives (planificar, controlar, elegir estratègies adients,…)
- Qualitats personals: bons hàbits de treball (imaginar, ser sistemàtic, creatiu, persistent), actituds positives cap a les matemàtiques (interés i motivació, gust pels continguts matemàtics, fascinació pel resultat, autonomia per a enfrontar-se a situacions noves, apreciació de la bellesa d'algunes formes matemàtiques,…)

El REAL DECRETO 1513/2006 de 7 de Diciembre pel que s'estableixen "las Enseñanzas Mínimas de la Educación Primaria" diu: …"Competencia Matemática. Consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral."

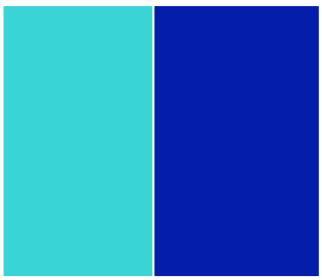
"Esta competencia implica el conocimiento y manejo de los elementos matemáticos básicos (distintos tipos de números, medidas, símbolos, elementos geométricos, etc.) en situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana, y la puesta en práctica de procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas o a la obtención de información"

"El desarrollo de la competencia matemática al final de la educación obligatoria, conlleva utilizar espontáneamente los elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, para resolver problemas convenientes de situaciones cotidianas y para tomar decisiones."

L'eix vertebrador al voltant del qual gira la consecució de la competència matemàtica és la resolució de problemes. Els processos de resolució de problemes constituïxen un dels eixos principals de l'activitat matemàtica i han de ser font i suport principal de l'aprenentatge matemàtic al llarg de les etapes obligatòries, ja que constituïxen la pedra angular de l'educació matemàtica. En tots els cursos s'ha inclòs un bloc de continguts comuns que constituïxen l'eix transversal vertebrador dels coneixements matemàtics compresos, el bloc és un tema bàsic del currículum: la resolució de problemes. Les investigacions ens mostren que les estratègies mentals que es posen en pràctica a l'hora de resoldre problemes permeten millorar els nivells de competència matemàtica. Els problemes, així com xicotetes investigacions proposades a l'abast dels alumnes segons el seu nivell de desenvolupament, permeten millorar les diferents capacitats lligades al procés de competència matemàtica.

Alguns exemples de problemes son del tipus següent:

- Si el perímetre és 10, quina és la figura? (D. Fielker)
- Si l'àrea és 4, quina és la figura? (J.E. García)
- Donat un quadrat de costat 1, traçar una línia que el dividisca en dos parts d'igual superfície. De quantes formes es pot fer? (J.A. Mora)



Quins són els components de la competència matemàtica? Els components de la competència, o subcompetències, o elements de la competència, segons els autors, són les parts en les que podem dividir la competència i que treballar-les amb els alumnes implica col·laborar per tal d'aconseguir la competència corresponent. Segons Morgen Niss, estos components són:

1. Pensar matemàticament
2. Plantejar i resoldre problemes matemàtics
3. Modelar matemàticament
4. Raonar matemàticament
5. Representar entitats matemàtiques
6. Utilitzar els símbols matemàtics
7. Comunicar-se amb les matemàtiques i comunicar sobre matemàtiques
8. Utilitzar ajudes i ferramentes

Cada component de la competència implica un conjunt d'aprenentatges que no sols tenen a veure amb continguts conceptual, sinó també procedimental i actitudinal. Per exemple, modelar matemàticament implica:

- Estructurar el camp o situació que es vol modelar
- Traduir la realitat a estructures matemàtiques
- Interpretar els models matemàtics en térmes de "realitat"
- Treballar amb un model matemàtic
- Validar el model
- Reflexionar, analitzar i criticar un model i els seus resultats
- Supervisar i controlar el procés de construcció de models.

La legislació espanyola deixa en mans dels professionals de l'educació la tasca de concretar i dissenyar en cada etapa quines subcompetències cal treballar i a quin nivell. La qual cosa és una dificultat afegida al treball del mestre que no compta amb prou referents per tal d'estructurar la seua tasca.

Les anteriors subcompetències se corresponen amb les que s'establiren al programa PISA de la OCDE, que estaven plenament influenciades per les idées i plantejament de Niss. Al mateix temps, es varen graduar les subcompetències en tres grups: Reproducció, Connexió i Reflexió.

En el grup de reproducció les activitats impliquen la reproducció del coneixement estudiat. Inclouen aquelles que s'empren més frecuentment en les proves estandaritzades i en els llibres de text: coneixement de fets, representacions de problemes comuns, reconeixement d'equivalents, recopilació de propietats i objectes matemàtics familiars, execució de procediments rutinaris, aplicació de destresses tècniques i d'algorismes habituals, el maneig d'expressions amb símbols i fòrmules establertes i realització de càlculs.

Per exemple:

- Resol l'equació $7X - 3 = 13X + 15$
- Quina és la mitjana de 7, 12, 8, 14, 15, 9?
- Escriu 69% en forma de fracción.
- S'ingressen 1000 zeds en un compte d'estalvi de un banc amb un tipus d'interés del 4%. Quants zeds haurà en el comptea al cap d'un any?

En el grup de connexió les activitats proposades es recolzen sobre el grup de reproducció, conduïnt a situacions de solucions de problemes que ja no són de mera rutina, pero que encara inclouen escenaris familiars o casi familiars.

Per exemple:

- María viu a dos quilòmetres del seu col·legi i Martín a cinc. A quina distància viuen un de l'altre?
- Una pizzeria ofereix dos pizzes redones del mateix grosor però de diferents tamanys. La xicoteta té un diàmetre de 30 cm i costa 30 zeds. La gran té un diàmetre de 40 cm i costa 40 zeds. Quina pizza és la millor opció en relació al que costa? Escriu el teu raonament.

En el grup de reflexió les competències d'aquest grup inclouen un element de reflexió per part de l'estudiant sobre els processos necesaris o empleats per a resoldre un problema. Relacionen les capacitats dels alumnes per a planificar estratègies de resolució i aplicar-les en escenaris de problema que contenen més elements i poden ser més 'originals' que els del grup de connexió.

Per exemple:

- En un determinat país el presupost nacional de defensa fou de 30 millons (en la moneda del país) en 1980. El presupost total de eixe any fou de 500 millons. A l'any següent, el presupost de defensa pasà a 35 millons, mentre que el presupost total fou de 605 millons. La inflació del període comprès entre els dos presupostos alcançà el 10 %.
  a) T'inviten a donar una conferència en una associació pacifista. Intentes explicar que el presupost de defensa ha disminuït en este període. Explica como ho faries.
  b) T'inviten a donar una conferència en una acadèmia militar. Intentes explicar que el presupost de defensa ha augmentat en este període. Explica com ho faries.

Esta classificació del nivell de competència ve derivada de la idea de que la competència no és una referència absoluta, sino que és graduada. Ja al projecte Tuning s'afirma que: "Les persones no poseixen o careixen d'una competència en termes absoluts, sinó que la dominen en diferents graus, d'ací que es puguen col·locar les competències en un continu i desenvolupar mitjançant l'exercici i l'educació". Per tant, la nostra activitat amb els alumnes haurà d'anar enfocada a incrementar el nivell de competència mitjançant propostes que vagen orientades a superar l'estadi actual. Els resultats de l'aprenentatge s'expressen en nivells de competència que ha d'aconseguir l'alumne.

Com a conseqüència de la descripción del que caldria entendre per "competència matemàtica" a les etapes obligatòries, pensem que asumir una formación per competències implica:

- Disenyar accions curriculars que promoguen el coneixement conceptual, el desenvolupament d'actituds i l'adquisició d'habilitats.
- Apropar a l'estudiant als contextos que constituiran el seu àmbit de desenvolupament personal i social.
- Utilitzar una metodologia que facilite l'aprenentatge de pràctiques en les que l'alumne tinga que movilitzar els seus recursos.

Estes orientacions ens fan pensar en que la programació de l'aprenentatge dels alumnes hauria d'incloure situacions en les que els estudiants puguen posar en pràctica aquells coneixements apresos, posant a prova la seua capacitat de transferència i d'integració. Activitats fora de l'aula, usant l'entorn com a recurs didàctic, fomenten aquesta idea.

Promoure en el centre educatiu concursos o proves que inciten a la participació amb problemes de matemàtiques com a centre d'interés ajuden a descontextualitzar l'aprenentage. Els estudiants estan acostumbrats a resoldre activitats que els professors els plantegen dins del contingut que es treballa en el moment, la qual cosa li lleva espontaneitat i enfoca la resolució al tema que s'està estudiant. Els problemes descontextualitzats obliguen a posar en pràctica tot el bagatge personal per tal de resoldre'ls, situació molt semblant a la que es produeix en la vida real.

Els projectes de treball que giren al voltant d'un problema pròxim als estudiants, que tinguen a veure amb la realitat, dels que plantegen el Grup Vilatzara (Sol, M.; Jiménez, J. y Rosich, N. (2007): *Competencias y proyectos matemáticos realistas en la ESO*. UNO, 46, 43-59.) impliquen posar en pràctica totes les destresses, habilitats, coneixements i actituds pròpies del que estem parlant defineixen la competència matemàtica.

TAULA REDONA

TAULA REDONA

OLIMPIADES I CONCURSOS

Maurici Contreras (coordinador)

És possible desenvolupar activitats lúdiques amb les matemàtiques? Hi ha una oferta d'activitats fora de les que habitualment es desenvolupen de forma reglada en les aules? On aprenen més matemàtiques els estudiants, en activitats com a Olimpíades, concursos, rutes, jocs, o en les hores habituals de classe? Des de fa alguns anys vénen desenvolupant-se una sèrie d'activitats que tenen com a objectiu fomentar una visió lúdica de les matemàtiques, en un intent de mostrar que és possible disfrutar fent matemàtiques fora de l'aula: en el carrer, en competicions, en jocs, fent fotografies o vídeos, ... Què es busca amb estes activitats?

En esta taula redona tractem de respondre estes i altres preguntes amb la col·laboració d'invitats que són representatius d'algunes d'estes activitats:

- Olimpíada matemàtica... les estratègies dels alumnes sorprenen els seus professors?
- Calendari matemàtic... una miqueta més que un concurs de resolució de problemes?
- Estalmat... et sorprén les matemàtiques que pot arribar a conéixer un xiquet de 12 anys?
- Problemes Olimpics... milers d'estudiants d'ESO, bojos per les mates, són lectors habituals d'una revista de problemes?
- Rutes matemàtiques... no t'imaginaves la quantitat de matemàtiques que et rodeja?
- Fotografia matemàtica... eres bon observador?

En les següents pàgines trobareu els contiguts de les intervencions dels ponents convidats: Dolors Arnal (prova Cangur), Salvador Caballero (Concurs de fotografía Matemàtica a la vista), Rafael Crespo (projecte Estalmat), Rafael Martínez (Olimpiada Matemàtica), Floreal Gracia (Calendari Matemàtic), Tomàs Queralt (Rutes matemàtiques) i també la meua intervenciò al voltant de la revista “Problemes Olímpics”. També trobareu al Volum 2 les presentacions de diapositives que es van mostrar en la taula redona. La nostra intenció és donar-vos a conéixer un conjunt d’activitats matemàtiques què es poden fer fora de l’aula i què són motivadores per l’alumnat. Volem animar-vos a participar en elles amb els vostres alumnes.

CONCURS DE FOTOGRAFIA
“MATEMÀTICA A LA VISTA”

Salvador Caballero
CEFIRE d’Alacant

Les bases del concurs són les següents:

1. La Societat d’Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi" convoca el XII Concurs de Fotografia “Matemàtica a la vista” amb dos apartats:

   Apartat I: Poden participar totes les alumnes i tots els alumnes que cursen actualment estudis de Primària, Secundària, EPA, FP, Cicles formatius i Batxillerat.

   Apartat II: Pot participar qualsevol persona no inclosa en l’apartat anterior.

2. Les fotografies, originals, en blanc i negre o en color, *en paper*, tindran una grandària de al menys 10 x 15 per a l’apartat I, i almenys 18 x 24 per a l’apartat II. Cada fotografia es presentarà muntada sobre cartolina amb un títol o peu de foto visible, que pose de manifest la condició matemàtica del concurs. Cada sèrie —tres o més fotos sobre un mateix tema— s’identificarà amb títol únic, si bé cada foto portarà subtítol.

3. Les fotografies –muntades i amb el títol visible– no mostraran dades de qui concursa, que s'inclouran en paper adjunt, junt amb la indicació clara de l'apartat a què concursa cada fotografia. El nombre de fotos que pot presentar cada participant és 5, i 2 sèries. Si es tenen en format digital, es prega s'incloguen els arxius en un cd.

4. Els premis, que contemplaran la fotografia i el seu peu de foto, es modifiquen cada any. En l’últim concurs van ser els següents:

   Apartat I: 1r : 150 €; 2n:100 €; 3r : 75 €.

   4t Tres premis iguals de 30 €; Millor sèrie: 150 €.

   Apartat II: (Premi a una fotografia o una sèrie) 1r:250 €; 2n:150 €



Simetría acuática, de Nicolás Pettican Pérez

5. Les fotografies rebudes s'exposaran durant la celebració de les IX Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi,* durant els dies 10, 11 i 12 de setembre del 2010. Tots els visitants de l'exposició seran invitats a votar per a la concessió dels premis, que es lliuraran el dia 12 a les 12 hores. Posteriorment, les fotografies del concurs, junt amb altres de concursos previs, podran exhibir-se en alguns centres que ho sol•liciten.

6. La participació implica l'acceptació de les bases. El jurat que decidirà el concurs estarà compost almenys per tres membres de la Societat organitzadora. La seua decisió, que tindrà en compte la votació efectuada, serà inapel•lable.

7. Tota fotografia premiada passarà a ser propietat de la Societat a tots els efectes. Les fotografies no premiades, en suport paper, es podran sol•licitar a la Societat, que les tornarà després de la celebració de les exposicions concertades.

Per a qualsevol consulta i per a realitzar els enviaments, caldrà dirigir-se al coordinador de la Societat per a aquest concurs:

Salvador Caballero Rubio

C/ Bahía, 2 (CEFIRE d'Alacant) 03008 Alacant

e-mail: alacant@semcv.org

LA REVISTA "PROBLEMES OLÍMPICS" COM A RECURS PER A TREBALLAR LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES EN LA E.S.O.

Maurici Contreras
IES Benicalap. València

1. OBJECTIUS DEL PROJECTE

La revista "Problemes Olímpics" va nàixer fa ja 11 anys amb un xicotet grup de treball format per un equip de professors i professores de Matemàtiques de Secundaria amb l'objectiu de preparar activitats per a preparar les diferents fases corresponents a la provincia de València de l'Olimpíada Matemàtica que organitza la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi" i per a treballar la resolució de problemes. Dels 5 primers professors que van participar en aquells primers números, hem anat evolucionant fins arribar a un equip estable de unes 20 persones, que any rere any anem fent possible la publicació de "Problemes Olimpics" cada dos messos.

Igual què l'Olimpíada Matemática, la revista "Problemes Olimpics" té com a objectiu la promoció i popularització de les matemàtiques, A través d'una selecció d'activitats es pretén millorar la visió i la competència dels estudiants, dels professors i de tota la societat en general respecte a les Matemàtiques. Partim d'una situació com l'actual en la que socialment és majoritària una visió negativa de les matemàtiques. Cal fer un canvi i demostrar que les matemàtiques poden ser populars i divertides. L'Olimpíada Matemàtica pot contribuir a millorar l'apreciació i valoració social de les matemàtiques, mostrant la seua connexió amb la realitat quotidiana i les necesitats dels individus.

Els nostres objectius, per tant, poden resumir-se així:

- Potenciar l'afició per la resolució de problemes.
- Fomentar l'afició per les Matemàtiques, com a repte mental.
- Difondre una visió lúdica i recreativa de les Matemàtiques.
- Afavorir l'aprenentatge d'estrategies i tècniques de resolució de problemes.
- Ajudar als alumnes dels centres interesats a participar en les diferentes fàses de l' Olimpiada Matemàtica d' E.S.O.

2. DESPLEGAMENT DEL PROJECTE

En la següent taula podem veure com ha anat evolucionant el número de professors participants en el projecte, curs rere curs. Vegem que el creixement què s'ha produit és important, de la mateixa forma que la participació en l'Olimpiada.

Els membres que composem el grup fem normalment un total de 10 reunions al llarc del curs per tal de definir el perfil de les activitats a proposar, establir les seues caracteristiques, elaborar material i difrondre-ho als centres participants a l'Olimpiada.

Any	Núm. Components Grup Problemes Olimpics	Núm. Alumnes Fàse Provincial Olimpiada
1988	4	55
1999	5	55
2000	6	66
2001	10	86
2002	16	148
2003	16	196 (46 centres)
2004	18	210
2005	20	250
2006	20	370
2007	20	370(fase comarcal)
2008	22	518(fase comarcal)
2009	22	720(fase comarcal)
2010	24	811 (fase comarcal)

Les dades de l'any 2006 van ser decissius per a introduïr una nova fase provincial de Valencia. Concretament, eixe any vam tindre les següents dades:

Nivell A 180 participants 45 Equips
Nivell B 150 participants 38 Equips
Nivell C 40 participants 10 Equips

Total: 370 participants.

Professorat acompanyant i membres del grup de treball:
131 professors.

Total final: 501 persones.

Des de l'any 2007 es celebren dos fàses en la provincia de Valencia: comarcal i provincial. Allò ha supossat també canvis en la revista, donat què, al introduïr també la fase comarcal, ha augmentat vertiginosament el nombre de pagines, fins a la situació actual, on se publiquen regularment 64 pàgines.

3. La Resolució de Problemes

Les característiques de les activitats què proposem a la revista són:

- Que siguen un repte a les capacitats personals.
- Que la situació proposada estiga al seu abast.
- Que tinguen interés per si mateixes.
- Que estimulen el desig de proposar-les a altres companys.
- Que no siguen "de truc".
- Que la situació que es proposa siga oberta i oferisca diverses possibilitats.

- Que no siga una situació tancada, on únicament hi ha que aplicar una recepta de forma mecànica.

- Que siguen divertides; és a dir, que els contextos estiguen extrets, per exemple, de passatemps, jocs o matemàtiques recreatives.

- Que permeten posar en pràctica diverses estratègies de resolució, com ara: fer una taula, buscar regularitats, codificar i descodificar, fer analogíes, fer diagrames, resoldre subproblemes, etc.

- Que es posen en marxa diversos processos mentals: abstraer, generalitzar, particularitzar, fer raonaments lògics, etc.

- Que es puguen plantejar diverses etapes de resolució.

4. ESTRUCTURA DE LA REVISTA

Amb aquestes idees elaborem un total de cinc números anuals amb periodicitat bimensual, amb activitats i problemes, (dels cinc números, sempre hi ha dos dedicats monogràficament a les proves de l'Olimpiada, un amb les proves de la fase comarcal i provincial de Valencia i l'altre amb les proves de la fase provincial de Castelló i de la fase autonòmica). La tirada de la revista ha anat en creixement, d'acord amb el nombre de socis. Actualment se fan 600 exemplars, els quals es distribuixen als socis i als centres que van participar a l'Olimpiada. Alguns exemplars ens quedaran en la biblioteca del CEFIRE de Torrent com a material de consulta.

L'estructura de la revista ha experimentat diversos canvis, de forma paral.lela a l'Olimpiada. En efecte, abans de l'any 2006 no estava inclòs el tercer cicle de Primària, com passa actualment. L'estructura actual és la següent:

- Introducció, on comentem els objectius de les activitats proposades –una declaració d'intencions –.

- Activitats del nivell C (Tercer cicle de Primària), on presentem enunciats d'activitats per a estudiants com a màxim de 12 anys (6é curs de Primària).

- Activitats del nivell A (Primer cicle de ESO), on presentem enunciats d'activitats per a estudiants com a màxim de 14 anys (2on curs d'ESO).

- Activitats del nivell B (Segon cicle de ESO), on presentem enunciats d'activitats per a estudiants de 16 anys com a màxim (4rt curs d'ESO).

- Solucions, on es resolen els problemes proposats i es clasifiquen pel seu grau de dificultat en una escala de 10 a 50 punts. (10 punts: relativament fàcil; 50 punts: molt difícil).

Amb el pas del temps i l'increment de col.laboradors, hem incrementat la quantitat de seccions. Actualment tenim, a més de les anteriors, la secció "Problema Obert", on proposem un problema de major dificultat, sense mostrar la solució, amb l'ànim de provocar als lectors i animant-los a enviar les seues solucions, les quals són analitzades per l'equip de redacció i publicades, si escau, en un número posterior. D'aquesta forma volem

potenciar la revista com a vehicle de comunicació entre estudiants, professors i tots els interessats per la resolució de problemes. I també tenim la secció de monogràfics que normalment ocupen les pàgines centrals i què, any rere any, s'es fa cada volta més extensa. "Els monogràfics de Problemes Olimpics" tracten d'assumptes relacionats amb la resolució de problemes, l'art, la natura, el nombre d'or, el nombre π, la geometría, els jocs, els materials manipulables, etc.

També disposem de la secció anomenada FE D'ERRADES, en la que incloem, si és el cas, les errades comeses en l'anterior número i les correccions corresponents. D'aquesta manera volem animar als lectors a que col.laboren en la millora de la qualitat de la revista, fent així un vehicle de comunicació sobre la resolució de problemes entre el grup de Problemes Olimpics i els centres.

5. EL FUNCIONALMENT DEL GRUP

En cadascuna de les sessions de treball hem abordat les següents qüestions:

- Discussió sobre la resolució de problemes (tècniques, estratègies, fases de resolució).
- Anàlisi i recerca de bibliografía sobre resolució de problemes.
- Resolució de les activitats de nivell A, B i C aportades pels membres del equip de treball.
- Anàlisi de la resolució de cadascun dels problemes: tècniques, estratègies, etc.
- Classificació de cada una de les activitats resoltes pel seu orde de dificultat en una escala de 10 a 50 punts.

D'altra banda, una de les característiques del comité de redacció de Problemes Olimpics és que sempre participem activament col.laborant amb l'organització de les fàses comarcal i Provincial de les Olimpíades en València. La nostra partipació com a comissió organitzadora de les esmentades fases de l'Olimpíada suposa la preparació no solament de les proves de la fase provincial, si no també la preparació de l'infraestructura necessària per acollir a tots els participants, pares, mares i professors acompanyants, així com tot el que fa a l'organització de l'Olimpiada.

La massiva participació d'alumnes, professors i centres assenyala una tendència què es reflectix també a la mateixa composició del grup de treball, ja que cada curs va creixent, encara què sempre hi ha un nucli estable d'uns 10 professors des de fa ja uns 8 anys. Això suposa un cert grau d'estabilitat al grup, el que fa uns millors resultats en les activitats desenvolupades.

Pensem que aquesta tendència pot aprofundir–se en cursos próxims i valorem positivament l'extensió als centres de la metodologia de treball corresponent a la participació a les diverses fases de l'Olimpíada, ja que aquesta metodologia suposa fixar el punt d'atenció als procesos de resolució i a la reflexió sobre les estratègies emprades pels estudiants, amb la filosofia de que el realment important és el procés mental i no la recepta o el resultat.

6. L'ESTRUCTURA DE LES PROVES EN LA PROVINCIA DE VALÈNCIA

Hi ha tres proves per a cada nivell (A = primer cicle d'ESO, B = segon cicle d'ESO i C=tercer cicle de Primària):

6.1.PROVA INDIVIDUAL.

Consistix en la resolució individual de 6 problemes al llarg d'una hora i mitja. Per a la realització de la prova els alumnes poden utilitzar calculadora científica i/o gràfica, regle graduat, compàs, esquadra, cartabó, instruments de dibuix, com és habitual en qualsevol prova de matemàtiques.

6.2.PROVA DE VELOCITAT.

Aquesta prova té una duració exacta de 50 minuts. Cada equip de 4 participants ha de resoldre 10 problemes al llarg dels 50 minuts, de manera que disposen exactament de 5 minuts per a resoldre cada problema.

6.3.PROVA DE CAMP O ITINERARI MATEMÀTIC.

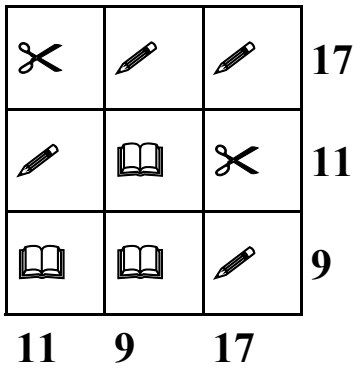
La prova de camp per equips consistix en un itinerari matemàtic per la localitat on se fa l'Olimpiada. Te una duració exacta d'una hora i mitja. En l'recorregut els alumnes han de resoldre uns problemes en uns llocs determinats denominats "estacions", on es proposen qüestions matemàtiques relacionades amb l'entorn urbà de la ciutat on es celebra la prova.

7. MATERIALS REALIZATS

Presentem alguns exemples de les activitats disenyades per l'equip de redacció proposades per al nivell C (tercer cicle de Primària), al nivell A (primer cicle d'ESO) i al nivell B (segon cicle d'ESO) , amb la seua solució i grau de dificultat. Incloem també un exemple d'activitat proposada a la secció PROBLEMA OBERT amb la solució aportada per un dels lectors de PROBLEMES OLÍMPICS:

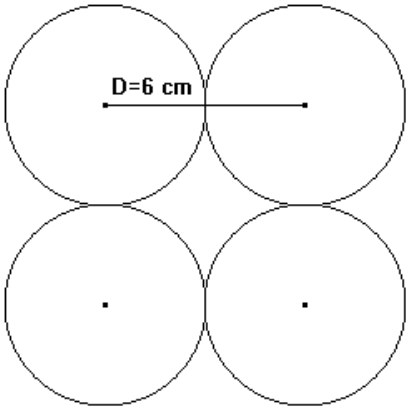
7.1. SÍMBOLS DESCONEGUTS (NIVELL C, TERCER CICLE DE PRIMÀRIA)

Els símbols representen tres números entre 1 i 9. Si sumes les files i les columnes, has d'obtindre els resultats que s'indiquen fora de la taula. Quin valor té cada símbol?



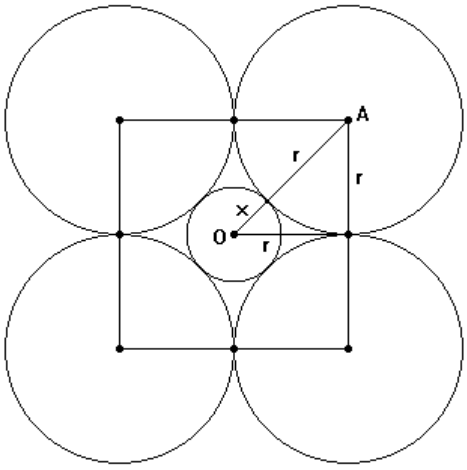
7.2. LES CINC FITXES (NIVELL A, PRIMER CICLE D'ESO)

Quatre fitxes circulars iguals es toquen entre si, tal com es veu en la figura. Esbrina el radi de la major fitxa amb forma circular que pot col·locar-se en el buit que deixen les quatre.



Solució: Siga x el radi de la fitxa tangent a les altres quatre. En la figura s'observa que **x=OA−r.** Però pel teorema de Pitàgores:
$OA^2 = r^2 + r^2 \rightarrow OA^2 = 2r^2 \rightarrow OA = \sqrt{2} \cdot r$ Per tant: $x=OA-r=\sqrt{2} \cdot r - r = \left(\sqrt{2}-1\right) r$. Si r=3 cm, aleshores: $x=\left(\sqrt{2}-1\right) 3 = 1'24$ cm.

Dificultat: 20



7.3. ELS GATS CAÇADORS (NIVELL B, SEGON CICLE D'ESO)

Quatre gats, Xau, Mau, Cau i Lau estan caçant rates. Mau i Lau junts n'han caçat tantes com Cau i Xau junts. Xau ha caçat més rates que Cau. Xau i Lau junts han caçat menys rates que Mau i Cau junts. Si saps, a més, que Mau ha caçat tres rates, quantes n'ha caçat Cau?



Solució: 1 rata.

Siguen X, M, C i L el nombre de rates que cacen Xau, Mau, Cau i Lau respectivament.

M=3; M+L=C+X → 3+L=C+X
X > C
X+L<M+C → X+L<3+C → X+L+X<3+C+X → 2X+L<3+3+L → 2x<6 → x<3
Aleshores X=0, 1 ó 2

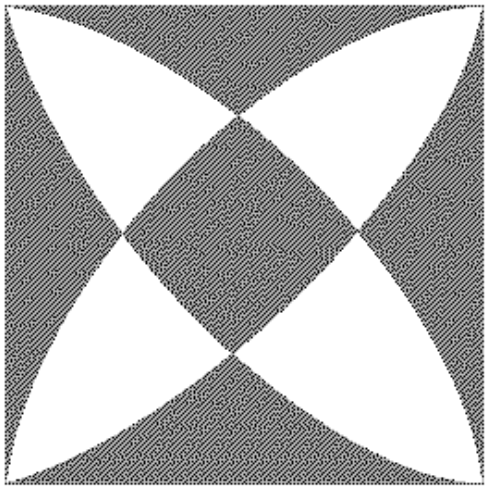
X=0 no pot ser ja que X > C
Si X=1 → C=0 → C+X=0+1=1≠3+L

Per tant X=2, **C=1**, L=0 i M=3

Dificultat: 40

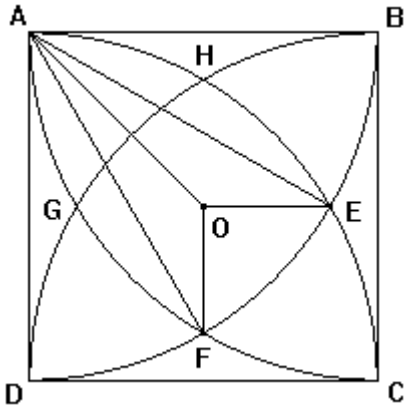
7.4. PROBLEMA OBERT: QUADRATS I ARCS

En aquest quadrat de 10 cm de costat, s'han traçat arcs de circumferència amb centre en cadascun dels vértex. Calcula l'área ombrejada.



Solució: Presentem ací la solució aportada pel nostre company Ricard Peiró i Estruch.

Considerem la següent figura:



Es compleix: AB =AE= AF =1, AO= $\sqrt{2}/2$. L'angle β=∠AOE=135º.
Siga α=∠AEO.

Aplicant el teorema del sinus al triangle AOE: $\frac{AE}{\sin\beta}=\frac{AO}{\sin\alpha}$

$\frac{1}{\sin 135^o}=\frac{\sqrt{2}/2}{\sin\alpha}$, $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, aleshores, l'angle α=∠AEO=30º.

Per tant, l'angle γ=∠EAO=180º−135º−30º=15º. L'angle ∠EAF=30º

Aleshores, l'àrea del sector AEF és: $\text{Àrea sector AEF}=\frac{\pi\cdot 1^2\cdot 30^o}{360^o}=\frac{\pi}{12}$

L'àrea del triangle AEO és:

$$\text{Àrea (AEO)}=\frac{AE\cdot AO\cdot \sin\gamma}{2}=\frac{1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 15^o}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos 30^o}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{8}$$

L'àrea del recinte és: Àrea=4·(Àrea sector − 2 Àrea (AEO))

$$\text{Àrea}=4\cdot\left(\frac{\pi}{12}-2\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{8}\right)=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+1$$

Dificultat: 40

8. CONCLUSIONS

En el grup de treball valorem molt positivament les activitats desenvolupades aquests anys:

- Respecte de l'elaboració de material, l'experiència és molt profitosa per a la tasca quotidiana a les aules. De fet, tots els membres de l'equip han experimentat aquestos materials als seus centres i han observat les seues avantatges i inconvenients. Els materials han sigut emprats per a preparar als estudiants i fer una preselecció dels alumnes representants dels centres a la fase provincial de l'Olimpiada. Molts professors dels centres participants s'han interessat per aquest material.

- Respecte de l'organització de les fases comarcal i provincial, valorem molt positivament la massiva participació dels alumnes i professors dels centres implicats.

El material publicat en Problemes Olimpics se pot dur a les aules de diverses maneres. Hi ha centres que experimenten les activitats dins de la programació habitual formant part dels blocs de continguts. Altres centres dediquen un dia a la setmana a treballar les activitats dins d'un bloc específic de resolució de problemes, fixant l'atenció al procés de resolució i a les estratègies emprades. Altres centres proposen les activitats únicament als estudiants més competents i fora de l'horari habitual, per tal de seleccionar els millors per a participar a l'Olimpíada. Hi ha centres que organitzen concursos de resolució de problemes per a triar als xiquets que aniran després a la fase comarcal de l'Olimpíada.

Pensem que el millor tractament d'aquest material consistix en treballar regularment les activitats a l'aula inicialment amb tots els estudiants i aprofitar-les per a aprofundir en continguts específics, analitzar els procesos de resolució, tractar els continguts del bloc de resolució de problemes (estratègies, fases de resolució), fer un tractament de la diversitat en sentit positiu, de tal manera que la selecció dels millors estudiants vindrá donada de forma natural, com a consequència de tot un procés d'entrenament en la resolució de problemes.

Ací va un llistat de professors què han col.laborat amb "Problemes Olimpics", formant part del seu comité de redacció. Volem agraïr a tots el seu treball i dedicació

Francisco Javier Alba Alejos
Sergio Alfonso Espuig
Victòria Almudever Ferrer
Josep Amorós Tapia
Mª Dolors Arnal Bertomeu
Josep Ballester Díez
Agustín Ballesteros Colom
Mª Teresa Briz Alabau
Ricard Cambra Belda
Maria José Candelas Megía
Francesc Casamitjana Gàmez
Josep Antoni Chaveli Gascón
Vicente Chenoll Mora
Maurici Contreras del Rincón

Samuel Cortés García
Mª Dolors Delgado Ortega
Mariano de Heredia Gónzález
Pilar Díez del Olmo
Carmen Maria Domingo Boluda
Víctor Ferrando Donet
Mercé Fort Iborra
Marcelino Garcés Moret
Nicasio García Alfaro
María García Monera
Maria Jesús González Beneyto
Mónica Laparra Ibáñez
Antonio Ledesma Lòpez
Encarna López Gómez
Antoni Losas González

Mª Jesús Lozano Lacalle
Eduardo Llopis Castelló
Josep Llorenç Llisó Valverde
Miquel Marco Cotaina
Josep Manuel Martínez Canet
José Daniel Miralles Lisande
Martín Montoya Molina
Encarna Moreno Ruiz
Agustín Muedra Jornet
José David Muñoz Ponce
Jesús Muñoz Serrano
Mª José Navarro Antón
Mari Carme Olivares Iñesta

Ruth Orts García
Mª Josep Peidro i Torres
Carmen Pellicer Císcar
Ricardo Pérez Navarro
Tomás Queralt Llopis (director)
Mª Carmen Raga Benedicto
Jose Luis Requena Sala
Juan Miguel Ribera Puchades
Baltasar Ruiz Bellver
César Sanmatías Grande
Alfonsa Sillero Arroyo
Mª Iolanda Zaragoza García
Isabel Terraes Bentel

CALENDARIO MATEMÁTICO

Floreal Gracia
IES Politécnico de Castellón

1. INTRODUCCIÓN

El **CALENDARIO MATEMÁTICO** es una actividad de la *Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana* "AL KHWARIZMI" (SEMCV). Pretende proporcionar al profesorado un instrumento para animar a los estudiantes a la resolución de problemas matemáticos, plantear retos a sus capacidades, presentar curiosidades, proponer que indaguen sobre la historia de las matemáticas, suscitar inquietudes por las relaciones numéricas y las formas geométricas y relacionar las matemáticas con otras manifestaciones culturales.

La selección de las actividades se realiza pensando en estudiantes que cursan la Enseñanza Secundaria, ESO y Bachilleratos. Los problemas se pueden aprovechar para complementar, profundizar o reforzar la programación de la materia.

2. ANTECEDENTES

El proyecto empezó en 1992 con calendarios que ya tenían un formato similar al actual y de los cuales se enviaban fotocopias a los diferentes Centros de Profesores de la Comunidad Valenciana y algún otro de otras Comunidades. Éstos, a su vez, hacían fotocopias para cada uno de los centros, y ya el profesor de matemáticas los fotocopiaba para sus alumnos.

El calendario tuvo una difusión temporal en la revista SUMA en los números 14-15, 16, 17 y 19. También fue presentado en *Jornades de la Comunitat* y varias JAEM.

Para motivar la utilización del Calendario Matemático en clase, se convocó durante el curso 1995/96 un concurso que premiara a las soluciones individuales más ingeniosas y al mejor trabajo en grupo presentado por un centro. La idea produjo que recibiéramos durante estos años muchas soluciones a las actividades planteadas, algunas de ellas verdaderamente ingeniosas.

El siguiente paso fue realizar la impresión en imprenta y distribuirlo en todo el territorio español. Los gastos de impresión y distribución los asumió desde el curso 1998/99 un patrocinador, Ediciones SM.

3. CARACTERÍSTICAS

3.1. CONFECCIÓN

Cada mes se encarga una persona o grupo, con el fin de que distintas personas puedan aportar sus conocimientos e intereses por las Matemáticas y su divulgación y que, por otra parte, no se agoten las ideas en un corto espacio de tiempo. Con ello podemos conseguir que no se convierta en una tarea agobiante para una persona y que el trabajo se planifique con suficiente antelación.

La maquetación la realiza una persona especializada de SM con la supervisión del coordinador del Calendario Matemático.

3.2. Contenidos

Con el fin de tener continuidad en la estructura del calendario y variedad en el contenido, se proponen algunas secciones, las cuales pueden ser ampliadas/modificadas de acuerdo al criterio del autor.

a) La parte central la constituye una colección de problemas matemáticos: geométricos, numéricos, algebraicos y probabilísticos. El enunciado suele ser conciso e intenta atraer a los estudiantes hacia su resolución.

b) Análisis geométrico de obras de arte: pintura, escultura, arquitectura, etc. Mosaicos y diseños tanto actuales como de la antigüedad.

c) Diseños geométricos en la naturaleza y en objetos realizados por distintas culturas: simetrías, crecimiento, etc.

d) Figuras y objetos imposibles, ilusiones ópticas.

e) Hechos históricos interesantes ocurridos a matemáticos célebres.

f) Paradojas, anécdotas, sucesos, chistes o chascarrillos que tengan que ver con las matemáticas.

3.3. Distribución

El compromiso de SM es el de distribuir un ejemplar a cada Instituto del país, cosa que la mayor parte de las veces no se produce, ya que sólo lo utilizan como presentación y/o propaganda.

La SEMCV recibe un mínimo de 500 ejemplares para la distribución entre sus asociados y otros 100 para envíos a autores y otras Sociedades Matemáticas.

4. Concurso de Resolución de Actividades. Convocatoria

1. A la solución más ingeniosa

a) Podrá participar en este apartado todo estudiante de Enseñanza Secundaria (ESO, Bachillerato) que, teniendo el Calendario Matemático, dé respuesta (solución / comentario) a una actividad planteada un día cualquiera.

b) El Seminario/Departamento de Matemáticas (profesor o profesora) seleccionará las mejores soluciones del colegio/instituto o curso, enviando sólo una por cada día e incluyendo: nombre completo del estudiante, curso y nivel, centro, dirección, teléfono y correo electrónico del centro.

c) Se otorgarán tres premios a las soluciones más ingeniosas.

d) Los fallos son trimestrales, tras los cuales recibirán un/os libro/s por cortesía de Ediciones SM.

2. Al trabajo en grupo

a) Podrá participar en este apartado un grupo de estudiantes de cualquier nivel de Enseñanza Secundaria de un centro de España.

b) Deberá presentarse la solución a todos los problemas planteados para un mes (en caso de figuras, paradojas, datos históricos, etc., un comentario del mismo y su relación con las Matemáticas).

c) Deberá indicarse el nombre, dirección, teléfono y correo electrónico del centro, el nombre del profesor o profesora que coordine el trabajo, el curso y nivel y un listado de los alumnos participantes.

d) Serán premiados 3 equipos por convocatoria. Los criterios de selección serán:
- La solución más completa, ingeniosa y mejor presentada.
- El equipo/curso más constante y que envíe soluciones a todos los meses.

e) Sólo podrá participar un grupo o curso por Centro, seleccionando el seminario/ departamento (profesor o profesora) aquel que considere el mejor.

f) Los agraciados recibirán un/os libro/s, tras finalizar el curso escolar, por cortesía de Ediciones SM.

3. Presentación y selección

a) El plazo de recepción será hasta el último día del mes siguiente al que corresponde la actividad.

b) El período anual, a efectos de enviar soluciones, se considerará de septiembre a junio (curso escolar).

c) Las soluciones deberán enviarse a:
IES La Plana
A.A. Rafael Martínez Calafat - Departamento de Matemáticas
Camí La Plana, 13; 12004-Castellón
Teléfono: 964221820 Fax: 964728429

d) La comisión seleccionadora estará constituida por:
** El coordinador del Calendario Matemático*
** Dos miembros de la Sociedad AL KHWARIZMI*

e) Las soluciones presentadas podrán ser publicadas cuando la comisión seleccionadora lo considere oportuno.

5. SITUACIÓN ACTUAL

5.1. NUEVO CONVENIO

Ante la crisis económica que afecta a todas las empresas y el cambio de coordinador del Calendario Matemático, es momento de negociar con Ediciones SM u otra editorial un convenio para el futuro.

5.2. UN CALENDARIO

Se adjunta, en formato pdf, como ejemplo, el Calendario del mes de septiembre de 2010.

LES RUTES MATEMÀTIQUES A VALÈNCIA

Tomàs Queralt
CEFIRE de Torrent

Dins de l'oferta que la Càtedra de Divulgació de la Ciència de la Universitat de València ofereix als centres educatius de Secundària per a celebrar la Setmana de la Ciència i la Tecnologia, es troba la realització de les Rutes Matemàtiques a València. Es tracta d'una iniciativa de Luis Puig, Onofre Monzó i Tomás Queralt que, a la vista de la poca oferta de propostes relacionades amb les matemàtiques, es va oferir per a mostrar la relació de les matemàtiques amb la realitat i l'entorn. La Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana per tant ha col·laborat en esta activitat a través nostra mitjançant el disseny, coordinació i elaboració del material adient per a portar endavant cadascuna de les rutes. El resultat són cinc rutes per determinats espais de la ciutat de València en la que els estudiants de secundaria treballen diferents aspectes de les matemàtiques que es van trobant al recorregut.

Els objectius que ens plantegem a l'hora de fer l'activitat són:

- Relacionar les matemàtiques amb la vida.
- Potenciar les possibilitats del medi com a recurs didàctic per a estudiar la funcionalitat de les matemàtiques.
- Descobrir els elements de l'àmbit de les matemàtiques presents en la realitat que ens envolta.
- Facilitar l'ús de determinades estratègies que permeten analitzar i sistematitzar.
- Comprendre l'estructura urbanística de la ciutat de València des dels seus orígens.
- Apreciar la bellesa generada per determinats elements geomètrics.

Entre altres continguts, es treballen els següents:

- Estudiar la visió històrica del desenvolupament de les matemàtiques.
- Comparar diversos sistemes de numeració o diferents mètodes de càlcul usats per diferents cultures.
- Organització i mesura de l'espai i del temps.
- Descripció de formes poligonals i geomètriques.
- Mesures i proporcions en edificis i carrers que serveixen de referència.
- Estudi de personatges relacionats amb les matemàtiques.
- Explicar diferents respostes des de les matemàtiques a uns determinats problemes quotidians.

La proposta consisteix en un recorregut per determinats carrers de la ciutat de València, al llarg del qual hi ha unes parades o estacions en la que es plantegen determinades qüestions que tenen a veure amb l'ús social que es fa de les matemàtiques, o bé s'explica com des de les matemàtiques es dona resposta a determinats problemes que de la vida quotidiana. La Universitat organitza la visita, portant als estudiants i professorat des del Centre Educatiu fins el principi de la ruta, i disposa d'un equip de monitors degudament formats que s'encarreguen de portar endavant el recorregut. També facilita a cada estudiant un dossier

amb el recorregut i les activitats proposades, així com una motxilla amb el material precís per a fer les mesuraments precisos i recollir la informació de camp: cinta mètrica, brúixola, clinòmetre, calculadora, llibreta, tissores, rotuladors, joc de regles, transportador d'angles, mapa de la ciutat,... La motxilla es facilita a quatre o cinc alumnes de manera que el treball de camp es farà per grups.



Es tracta d'una activitat en la que el professor ha de deixar clar als estudiants que no es tracta de anar-se'n d'excursió sinó que es tracta de fer la classe al carrer, i que per tant es va a treballar. Per això es proposa la següent pauta d'actuació:

1. Sessió prèvia a l'eixida a la classe.

   Ací cal explicar qué és el que es va fer, quin va a ser el recorregut, quina será la nostra intervenció, etc. de manera que els estudiants disposen de tota la informació prèvia necessària per a conèixer el que es va a fer.

2. Realització de la pròpia ruta: treball de camp.

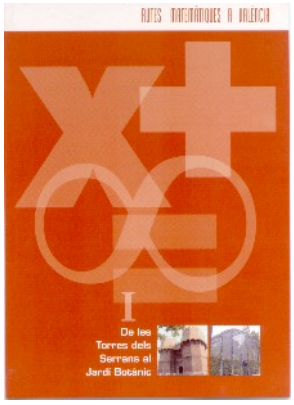
   La ruta la porten endavant uns monitors, recent llicenciats o estudiants d'últim any, que expliquen a cada parada els conceptes que cal treballar i proposen les activitats que els alumnes realitzen. Els estudiants prenen les dades que fan falta per a fer els càlculs, prenen mesures, fotografies i totes aquelles dades que els pot fer falta. Per tant, el que es tracta és de recollir tota la informació que siga possible a partir de les proves que es proposen, i prestar la màxima atenció a la informació donada.

3. Anàlisi i posterior obtenció de càlculs i informe final.

   Es tracta d'elaborar el treball de síntesi a partir de les dades recollides a la realització de la ruta. És ací on els alumnes han de desenvolupar la seua capacitat de descripció, anàlisi i síntesi per tal de fer un informe que tinga tota el treball desenvolupat.

També cal tindre en compte que els carrers amb nom de matemàtic donen peu a parlar de determinats aspectes de la història de les matemàtiques i dels protagonistes de determinats fets. Així, a la ciutat de València tenim carrers dedicats als següents matemàtics:

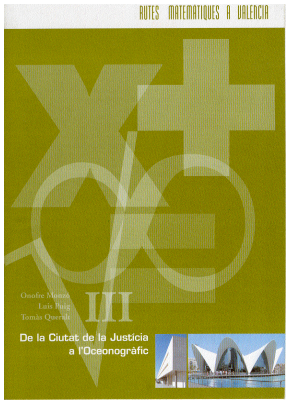
- Jerónimo Muñoz
- Padre Tosca
- José Zaragozá
- Jorge Juan
- Ciscar y Ciscar
- Miquel Marzal
- Reyes Prósper
- Juan Bautista Corachán



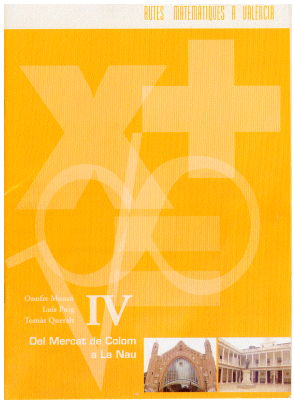
Ruta I: De les Torres dels Serrans al Jardí Botànic



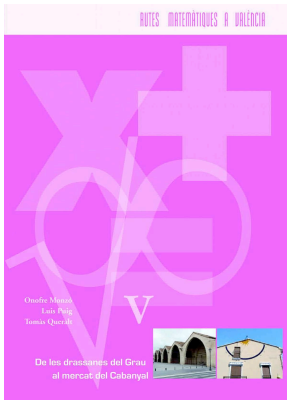
Ruta II: De l'Escola de Magisteri "Ausiàs March" a la Ciutat de les Arts i les Ciències



Ruta III: De la Ciutat de la Justícia a l'Oceanogràfic



Ruta IV: Del Mercat de Colón a La Nau



Ruta V: De les Drassanes del Grau al mercat del Cabanyal

TALLERS

CONSTRUCCIÓ D'ENVOLUPANTS DE CORBES AMB CABRI

Ricard Peiró
IES Abastos. València.

1. INTRODUCCIÓ

El món de les corbes és fascinant per als matemàtics per la seua bellesa i per l'estudi de les seues propietats.

Mostrarem l'estudi de corbes clàssiques (les còniques, la cardioide, la nefroide, el deltoide, l'astroide) con envolupants. El treball ha estat elaborat amb ajut dels programes informàtics Cabri Géomètre i MuPAD.

La introducció de materials informàtics en l'aula, comporta un gran canvi metodològic. Permet l'anàlisi dels resultats agilitant els processos de càlcul i ajuden a la visualització de situacions difícils d'abstraure a partir d'una expressió verbal o a la pissarra.

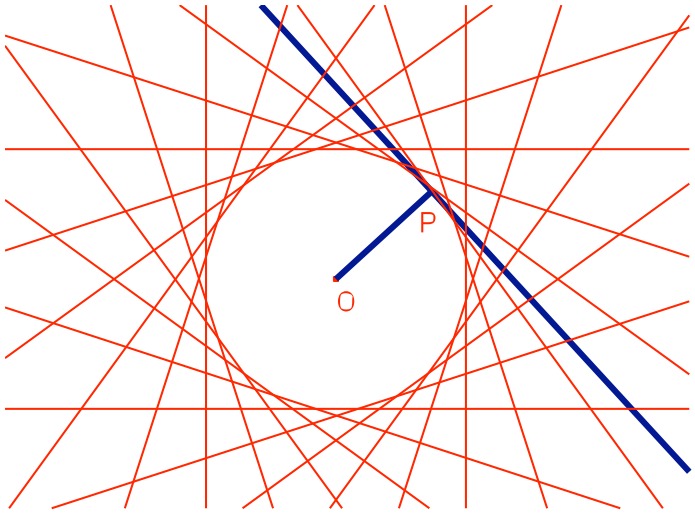
Aquest treball pot ser interdisciplinari amb el departament de Plàstica i Visual on els alumnes poden construir les envolupants amb fils estirats sobre cartró, com es pot veure en les imatges finals, a bé dibuixar-les amb regles i compàs

1.1. ENVOLUPANT.

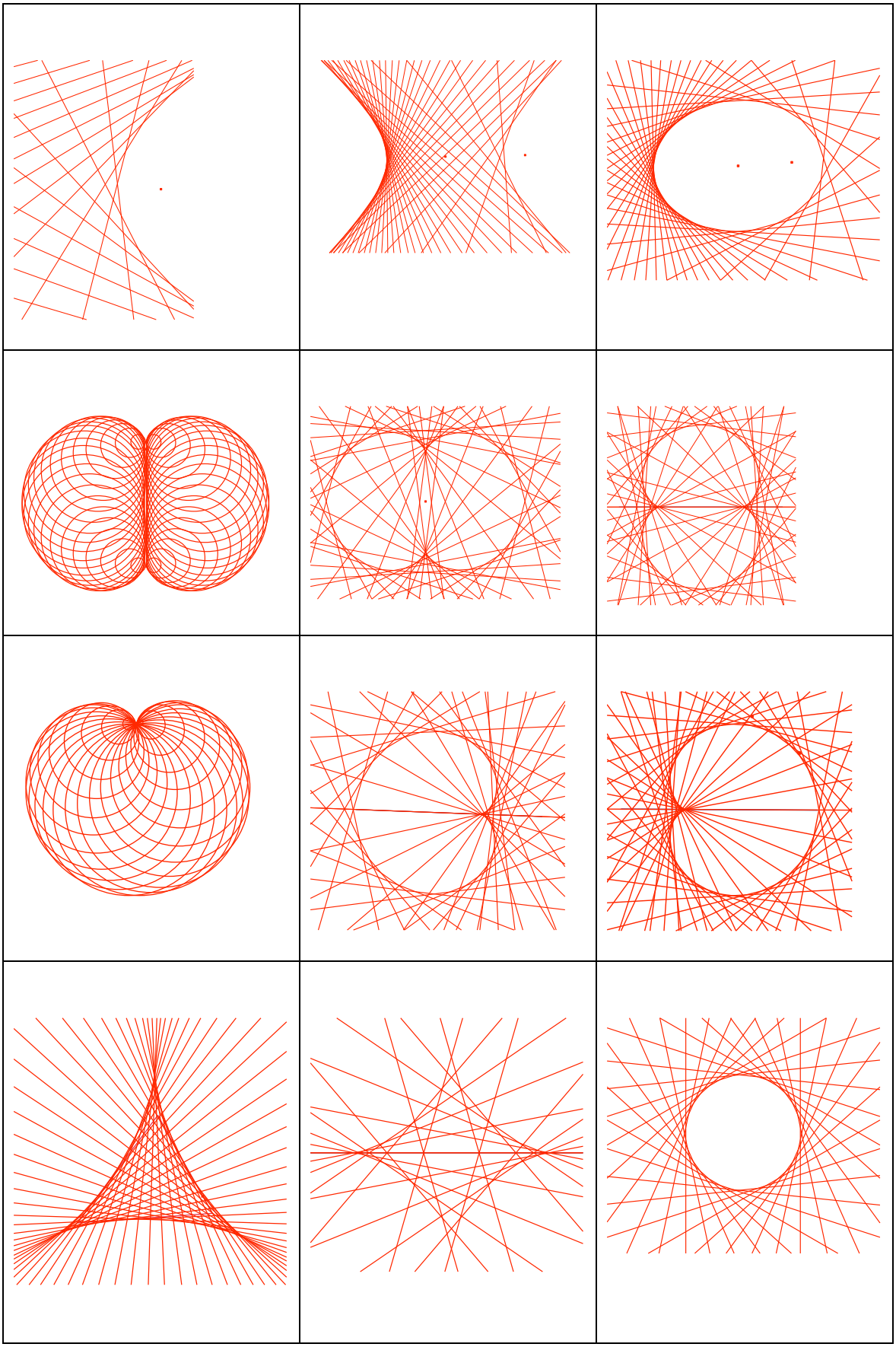
Una corba envolupant és una corba tangent a totes les d'una família de corbes donada. Espanyol: envolvente, francés: enveloppante, anglés: envelope.

1.2. LA CIRCUMFERÈNCIA.

Donat el segment $\overline{OP}$ de longitud constant, O fix i P variable.
L'envolupant formada per les rectes perpendiculars sobre els segments $\overline{OP}$ en el punt P, és la circumferència de centre O.



Algunes corbes envolupants



2. ELS LLOCS GEOMÈTRICS AMB CABRI. LA PARÀBOLA I LA CARDIOIDE.

Un lloc geomètric és un conjunt de punts determinats per una o diverses condicions.

La paràbola és el lloc geomètric dels punts del plànol que equidisten d'una recta anomenada directriu i d'un punt anomenat focus.

2.1. CONSTRUCCIÓ AMB CABRI DE LA PARÀBOLA COM A LLOC GEOMÈTRIC:

a) Dibuixeu la recta d (directriu).

b) Dibuixeu un punt F (focus) exterior a la recta d.

c) Dibuixeu un punt H sobre la recta d.

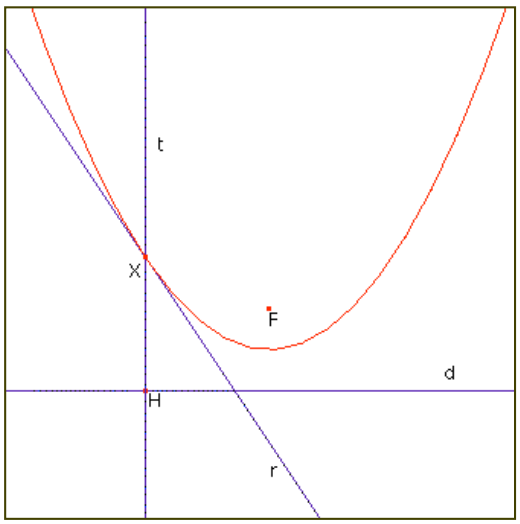
d) Dibuixeu la recta t perpendicular a la recta d que passa pel punt H.

e) Dibuixeu la recta r mediatriu al segment $\overline{FH}$.

f) Feu la intersecció de les rectes r, t. Anomeneu el punt X.

g) Comproveu que $d(X,F) = d(X,d) = d(X,H)$.

h) Dibuixeu el lloc geomètric del punt X al variar H sobre la recta d.



2.2. CONSTRUCCIÓ AMB CABRI DE LA CARDIOIDE COM A LLOC GEOMÈTRIC:

a) Obriu els eixos coordenats d'origen O.

b) Dibuixeu un punt A sobre l'eix d'abscisses.

c) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre A que passa pel punt O.
El radi de la circumferència és $R = \overline{AO}$.

e) Dibuixeu un punt M sobre la circumferència C_1.

e) Dibuixeu la recta r que passa pels punts O, M.

f) Dibuixeu els punts P, P' de la recta tal que $\overline{MP} = \overline{MP'} = 2R$.

Dibuixeu la circumferència C_2 de centre M i radi $R = \overline{AO}$.

Feu la intersecció N de la circumferència C_2 i la recta r.

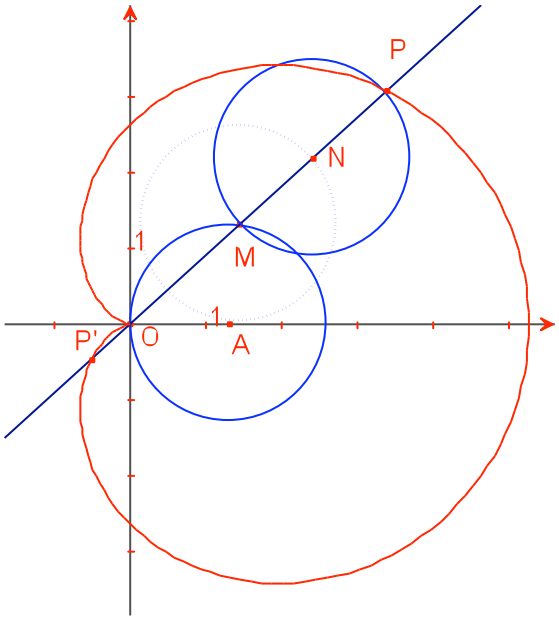
Dibuixeu la circumferència C_3 de centre N que passa per M.

Feu la intersecció P de la circumferència C_3 i la recta r.

Fe el punt simètric P' del punt P respecte de M.

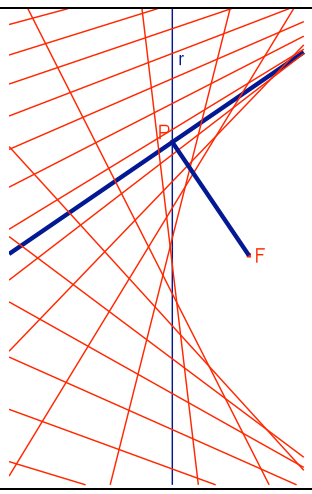
g) Dibuixeu el lloc geomètric del punt P al variar M.

h) Dibuixeu el lloc geomètric del punt P' al variar M.

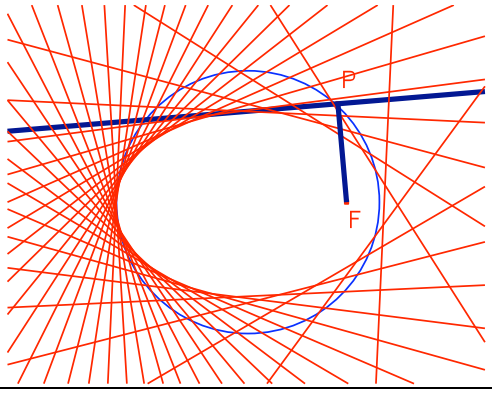


3. CONSTRUCCIÓ DE LES ENVOLUPANTS AMB CABRI.

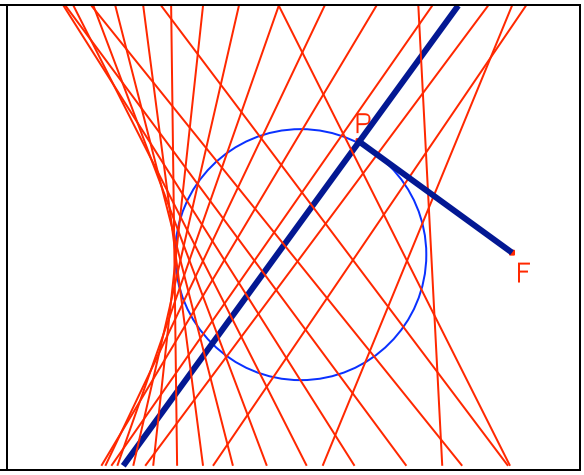
3.1. LA PARÀBOLA

Siga una recta r Siga F un punt fix exterior a la recta r Siga P un punt de la recta r Siga el conjunt de rectes perpendiculars a FP en P. La paràbola de focus F simètrica a la recta perpendicular a r que passa per F és l'envolupant d'aquest conjunt de rectes.	

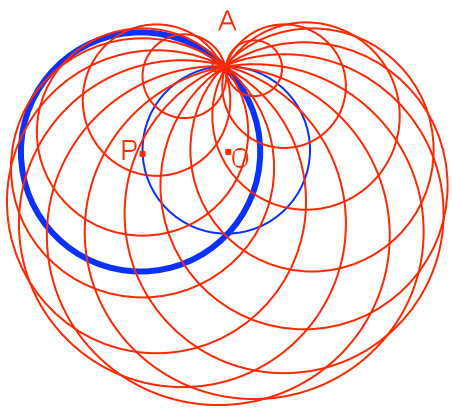
3.2. L'EL·LIPSE

Siga una circumferència C. Siga F un punt interior a la circumferència. Siga P un punt de la circumferència C. Siga el conjunt de rectes perpendiculars a FP en P. L'el·lipse de focus F i eix major el diàmetre la circumferència C és l'envolupant d'aquest conjunt de rectes.	

3.3. LA HIPÈRBOLA.

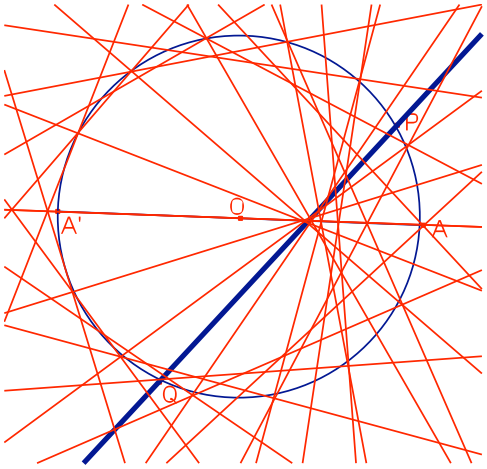
Siga una circumferència C. Siga F un punt exterior a la circumferència. Siga P un punt de la circumferència C. Siga el conjunt de rectes perpendiculars a FP en P. La hipèrbola de focus F i eix major el diàmetre la circumferència C és l'envolupant d'aquest conjunt de rectes.	

3.4.LA CARDIOIDE 1

Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA}$. Siga P un punt de la circumferència anterior. Siga la circumferència de centre P que passa per A. Siga conjunt de les circumferències de centre P que passen per A. La cardioide és l'envolupant d'aquest conjunt de circumferències.	

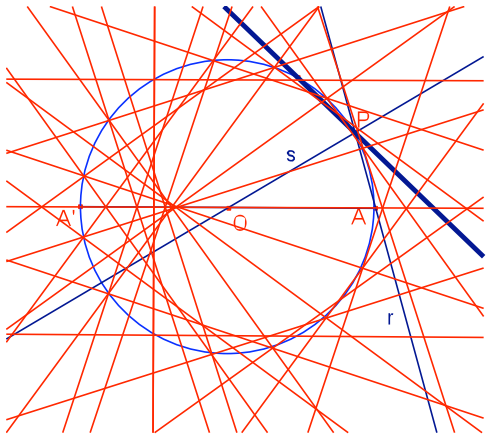
3.5.LA CARDIOIDE 2

Siga la circumferència de diàmetre AA' i centre O
Siga P un punt sobre la circumferència.
Siga un punt Q sobre la circumferència tal que es té la igualtat dels arcs: $A'Q = 2 \cdot PA$.
Siga la recta r que passa pels punts P, Q.
Siga el conjunt de rectes que passa per P, Q al variar P sobre la circumferència. La cardioide és l'envolupant d'aquest conjunt de rectes.



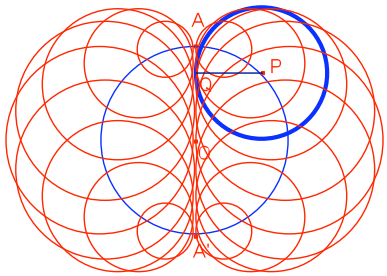
3.6.LA CARDIOIDE 3

Siga la circumferència de diàmetre AA' i centre O.
Siga P un punt sobre la circumferència.
Siga la recta r que passa per P, A.
Siga la recta s que passa per P, O.
Siga la recta t simètrica de la recta r respecte de la recta s.
Siga el conjunt de rectes t al variar P sobre la circumferència. La cardioide és l'envolupant d'aquest conjunt de rectes.



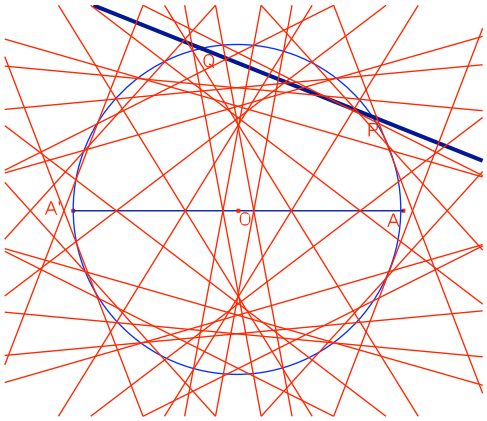
3.7.LA NEFROIDE 1

Siga la circumferència de diàmetre AA' i centre O.
Siga P un punt sobre la circumferència.
Siga Q la projecció de P sobre el diàmetre AA'.
Siga conjunt de les circumferències de centre P que passen per Q. La nefroide és l'envolupant d'aquest conjunt de circumferències.



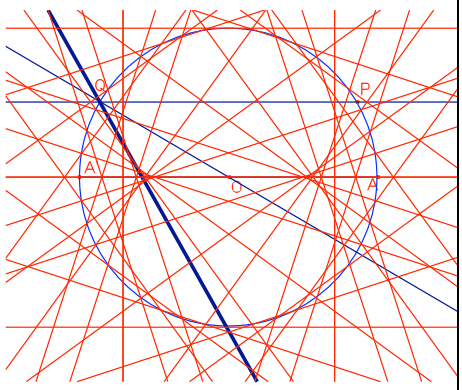
3.8.La nefroide 2

Siga la circumferència de diàmetre AA' i centre O.
Siga P un punt sobre la circumferència.
Siga un punt Q sobre la circumferència tal que es té la igualtat d'arcs: $PQ = 2 \cdot AP$.
Siga la recta r que passa pels punts P, Q.
Siga el conjunt de rectes que passa per P, Q al variar P sobre la circumferència. La nefroide és l'envolupant d'aquest conjunt de rectes.



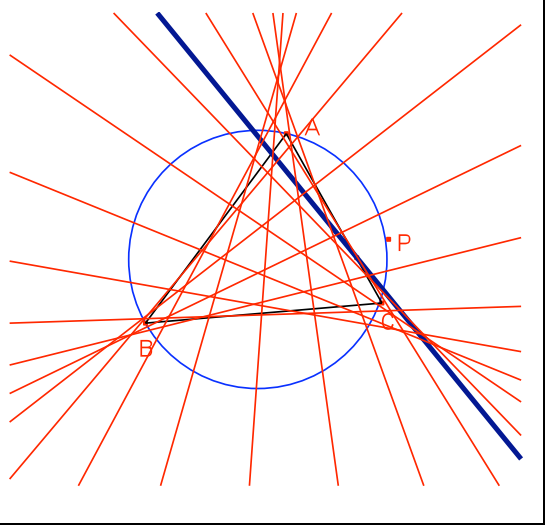
3.9.La nefroide 3

Siga la circumferència de diàmetre AA' i centre O.
Siga P un punt sobre la circumferència.
Siga la recta r que passa per P Q (Q de la circumferència) i és paral·lela al diàmetre AA'.
Siga la recta s simètrica de la recta r respecte de OQ.
Siga el conjunt de rectes r al variar P sobre la circumferència. La nefroide és l'envolupant d'aquest conjunt de rectes.



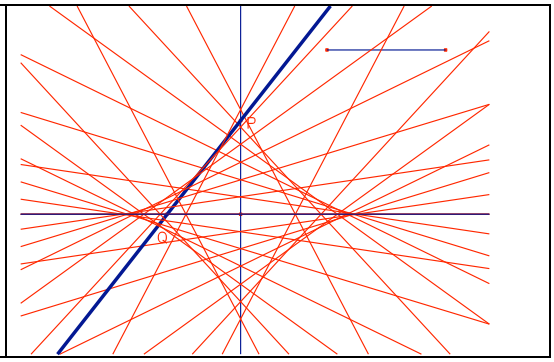
3.10.El deltoide

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga *C* la seua circumferència circumscrita.
Siga P un punt de la circumferència *C*.
Siga r la recta de Simson de P respecte del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga el conjunt de rectes r al variar P sobre la circumferència. El deltoide és l'envolupant d'aquest conjunt de rectes.



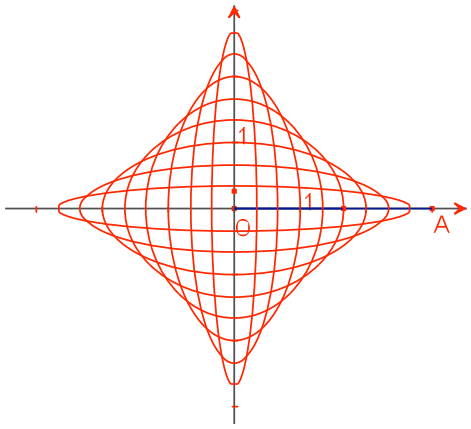
3.11.L'ASTROIDE

Siga PQ un segment constant P sobre l'eix d'ordenades i Q sobre l'eix d'abscisses.
Siga la recta r que passa per P, Q.
Siga el conjunt de rectes r al variar P l'eix d'abscisses. L'astroide és l'envolupant d'aquest conjunt de rectes.



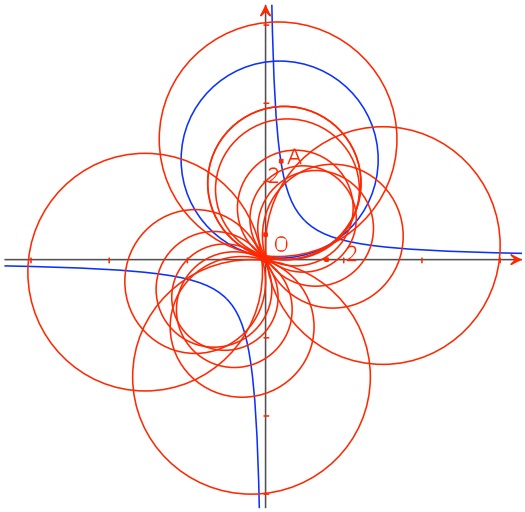
Siga $a > 0$.

L'envoltant de la família d'el·lipses $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{(a-c)^2} = 1$, $c \in]0,a[$ és l'astroide d'equació cartesiana $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a = \overline{OA}$.

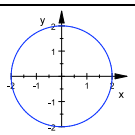


3.12.LA LEMNISCATA DE BERNOULLI

Donada la hipèrbola equilàtera $y = \frac{k}{x}$, i una punt A de la hipèrbola la lemniscata de Bernoulli és l'envolupant de les circumferències de centre A que passen per l'origen de coordenades, al variar sobre la hipèrbola.



4. FÓRMULES DE LES CORBES:

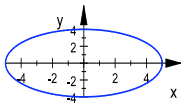


Circumferència

$x^2 + y^2 = 4$

$\rho = 2$ (polar)

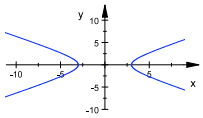
$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$



El·lipse

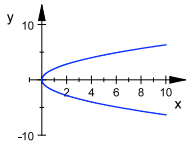
$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

$\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$



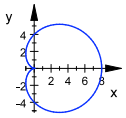
Hipèrbola

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$



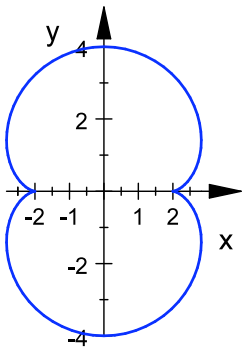
Paràbola

$x = \frac{1}{4}y^2$



Cardioide

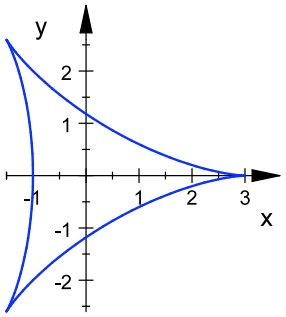
$\rho = 4(1 + \cos t)$ (polar)

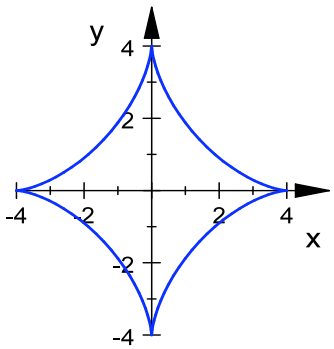


Nefroide.

Epicicloide de 2 voltes.

$\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$





Deltoide

Hipocicloide de 3 voltes

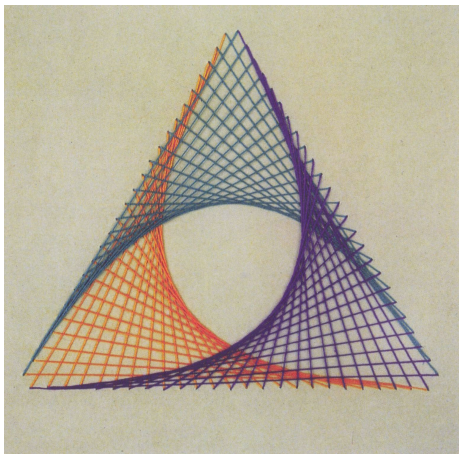
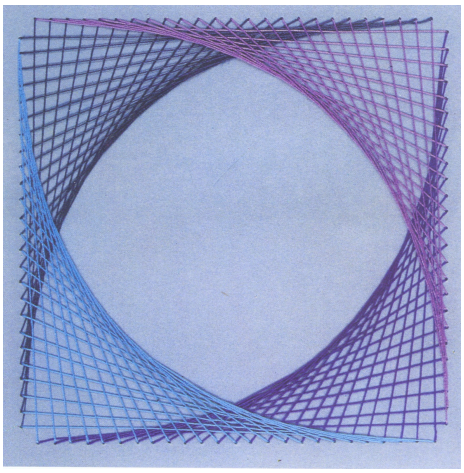
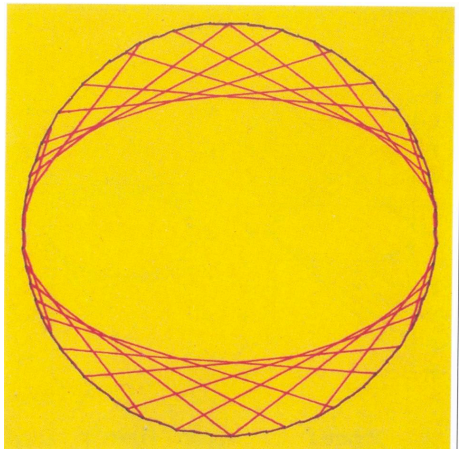
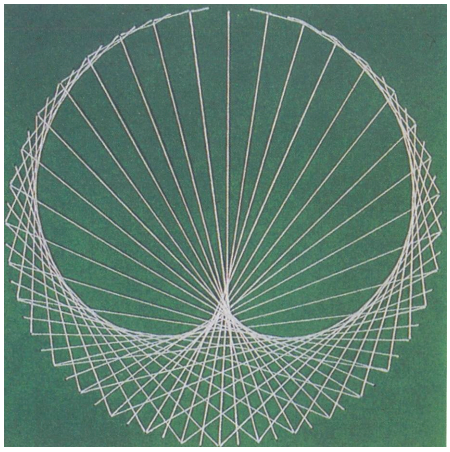
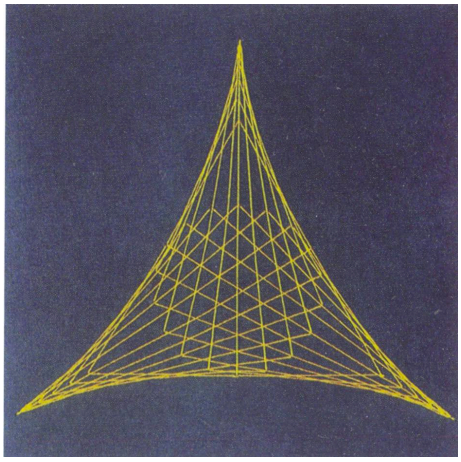
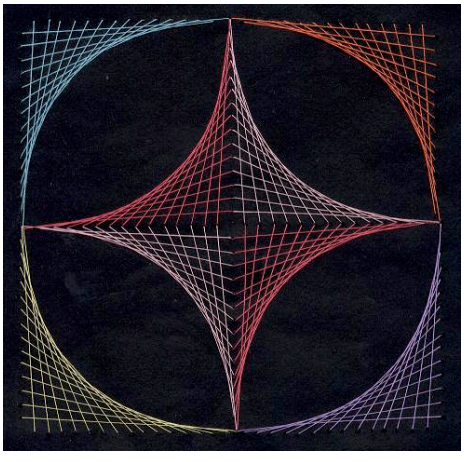
$\begin{cases} x = 2\cos t + \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$

Astroide

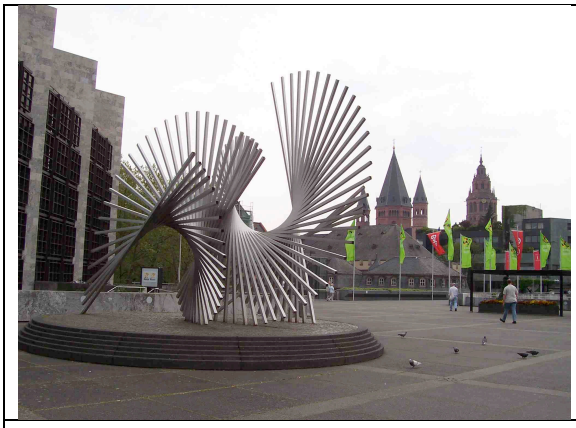
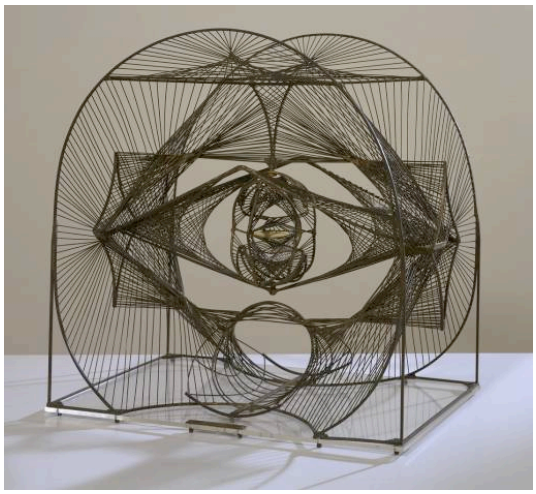
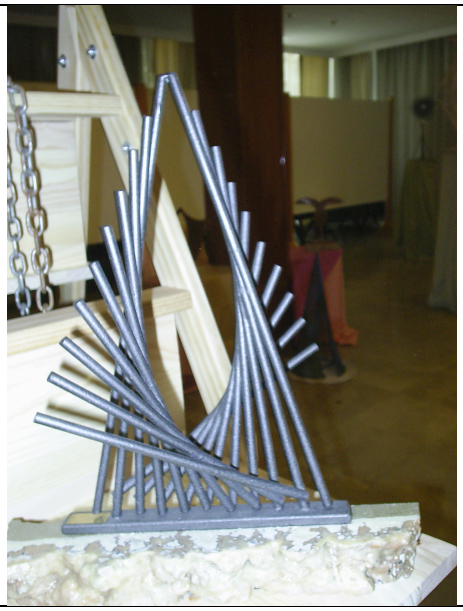
Hipocicloide de 4 voltes

$\begin{cases} x = 3\cos t + \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$

5.TREBALLS AMB FILS ESTIRATS

	
Tres paràboles en un triangle	Quatre paràboles en un quadrat
	
Una el·lipse en una circumferència	Una cardioide en una circumferència
	
El deltoide	La astroide i quatre paràboles

6.DE LES ENVOLUPANTS PLANES A LES TRES DIMENSIONS.

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A. Alfaro. Magúncia</td><td>A. Alfaro. València</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A. Pevsner</td><td>B. Prades</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B. Hepworth</td><td>Ch. Perry</td></tr>
</table>

BIBLIOGRAFIA:

Boltianski, V. G. *La envolvente*. Ed. Mir. Moscou. 1977.

Vasíliev, N. B; Gtenmájer, V.L. *Rectas y curvas*. Ed. Mir. Moscou. 1980.

Pedoe, D. *La geometría en el arte*. Ed. Gustavo Gili. Barcelona. 1979.

Redón Gómez, A. *Geometría paso a paso.* Ed. Tébar. Madrid. 2000.

Millington, J. *Curve Stitching*. Ed. Tarquin publications. 2007.

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD
CON LA CLASSPAD 330

Mauricio Contreras
IES Benicalap. Valencia.
Universitat de València

0. INTRODUCCIÓN

Con la calculadora CAS ClassPad 330 de CASIO es muy fácil analizar datos estadísticos, dada la potencia de sus gráficos y la sencillez de manejo de los distintos menús de estadística, lo que permite un ahorro de tiempo en la realización de los cálculos y un mejor análisis de los resultados. Asimismo, la calculadora dispone de menús con todas las distribuciones estadísticas usuales en cálculo de probabilidades, además de menús específicos de inferencia estadística. Con este taller se pretende estudiar el manejo de esta calculadora y su utilidad para el tratamiento de algunos contenidos de Estadística y Probabilidad en ESO y Bachillerato.

El taller está dividido en cuatro partes:

1) Operaciones básicas de la calculadora gráfica ClassPad 300: a) representación de funciones y b) resolución de problemas aritméticos y algebraicos.

2) Estadística descriptiva: a) gráficos y parámetros estadísticos; b) análisis de regresión a partir de una nube de puntos

3) Cálculo de probabilidades: a) leyes de los grandes números; b) simulaciones; c) Distribuciones de probabilidad:

4) Inferencia estadística: a) estimación; b) contraste de hipótesis.

A continuación se muestran algunos ejemplos de las actividades desarrolladas en el taller:

1. OPERACIONES BÁSICAS

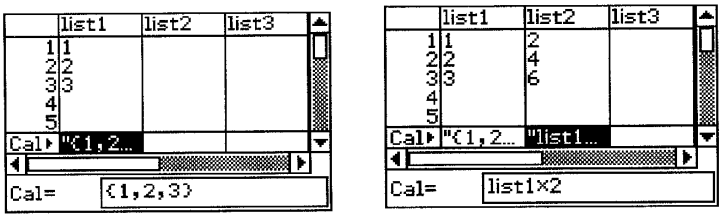
Al pulsar el botón Menú de la barra situada en la pantalla de la Classpad y tocar el icono 

. se inicia la aplicación Estadística y se muestra la ventana del editor de listas.

Usando el lápiz táctil, podemos efectuar un paseo por las distintas opciones de los menús y las barras de herramientas. Tocando el botón de flecha hacia la derecha [▸] de la barra de herramientas veremos más opciones. Para volver a la barra de herramientas normal, basta tocar [◂].

1.1. TRABAJANDO CON LISTAS

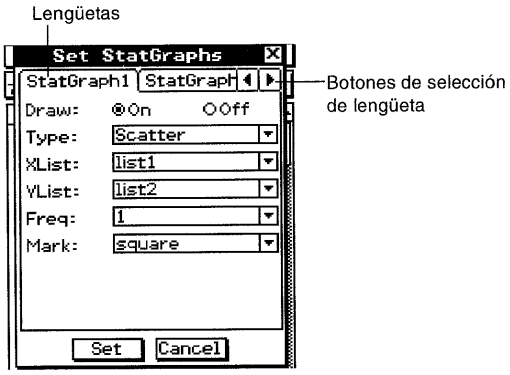
Podemos editar una lista introduciendo el nombre de la lista y sus valores en la columna correspondiente. También podemos usar una fórmula para definir la lista, usando para ello la celda Cal, tal como se muestra en las siguientes figuras:



Podemos cambiar el nombre de una lista, eliminar alguno de sus elementos o toda la lista, almacenar una lista en memoria, ordenarla ascendente o descendentemente, etc.
Alternativamente, podemos editar las listas desde el menú de Hoja de cálculo S-SHT, cuya apariencia es muy similar a las hojas de cálculo habituales.

1.2. CONFIGURANDO GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

El menú ConfGraf (o el correspondiente botón  de la barra de herramientas) permite definir las características de los gráficos estadísticos que se van a representar a partir de las listas seleccionadas. En el cuadro de diálogo correspondiente podemos indicar el tipo de gráfico, las listas implicadas en el gráfico y el tipo de marca que se mostrará. En la siguiente tabla se muestran los diferentes tipos de diagramas que se pueden obtener con la ClassPad.



Tipo	Gráfico
Disper.	Dispersión
Línea xy	Línea xy
GrafPNormal	Gráfico de probabilidad normal
Histogr.	Histograma
RegrLin	Gráfico de regresión lineal
RegrCuadr	Gráfico de regresión cuadrática
RegrCuart	Regresión de orden cuatro
RegrExp.	Regresión exponencial ($y = a \cdot e^{b\,x}$)
RegrPot	Regresión potencial
RegrLogis	Regresión logística

Tipo	Gráfico
CajaMed	Diagrama de caja Mediana
CajaMod	Diagrama de caja modificado
DistNor	Curva de distribución normal
L. Trazos	Línea a trazos
MedMed	Gráfico Med-Med
RegrCúbic	Regresión cúbica
RegrLog	Regresión logarítmica
Rexp.ab	Regresión exponencial ($y = a \cdot b^{\,x}$)
RegrSin	Regresión sinusoidal

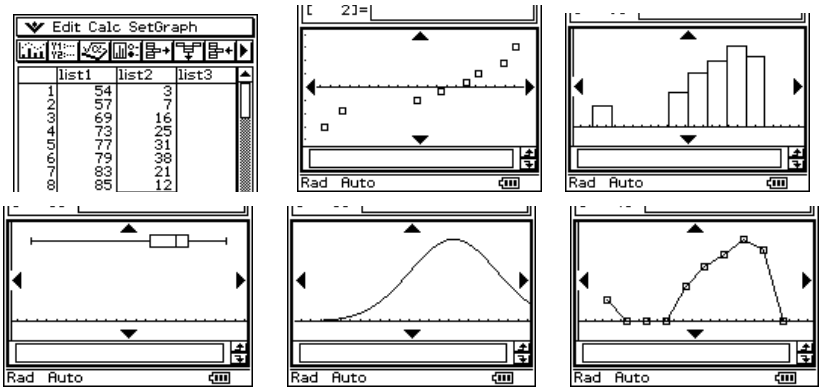
1.3. ALGUNOS EJEMPLOS DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Una compañía de seguros quiere realizar un estudio sobre la esperanza de vida de los españoles para ajustar sus cuotas de seguros. Para ello contrata los servicios de una empresa de investigación, que inicia el estudio con una muestra de 153 individuos, que resultaron tener una esperanza de vida X en años expresada en la siguiente tabla:

X	*54*	*57*	*69*	*73*	*77*	*79*	*83*	*85*	
F	*3*	*7*	*16*	*25*	*31*	*38*	*21*	*12*	$\sum F = 153$

Dibuja el gráfico de probabilidad normal, el histograma, el diagrama de cajas Med, el diagrama de cajas modificado, la curva de distribución normal y el gráfico de línea a trozos.

En primer lugar, editamos los datos en la lista X y las frecuencias en la lista F. A continuación usamos la opción ConfGraf o el botón  para definir cada uno de los gráficos. Los resultados se muestran en las siguientes figuras, en las que ya se ha ajustado la ventana de visualización más apropiada en cada caso.

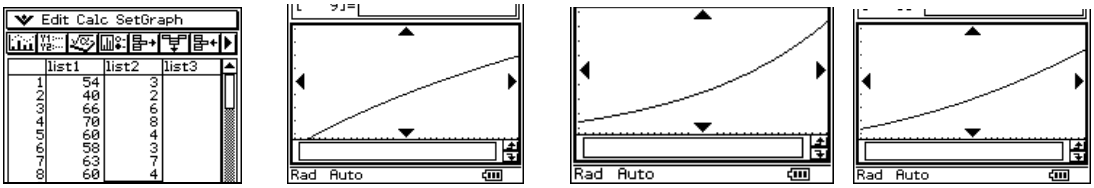


Con la ClassPad también es posible construir gráficos para variables bidimensionales. Veamos un ejemplo.

La siguiente tabla recoge las puntuaciones obtenidas en un test sobre visión espacial (T) y sus correspondientes calificaciones en la asignatura de Dibujo (D). Dibuja las curvas de regresión logarítmica, exponencial y potencial correspondiente a dichos datos.

T	*54*	*40*	*66*	*70*	*60*	*58*	*63*	*60*
D	*3*	*2*	*6*	*8*	*4*	*3*	*7*	*4*

Al igual que antes, hay que editar los datos en dos listas, T y D e indicar que la frecuencia de cada pareja de datos es 1. A continuación usamos la opción de configuración de gráficos estadísticos y pulsamos en el botón  para visualizar los gráficos.



2.GRÁFICOS Y PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

En un estudio genético, se coloca la comida habitual en cada uno de 20 frascos y se anota el número de moscas de un genotipo particular que comen de cada frasco. Se cuenta también el número de moscas para otro conjunto de 20 frascos que contienen zumo. Los datos recogidos son los siguientes:

Número de moscas (dieta habitual)									
15	*20*	*31*	*16*	*22*	*22*	*23*	*33*	*38*	*28*
25	*20*	*21*	*23*	*29*	*26*	*40*	*20*	*19*	*31*

Número de moscas (Zumo)									
6	*19*	*0*	*2*	*11*	*12*	*13*	*12*	*5*	*16*
2	*7*	*13*	*20*	*18*	*19*	*19*	*9*	*9*	*9*

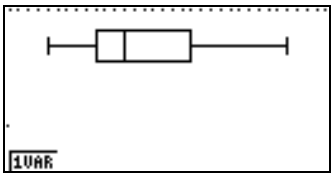
a. *Haz una comparación visual de las dispersiones respecto a sus centros de las dos distribuciones.*
b. *Calcula la media y la desviación típica para cada conjunto de datos.*

Abrimos el Editor de Hoja de calculo S−SHT. Introducimos la primera lista de datos en la columna A y la segunda lista en la columna B de la siguiente forma:

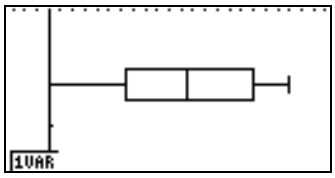


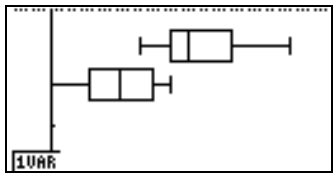


A continuación, configuramos los gráficos estadísticos (usando el menú ConfGraf o el botón  y los visualizamos pulsando . Podemos comparar mejor los gráficos si los superponemos:



dieta habitual



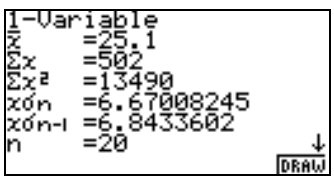


zumo

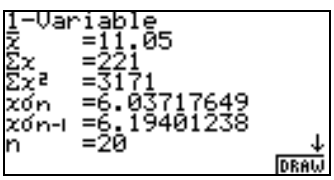
Podemos recorrer los gráficos usando la opción TRACE, o bien usar el menú Calc/Dos variables para obtener los parámetros estadísticos de posición (cuartiles y mediana) que indican que hay grandes diferencias entre los dos tipos de dietas. Con la ClassPad podemos obtener los siguientes estadísticos:

$\bar{x}$	Media de la lista X	$\bar{y}$	Media de la lista Y
Σx	Suma de la lista X	Σy	Suma de la lista Y
Σx^2	Suma de cuadrados de la lista X	Σy^2	Suma de cuadrados de la lista Y
$x\sigma_n$	Desviación típica poblacional de X	$y\sigma_n$	Desviación típica poblacional de Y
$x\sigma_{n-1}$	Desviación típica muestral de X	$y\sigma_{n-1}$	Desviación típica muestral de Y
N	Tamaño muestral	Σxy	Suma de productos de las listas X e Y
MinX	Mínimo de la lista X	minY	Mínimo de la lista Y
MaxX	Máximo de la lista X	maxY	Máximo de la lista Y

En nuestro caso, obtenemos unos resultados que confirman lo observado en los gráficos:



comida regular



zumo de vino

El hecho de que la ClassPad incorpore la aplicación Hoja de cálculo permite comprobar la fórmula clasica para obtener la desviación típica $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n}}$

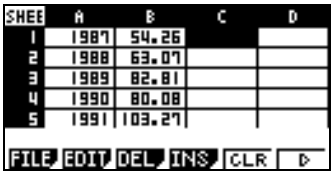
3.ANÁLISIS DE REGRESIÓN A PARTIR DE UNA NUBE DE PUNTOS

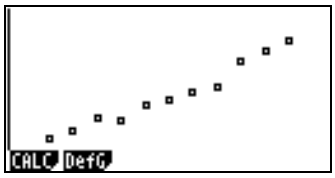
3.1.REGRESIÓN LINEAL

En la siguiente tabla se muestran los valores de las acciones de la compañía Vanguard Index Trust desde 1987 a 1997. Dibuja el diagrama de dispersión y halla la recta que mejor se ajusta a los datos. Suponiendo que la tendencia continua, ¿cuál será el valor de la acción en 2010?

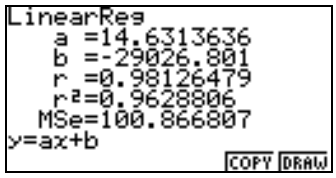
AÑO	*1987*	*1988*	*1989*	*1990*	*1991*	*1992*	*1993*	*1994*	*1995*	*1996*	*1997*
Valor (€)	*54,26*	*63,07*	*82,81*	*80,08*	*103,27*	*113,20*	*123,11*	*130,29*	*170,32*	*185,81*	*201,40*

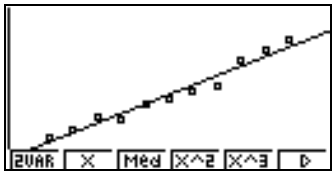
Abrimos el Editor de Hoja de cálculo e introducimos los datos. Introducimos los años en la primera columna y los valores de las acciones en la segunda columna, tal como se indica en la figura. Después representamos gráficamente la nube de puntos, eligiendo la opción Scatter como tipo de gráfico:





Mientras el gráfico de dispersión se muestra en pantalla, elegimos el comando Linear Regression, con lo que se muestra en pantalla la ecuación de la recta de regresión. Al pulsar [F6] para elegir la opción DRAW, se muestra el pantalla la nube de puntos con la recta de ajuste:





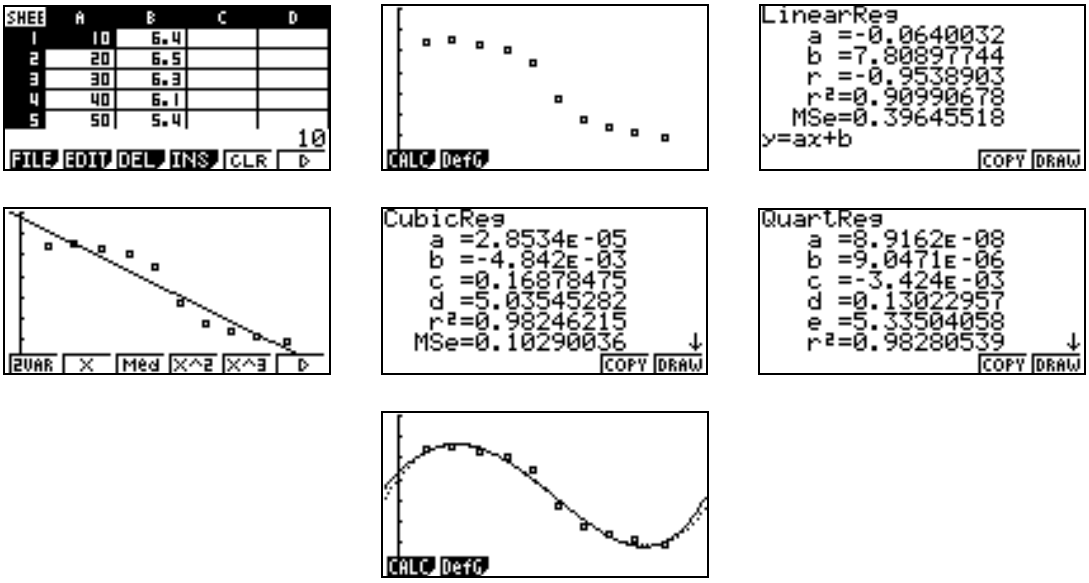
La tendencia de los datos es que el valor de la empresa crecerá conforme pase el tiempo. En el año 2010 el valor de la empresea se estima en, lo que puede verse sin más que copiando la ecuación de la recta de regresión en el menú de Gráficos y hallando el valor de dicha función para x=2010.

3.2.OTRAS REGRESIONES

Los siguientes datos indican el número de granjas en los Estados Unidos durante los años 1910 a 1999. Dibuja un diagrama de dispersión de los datos. Determina la función que mejor se ajusta a los datos y usa dicha función para estimar el número de granjas en el año 2010

Años	*1910*	*1920*	*1930*	*1940*	*1950*	*1959*	*1969*	*1978*	*1987*	*1999*
Nº Granjas (millones)	*6.4*	*6.5*	*6.3*	*6.1*	*5.4*	*3.7*	*2.7*	*2.3*	*2.1*	*1.9*

Accedemos al Editor de Hoja de cálculo. Tomamos como coordenada x de cada punto el número de años transcurridos desde 1900 y como coordenada y el número de granjas. Los años los introducimos en la columna A (1910 se introduce como 10, 1920 como 20 y así sucesivamente) y el número de granjas en millones lo introducimos en la columna B. Al dibujar el diagrama de dispersión, vemos que su forma sugiere una función sinusoidal. Si bien el modelo de regresión lineal explica un 91% de la variabilidad de los datos, vemos que un modelo cúbico o de cuarto grado se ajustan mejor a la nube de puntos



4.CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Los cálculos estadísticos con distribuciones se pueden hacer de distintas maneras. Una es mediante el comando Acción / Distribución de la aplicación Principal. Otra es desde el teclado virtual cat de catálogo. Y una tercera forma es desde el menú Estadística, eligiendo el comando Calc / Distribución. Veamos un ejemplo para las distribuciones binomial y normal (La ClassPad dispone de más distribuciones: ji-cuadrado, t de Student, F de Senédecor, Poisson, hipergeométrica, uniforme, etc).

4.1.PROBABILIDAD NORMAL

La función NormPDf (que se obtiene en el teclado virtual [cat], dentro de la aplicación Principal) calcula la densidad de probabilidad de la distribución normal para un valor x. Utilizamos para ello la expresión $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$. La sintaxis de la función es: **NormPDf($\bar{x}$, σ, x)** siendo x el dato, σ la desviación típica y $\bar{x}$ la media.

También se puede seleccionar la función normPDf desde la aplicación Principal, eligiendo el comando Acción / Distribución / normPDf. Al hacerlo, aparece en pantalla el nombre de la función y hay que completar los parámetros con el teclado virtual.

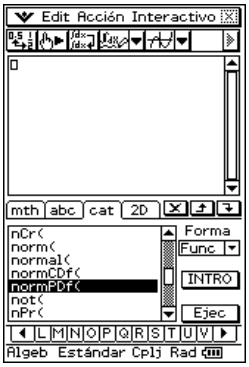
También se puede ejecutar la función desde el menú Estadística, eligiendo el comando Calc / Distribución y seleccionando en la lista desplegable de funciones que aparece PD normal. En la siguiente ventana hay que completar los parámetros de la función.

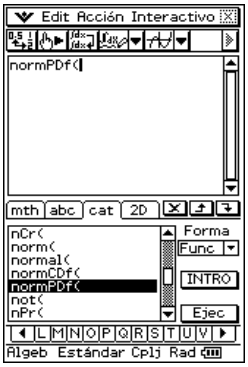
Ejemplo: Si X es una variable aleatoria normal de media 4 y desviación típica 2, calcula p(X=3).

4.1.1.PRIMER PROCEDIMIENTO:

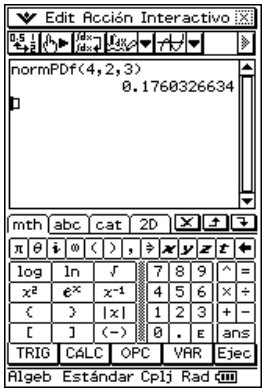
1) En el menú de aplicaciones tocamos el botón 

. Se inicia la aplicación Principal. Seleccionamos en el teclado virtual la solapa [cat] y en la lista desplegable Forma que aparece a la derecha elgimos Funciones. A continuación tocamos el botón de letra [N] en la zona inferior de la pantalla y se mostrarán todas las funciones que empiezan por n. Localizamos la función normalPDf(y tocamos [INTRO]. Aparece en pantalla el nombre de la función.



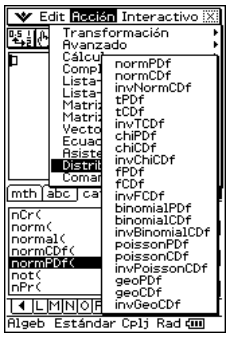


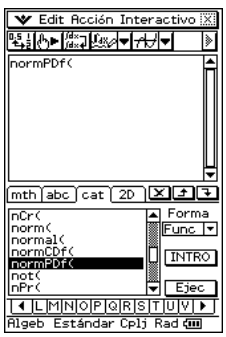
2) A continuación, con ayuda del teclado virtual, tecleamos los valores de la media, la desviación típica y el valor de X. Tocamos [Ejec] para ejecutar la función. Comprobamos que p(X=3)= 0,1760326634.



4.1.2.SEGUNDO PROCEDIMIENTO

1) Desde la aplicación Principal, seleccionamos el comando Acción / Distribución / normPDf De esta forma aparece en pantalla el nombre de la función normPDf. Utilizamos el teclado virtual para completar el comando normPDf(4, 2, 3).







2) Hacemos clic en el botón [Ejec] o pulsamos la tecla [EXE] de la ClassPad para obtener el resultado. Comprobamos que p(X=3)= 0,1760326634.

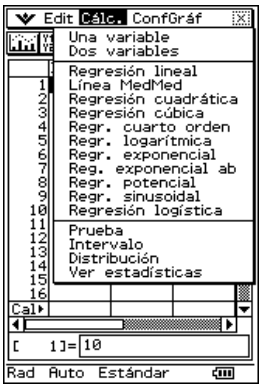


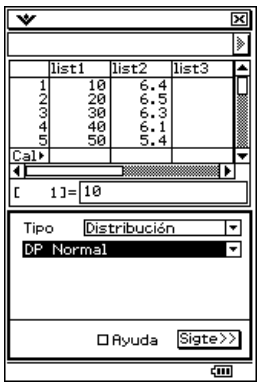
4.1.3.TERCER PROCEDIMIENTO

1) Seleccionamos el menú Estadística, tocando el botón 

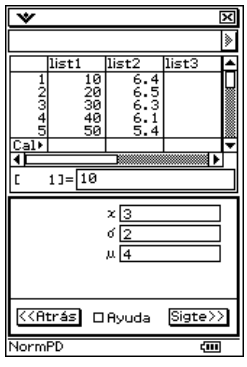
en la parte inferior de la pantalla y tocando luego el icono 

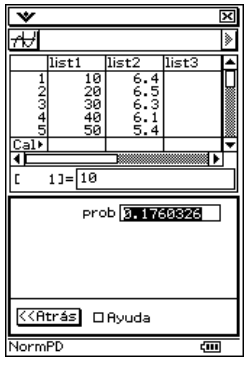
. A continuación, desde la ventana de la aplicación Estadística, seleccionamos el comando Calc / Distribución. En la lista desplegable Tipo elegimos Distribución y seleccionamos de la segunda lista desplegable la función PD normal. Tocamos en [Siguiente].

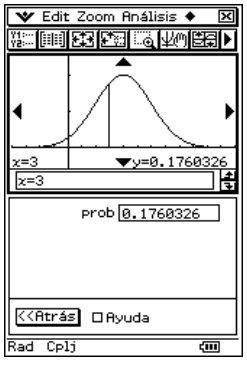




2) En la siguiente ventana introducimos los valores de X, σ y $\bar{x}$. Tocamos en el botón [Siguiente] y aparecerá una pantalla con el resultado. Comprobamos que p(X=3)= 0,1760326634. Si tocamos el botón , se visualiza el gráfico de la función de probabilidad normal con una vertical que señala el punto y con el valor de la probabilidad (la ordenada del gráfico)







4.2.PROBABILIDAD BINOMIAL

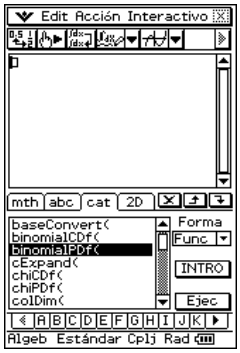
La función BinomialPDf (que se obtiene en el teclado virtual [cat]) calcula la densidad de probabilidad de la distribución binomial para un valor x. Utilizamos para ello la expresión $f(x) = nCx \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$, con x=0, 1, 2, ..., n; siendo p=probabilidad de éxito en una prueba y n el número de pruebas independientes. La sintaxis del comando es: **BinomialPDf(x, n, p)** siendo x el dato, n el número de pruebas independientes y p la probabilidad de éxito en una prueba.

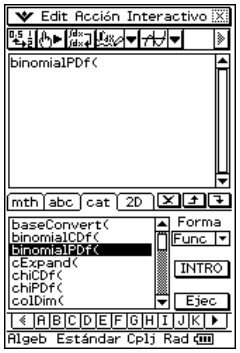
Si X es una variable aleatoria que sigue una distribución binomial de parámetros n=40 y p=0,38, calcula p(X=30), es decir, la probabilidad de obtener 30 éxitos en 40 pruebas. Sigue los siguientes pasos:

4.2.1.PRIMER PROCEDIMIENTO

En el menú de aplicaciones tocamos el botón 

. Se inicia la aplicación Principal. Seleccionamos en el teclado virtual la solapa [cat] y en la lista desplegable Forma que aparece a la derecha selecciona Funciones. A continuación tocamos el botón de letra [B] en la zona inferior de la pantalla y se mostrarán todas las funciones que empiezan por b. Localizamos la función binomialPDf(y tocamos [INTRO]. Aparece en pantalla el nombre de la función. Con ayuda del teclado virtual [math] completamos el comando BinomialPD 30, 40, 0,38. Tocamos el botón [Ejec.]. Comprobamos que P(X=30)=0.00000176

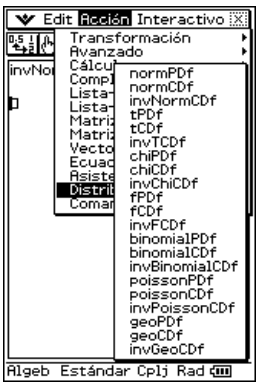






4.2.2.SEGUNDO PROCEDIMIENTO

En la aplicación Principal, seleccionamos la función Acción / Distribución y elegimos el comando binomialPDf. Con ayuda del teclado virtual, completamos el comando binomialPDf(30, 40, 0.38). Tocamos el botón [Ejec] y comprobamos que P(X=3)=0.00000176.

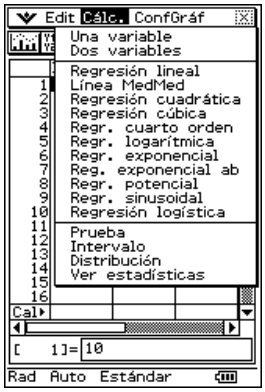


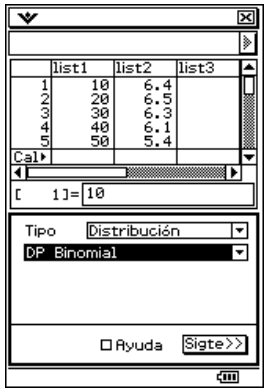




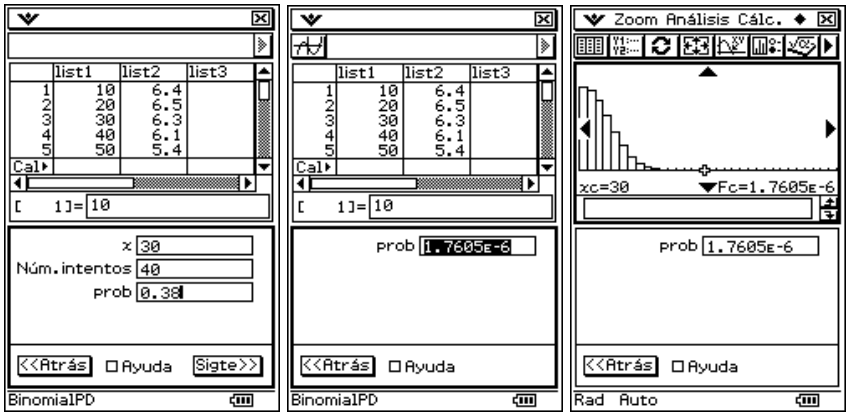
4.2.3. TERCER PROCEDIMIENTO

1) Seleccionamos el menú Estadística, tocando el botón Menu en la parte inferior de la pantalla y tocando luego el icono Statistics. A continuación, desde la ventana de la aplicación Estadística, seleccionamos el comando Calc / Distribución. En la lista desplegable Tipo elegimos Distribución y seleccionamos de la segunda lista desplegable la función DP Binomial. Tocamos en [Siguiente].





2) En la siguiente ventana introducimos los valores de x, n y p**.** Tocamos en el botón [Siguiente] y aparecerá una pantalla con el resultado. Comprobamos que p(X=30)= 0,00000176. Si tocamos el botón , se visualiza el gráfico de la distribución de probabilidad binomial con el cursor situado sobre el punto X=30 y con el valor de la probabilidad (la ordenada del gráfico)



5. INFERENCIA ESTADÍSTICA

El estudio de la Estadística inferencial es realmente muy difícil si no se utilizan recursos apropiados. La aparición de las calculadoras gráficas estadísticas ha supuesto un gran avance al facilitar los tediosos cálculos y centrar el objetivo de la enseñanza en los conceptos. La calculadora ClassPad 330 permite obtener con gran facilidad estimaciones de parámetros, determinar intervalos de confianza, validar hipótesis, etc.

En este apartado estudiaremos las posibilidades de la ClassPad 330 para el estudio de los intervalos de confianza para la media y para la proporción.

5.1. INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA

El comando OneSampleZInt (situado en el teclado virtual [cat]) calcula el intervalo de confianza para la media poblacional cuando se conoce la desviación típica de la población. Para ello utiliza las fórmulas: $\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, siendo α el nivel de significación y 1-α el nivel de confianza.

Si se conoce la lista de datos, la sintaxis del comando es: **OneSampleZInt 1-α, σ, List, Frec**, siendo α el nivel de significación, σ la desviación típica, List el nombre de la lista de datos, Frec la lista que contiene las frecuencias de los datos.

Si se conocen los parámetros estadísticos de la muestra, la sintaxis del comando es la siguiente: **OneSampleZInt 1-α, σ, $\bar{x}$, n**, siendo α el nivel de significación, σ la desviación típica, $\bar{x}$ la media y n el tamaño de la muestra.

La siguiente tabla muestra las duraciones (en días) de 100 pastillas de jabón de una determinada marca. Halla un intervalo de confianza para la duración media de dichas pastillas con un nivel de significación α=0,05. Sigue los siguientes pasos:

Duración (días)	*7*	*12*	*17*	*22*
Frecuencia	*24*	*46*	*19*	*11*

5.1.1. PRIMER PROCEDIMIENTO

1) En el editor de listas de la aplicación Estadística, introducimos en las listas list1 y list2 las duraciones y las frecuencias, respectivamente. Seleccionamos el comando Calc./ Una variable e introducimos como frecuencias la lista list2. Tocamos el botón [Acep.] y observamos el resultado.

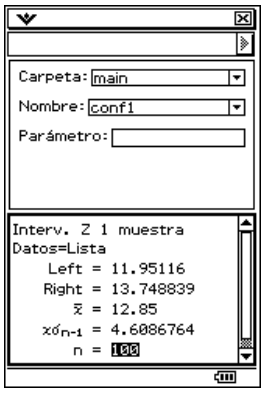


2) En el editor de programas de la aplicación Programas, seleccionamos el comando Edit / Archivo nuevo. En la siguiente ventana introducimos como nombre del archivo conf1 y tocamos el botón [Acep.].

3) En la siguiente ventana, tocamos el botón del teclado virtual [cat] y seleccionamos Todo en la lista desplegable Forma. En el catálogo de comandos seleccionamos OneSampleZInt y tocamos el botón [INTRO] para introducir dicha función en la ventana de edición del programa. Con ayuda del teclado virtual [math] completamos el comando OneSampleZInt 0.95, 4.586, list1, list2. Tocamos el botón [Ejec.]. En la siguiente línea del programa seleccionamos el comando E/S / Visualización / DispStat.

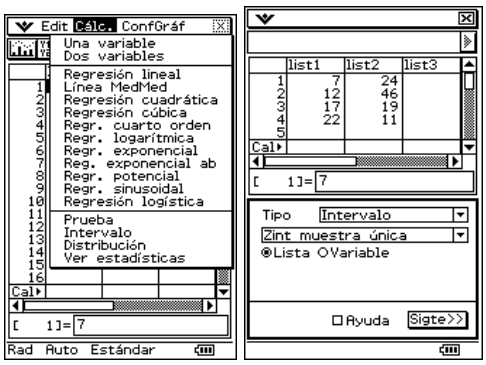


4) Seleccionamos el comando Edit / Guardar archivo. A continuación seleccionamos el comando ▼/Cargador programa. En la lista desplegable Carpeta elegimos la carpeta donde está guardado el programa, en nuestro caso, la carpeta principal main. En la lista desplegable Nombre seleccionamos el nombre del programa, conf1. Hacemos clic en el botón [▸] o seleccionamos el comando Ejecutar / Ejecutar programa. Aparece una pantalla con el resultado del cálculo estadístico. En ella se indica que el intervalo de confianza del 95% es (11.95, 13.75).

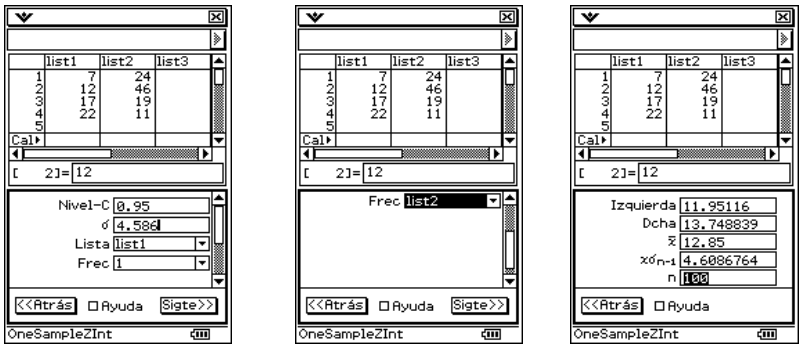


5.1.2. SEGUNDO PROCEDIMIENTO

1) En el editor de listas de la aplicación Estadística, introducimos en las listas list1 y list2 las duraciones y las frecuencias, respectivamente. Seleccionamos el comando Calc./ Intervalo y, en la lista desplegable elegimos la opción Zint muestra única y la opción Lista. Tocamos el botón [Sigte.].



2) En la siguiente ventana introducimos 0.95 como Nivel de confianza, 4.586 como valor de la desviación típica poblacional, indicamos que los datos están en la list1 y que las frecuencias están en la list2. Tocamos el botón [Sigte] y observamos que se muestran los límites inferior y superior del intervalo de confianza, junto con la media muestral, la cuasidesviación típica y el tamaño de la muestra.



5.2. INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA PROPORCIÓN

El comando OnePropZInt (situado en el teclado virtual [cat]) calcula el intervalo de confianza para la proporción de éxitos en una población. Para ello utiliza las fórmulas: $\left(\frac{x}{n} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{x}{n} \cdot \left(1 - \frac{x}{n} \right)}, \frac{x}{n} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{x}{n} \cdot \left(1 - \frac{x}{n} \right)} \right)$, siendo α el nivel de significación y 1-α el nivel de confianza, x el dato y n el tamaño de la muestra.

La sintaxis del comando es: **OnePropZInt 1-α, x, n**, siendo α el nivel de significación, x el dato y n el tamaño de la muestra.

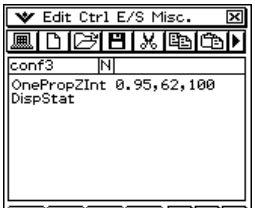
Se ha lanzado 100 veces una moneda obteniéndose 62 caras. Halla un intervalo de confianza para la proporción de caras, con un nivel de confianza del 95%. Sigue los siguientes pasos:

5.2.1. PRIMER PROCEDIMIENTO

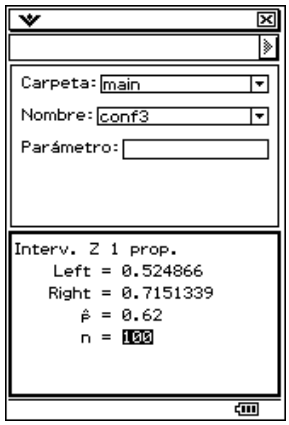
1) En el editor de programas de la aplicación Programas, seleccionamos el comando Edit / Archivo nuevo. En la siguiente ventana introducimos como nombre del archivo conf3 y tocamos el botón [Acep.].

2) En la siguiente ventana, tocamos el botón del teclado virtual [cat] y seleccionamos Todo en la lista desplegable Forma. En el catálogo de comandos elegimos OnePropZInt y tocamos el botón [INTRO] para introducir dicha función en la ventana de edición del programa. Con ayuda del teclado virtual [math] completamos el

comando OnePropZInt 0.95, 62, 100. Tocamos el botón [Ejec.]. En la siguiente línea del programa seleccionamos el comando E/S / Visualización / DispStat.

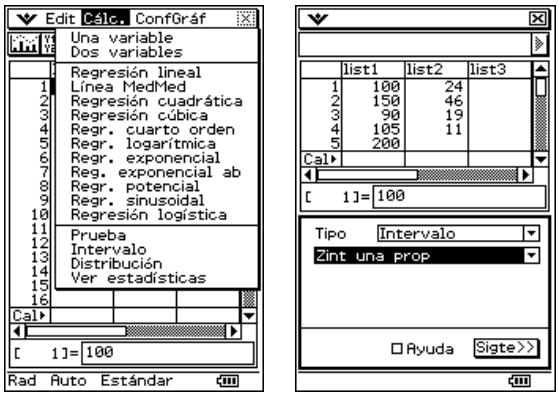


3) Seleccionamos el comando Edit / Guardar archivo. A continuación elegimos el comando ▼/Cargador programa. En la lista desplegable Carpeta seleccionamos la carpeta donde está guardado el programa, en nuestro caso, la carpeta principal main. En la lista desplegable Nombre elegimos el nombre del programa, conf3. Hacemos clic en el botón [▸] o seleccionamos el comando Ejecutar / Ejecutar programa. Aparece una pantalla con el resultado del cálculo estadístico. En ella se indica que el intervalo de confianza del 95% es (0.525, 0.715). Se indica también la proporción muestral y el tamaño de la muestra.

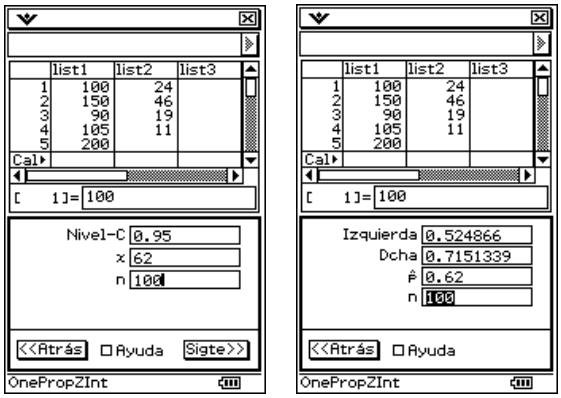


5.2.2. SEGUNDO PROCEDIMIENTO

1) En la aplicación Estadística, elegimos el comando Calc / Intervalo. En la lista desplegable, seleccionamos la opción Zint una prop y tocamos el botón [Sigte].



2) En la siguiente ventana introducimos 0.95 como nivel de confianza, x=62 como número de casos y n=100 como tamaño de la muestra. Tocamos el botón [Sigte.] y observamos que en la siguiente pantalla se muestran los extremos inferior y superior del intervalo de confianza, junto con la proporción muestral y el tamaño de la muestra. Comprobamos que el intervalo de confianza es (0.525, 0.715).



6.OTROS PROBLEMAS

A continuación mostramos algunos otros de los problemas que se trataron en el taller:

6.1.ESTADÍSTICA CON LA CLASSPAD 330

1. Se ha aplicado un test de inteligencia a 40 estudiantes, obteniéndose los siguientes resultados, agrupados en intervalos:

Puntuaciones	[15-20)	[20-25)	[25, 30)	[30, 35)	[35, 40)	[40, 45)
Nº de alumnos	3	8	13	7	6	3

   Calcula los parámetros estadísticos: media, varianza, desviación típica, mínimo, máximo, primer cuartil, mediana, tercer cuartil, moda.

2. Las estaturas de 10 chicas y de sus respectivas madres son las siguientes, expresadas en cm:

Hijas	158	162	164	165	168	169	172	172	174	178
Madres	163	155	160	161	164	158	175	169	166	172

   Calcula los parámetros estadísticos de dichas variables: media, desviación típica, suma de productos, mínimo, máximo. Halla la recta de regresión de mínimos cuadrados, determina el coeficiente de correlación, analiza los residuos entre los datos reales y el modelo de mínimos cuadrados y estima la estatura de la madre cuando la estatura de la hija es de 167 cm. Investiga otros modelos de regresión.

3. La siguiente tabla recoge las puntuaciones obtenidas en un test sobre visión espacial (T) y sus correspondientes calificaciones en la asignatura de Dibujo (D). Halla la ecuación de las curvas de regresión logarítmica, exponencial y potencial correspondiente a dichos datos.

T	54	40	66	70	60	58	63	60
D	3	2	6	8	4	3	7	4

4. Calcula la curva de regresión correspondiente al número de horas de luz solar en Alaska durante un año, tal como se indica en la siguiente tabla.

F	1	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
T	5,5	8	11	13,5	16,5	19	19,5	17	14,5	12,5	8,5	6,5	5,5

5. El número de árboles de un bosque durante 12 años crece de la forma que se indica en la siguiente tabla. Calcula la curva de regresión logística.

Año	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nº árboles	4000	4200	4360	4488	4590	4672	4738	4790	4832	4866	4893	4914

6.2.PROBABILIDAD CON LA CLASSPAD 330

6.2.1.LA CURVA NORMAL

6. Si X es una variable aleatoria normal estándar, calcula p(X=0,6).

7. Si X es una variable aleatoria normal de media 0,56 y desviación típica 1,23, calcula p(0,5≤X≤0,8).

8. Representa gráficamente las curvas normales N(7, 1’5), N(10, 2) y N(14, 3). Compara las curvas obtenidas. Calcula respectivamente en cada caso p(X=7), p(X=10) y p(X=14).

9. Si X es una variable aleatoria normal de media 4 y desviación típica 2, calcula p(2≤X≤4). Repite el mismo cálculo para una variable aleatoria normal de media 6 y desviación típica 3.

10. Representa gráficamente las curvas normales N(4, 2) y N(6, 3) y compáralas.

11. Si X es una variable aleatoria normal de media 0,3 y desviación típica 1,2, calcula el valor A, tal que p(X≤A)=0,35.

12. Si X es una variable aleatoria normal de media 4 y desviación típica 2, calcula los extremos A y B, de forma que p(A≤X≤B)=0,75.

13. Un estudio de un fabricante de televisores indica que la duración media de un televisor es de 10 años, con una desviación típica de 0,7 años. Suponiendo que la duración media sigue una distribución normal:

    a) Calcula la probabilidad de que un televisor dure más de 9 años.

    b) Calcula la probabilidad de que dure entre 9 y 11 años.

6.2.2.DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

14. Lanzamos 14 monedas perfectamente equilibradas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 9 caras?.

15. Una urna contiene 3 bolas rojas y 7 verdes. Se saca una al azar, se anota el color y se reintegra a la urna. Esta experiencia se realiza 5 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres bolas rojas?.

16. En una fábrica de bombillas se sabe que el 2% son defectuosas. Si se empaquetan en cajas de 20 unidades, calcula la probabilidad de que en una caja: a) no haya ninguna defectuosa, b) sólo haya una defectuosa, c) haya más de tres bombillas defectuosas.

17. Una urna contiene 3 bolas rojas y 7 verdes. Se saca una al azar, se anota el color y se reintegra a la urna. Esta experiencia se realiza 5 veces. Calcula la probabilidad de obtener: a) menos de 3 bolas rojas, b) más de 3 bolas rojas, c) alguna bola roja.

6.3.INTERVALOS DE CONFIANZA

6.3.1.MEDIA

18. El peso medio de una muestra de 100 recién nacidos es 3200 g. Sabiendo que la desviación típica de los pesos de la población de recién nacidos es 150 gramos, halla el intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de significación de 0,05.

19. El gasto semanal de fotocopias, en céntimos de euro, para una muestra de 9 estudiantes es: 100, 150, 90, 70, 75, 105, 200, 120, 80. Halla un intervalo de confianza al 95% para la media de gasto semanal en fotocopias por estudiante.

20. En una prueba de 100 metros participa una muestra de 10 atletas con un tiempo medio de 11 segundos y una desviación típica muestral de 1.1547 segundos. Halla un intervalo de confianza para la media de tiempos en dicha prueba con un nivel de confianza del 95%.

6.3.2.PROPORCIÓN

21. Tomando una muestra de 300 personas en una gran ciudad, se encontró que 104 de ellas leían el periódico regularmente. Halla, con un nivel de confianza del 90% un intervalo de confianza para la proporción de lectores de periódicos.

BIBLIOGRAFÍA:

Todd, Ph., Siebold, M. y Maguire, B. (2002). *Obtención del máximo rendimiento de la ClassPad*. Saltire Software Inc., Beaverton OR. www.saltire.com.

Contreras, M. (2004). *Matemáticas con la ClassPad 300: una alternativa dinámica. Curso de formación.* Página web de la División Didáctica CASIO en www.flamagas.com.

Contreras, M. (2006). *El currículo de matemáticas con la ClassPad 300.* Ed: Mauricio Contreras. mauriciocontreras@wanadoo.es

Página web de Abel Martín: www.classpad.tk.

Página web de Mauricio Contreras: www.mauriciocontreras.es.

Página web de recursos de la División Didáctica CASIO: www.aulacasio.com

Manual del usuario de la ClassPad 330.

Página web de Casio http://edu.casio.com/dl/

Página web de la división didáctica Casio www.aulacasio.com

PROGRAMACIÓ AMB "MAXIMA" I "WXMAXIMA" PER A LA DOCÈNCIA

Juan Manuel Couchoud.
l'IES Vall de la Safor. Villalonga.
juan.manuel.couchoud@gmail.com

0. INTRODUCCIÓ

Tot el professorat, en major o menor mesura utilitza les tecnologies de la informació i la comunicació: des de la utilització de les calculadores, escriptura de les programacions didàctiques, dels controls i dels apunts amb editors de textos, fins la utilització de programari matemàtic a l'aula. Cada vegada hi ha més programari adaptat a la docència, d'una qualitat extraordinària i especialment adaptats a la interacció amb l'alumnat. Hi ha un grup de programes anomenats **sistemes de computació algebraica**, amb les sigles "CAS" (Computer Algebra System) com el "Mathematica", "Derive", "calculadora Wiris", "GeoGebra", "Maxima", que possibiliten, tant el càlcul algebraic directe com la creació de noves utilitats, gràcies a la programació informàtica. A Internet hi ha manuals magnífics per a iniciar-se en "Maxima" i "wxMaxima", (Bruzón 2009) i (Rodríguez 2007).

"Maxima" destaca per ser un programari lliure, adaptat a molts sistemes operatius. Especialment s'aprecia el canvi de l'editor de línia per l'editor de pàgina de les últimes versions, facilitant extraordinàriament la programació informàtica i l'ús de sentencies més complexes, també s'ha de destacar la possibilitat de crear amb molta facilitat, documents instal·lables en "Maxima" per poder ampliar el potencial de càlcul, i sobre tot, adaptar-lo al nivell acadèmic del nostre alumnat i al nostre idioma. La imatge següent mostra un exemple de "Maxima" realitzable en el taller després d'instal·lar el document "divisibilitat.mac".



1.LOCALITZACIÓ DEL MATERIAL

Donat el poc de temps disponible he concentrat tots els recursos en la pàgina "web" http://iesvalldelasafor.edu.gva.es/ de l'IES Vall de la Safor de Villalonga. Trobaràs el material del taller en la "microweb" "Maxima amb wxMaxima" del departament de matemàtiques.

Instruccions

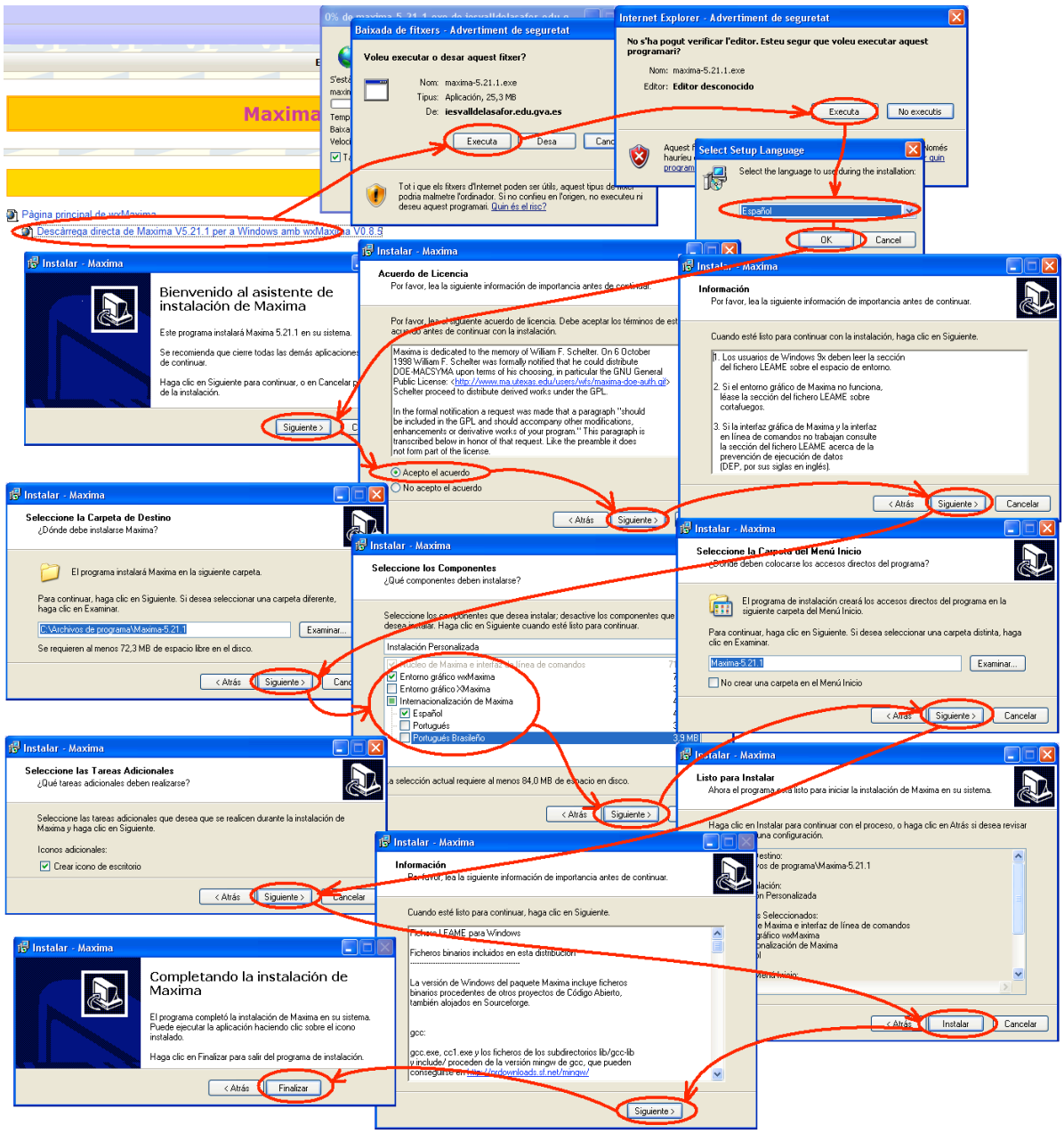
- *Engega l'ordinador.*
- *Amb un navegador d'Internet busca la pàgina http://iesvalldelasafor.edu.gva.es/*
- *Clica damunt del nom de la "microweb", "Maxima amb wxMaxima".*
- *Clica el botó "Sí" per acceptar la normativa del portal educatiu i entrar.*

2.INSTAL·LACIÓ DE "MAXIMA", "WXMAXIMA" I "WGNUPLOT"

Des de la pàgina web http://wxmaxima.sourceforge.net (wxMaxima 2010) seleccionant el programari de "Windows", "maxima-5.21.1.exe" i seguint el procés d'instal·lació queden instal·lats els tres programaris amb una icona de "wxMaxima" en l'escriptori per accedir directament a la finestra de treball. En el taller faràs la instal·lació des de la "microweb" "Maxima amb wxMaxima".

Instruccions

- *Clica la frase "Descàrrega directa de Maxima V5.21.1 per a Windows".*
- *Clica el botó "executa" per iniciar el procés d'instal·lació.*
- *Clica el botó "executa" per acceptar el programari.*
- *Selecciona l'opció "español" i clica el botó "OK".*
- *En la finestra de benvinguda clica el botó "següent".*
- *Activa l'acceptació de l'acord i clica el botó "següent".*
- *En la finestra d'informació clica el botó "següent".*
- *Accepta la carpeta de destinació clicant el botó "següent".*
- *Activat l'entorn gràfic "wxmaxima", l'idioma "español" i clica el botó "següent".*
- *Accepta la carpeta del menú d'inici clicant el botó "següent".*
- *Accepta la creació d'un accés directe en l'escriptori clicant el botó "següent".*
- *Clica el botó "instal·la" per continuar el procés.*
- *En la finestra d'informació clica el botó "següent".*
- *I per últim el botó "finalitzar".*



3.FONAMENTS DE PROGRAMACIÓ AMB "MAXIMA" I "WXMAXIMA"

En "wxMaxima" existeixen set tipus de cel·les. Quatre que serveixen per estructurar el document: **títol**, **secció**, **subsecció** i de **text**, una de tipus **imatge** per afegir figures i dues que serveixen per escriure les d'ordres i presentar els resultats: "**input**" i "**output**".

Títol

1 Secció

1.1 Subsecció

Text

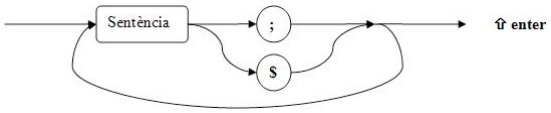
Figura 1:



(%i1) solve([3·x+4·y=3,x-y=2],[x,y]);

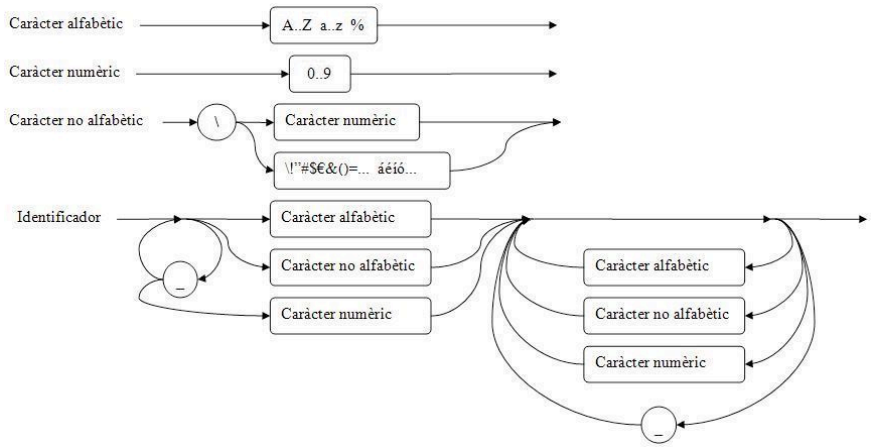
(%o1) $[[x=\frac{11}{7},y=-\frac{3}{7}]]$

Les instruccions o sentències que podem escriure en "wxMaxima" s'han d'escriure en una cel·la de tipus "input", i s'han de finalitzar amb el signe "punt i coma" (si desitgem observar el resultat) o amb el signe "dolar" (si no volem observar-lo). En el cas de no escriure el signe al final, "wxMaxima" afegeix el signe "punt i coma" automàticament. Per executar la sentència hem de pitjar la combinació de les tecles "majúscula" i "enter" obtenint a continuació cada resultat en una cel·la de tipus "output".



La programació necessita una sèrie d'identificadors per fer referència a les funcions i a les variables. És important no utilitzar els noms existents en "Maxima": "block", "if", "then", "for", "do"... ni els noms de les funcions predefinides: "solve", "integrate", "intersection"...

Els noms poden estar formats per qualsevol quantitat de caràcters, però el primer ha de ser necessàriament no numèric.



3.1. ADAPTACIÓ IDIOMÀTICA DE "MAXIMA"

Els caràcters no alfabètics han d'anar precedits per la barra invertida, però és possible declarar-los alfabètics i d'aquesta manera adaptar la programació al nostre idioma.

```
(%i1) declare("áÁàÀéÉíÍïÏóÓòÒúÚuÜçÇñÑ~´·¿?",alphabetic)$
```

És important no declarar amb la categoria "alphabetic" els caràcters que actuen com operadors i d'aquesta manera evitar sorpreses. També s'ha de desactivar en el menú de preferències, l'ús del punt central com substitut de l'asterisc.

Cada vegada que volem utilitzar noms amb aquests caràcters, hauríem d'executar aquesta sentència al començament de cada sessió de "wxMaxima", però és possible guardar-la en el document anomenat

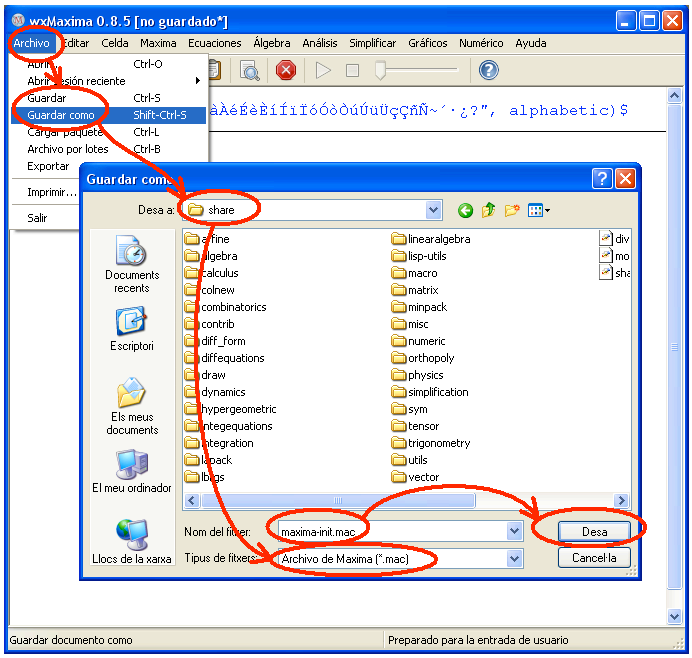
"C:\archivos de programa\maxima-5.21.1/share/maxima/5.21.1/share/maxima-init.mac"

Una vegada guardat, les pròximes sessions de "wxMaxima" executaran aquesta sentència de forma invisible a l'usuari.

El programari "wxMaxima" admet tres tipus de fitxers: "*.wxm" i "*.wxmx" per a guardar una sessió de càlcul en un document, i "*.mac" per guardar conjunts d'instruccions anomenats "macros" o "paquets".

Instruccions

- *Inicia una sessió de "wxMaxima".*
- *Escriu en la zona de treball la sentència declare("áÁàÀéÉíÍïÏóÓòÒúÚüÜçÇñÑ~´·¿?", alphabetic)$ i l'executes amb la combinació de les tecles "shift" i "enter".*
- *Clica el menú "Fitxer".*
- *Clica l'opció "Desa" o "Anomena i desa...".*
- *Busca en la llista desplegable anomenada "Desa a:" la carpeta "C:\archivos de programa\maxima-5.21.1/share/maxima/5.21.1/share/".*
- *Busca en la llista desplegable anomenada "Tipus de fitxers" el text "Archivo de Maxima (*.mac)".*
- *Escriu en la llista anomenada "Nom del fitxer" el nom maxima-init.mac.*
- *Clica el botó "Desa" per guardar el document.*



Com cada sistema operatiu te una estructura diferent de carpetes, "Maxima" proporciona la sentència "file_search_maxima" que informa de la carpeta on has de guardar el document "maxima-init.mac".

```
(%i1) file_search_maxima;
(%o1) [C:/Documents and Settings/Propietario/maxima/###.{mac,mc},
C:\ARCHIV~1\MAXIMA~2.1/share/maxima/5.21.1/share/###.{mac,mc},
C:\ARCHIV~1\MAXIMA~2.1/share/maxima/5.21.1/share/{affine,algebra,algebra/charsets,algebra/solver,calculus,
]
```

En l'exemple s'observa en format abreviat el nom de la carpeta

C:\archivos de programa\maxima-5.21.1/share/maxima/5.21.1/share/

3.2.PER QUÈ UN TEMA DE DIVISIBILITAT?

A mi em sorprèn que el bloc numèric de les matemàtiques de l'ESO s'estructure en funció dels conjunts numèrics, i no es respecten ni les propietats dels conjunts, els naturals ja tenen d'entrada una barbaritat de propietats, ni l'ordre de construcció, els enters es desenvolupen després dels racionals, les fraccions queden definides utilitzant els nombres naturals, els nombres racionals no tenen ni categoria suficient per donar nom a un tema, els divisors i múltiples negatius no existeixen pel fet que la divisibilitat queda definida en el context dels nombres naturals, es resten fraccions abans de parlar d'enters. En divisibilitat es parla d'elements comuns i no hi ha una petita introducció a l'àlgebra de conjunts.

3.3.TIPUS DE DADES I LA SENTÈNCIA D'ASSIGNACIÓ

"Maxima" hereta l'estructura de dades del llenguatge "Lisp" i fonamentalment són els "**àtoms**", les **llistes** que estan tancades entre claudàtors i els **conjunts** que estan tancats entre claus. Per guardar un valor o una expressió en una variable has d'escriure primer el nom o identificador de la variable, després el caràcter "dos punts" seguit del valor que vols guardar.

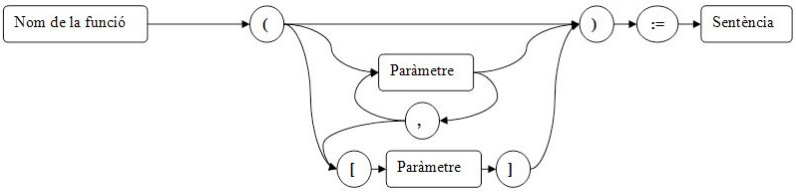
En l'exemple s'aprecia la declaració d'un àtom, d'una llista i un conjunt.

```
(%i1) a:5; b:[2,5,3,3,5,5,4,3,9]; c:{2,4,7,8};
(%o1) 5
(%o2) [2,5,3,3,5,5,4,3,9]
(%o3) {2,4,7,8}
```

3.4.FUNCIONS

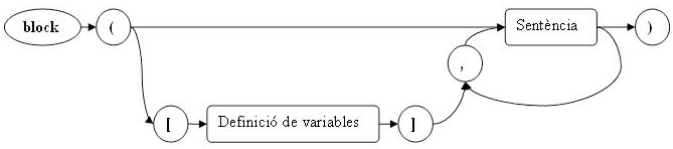
Les funcions representen l'estructura fonamental de la programació. Estan formades per un identificador, a continuació parèntesis que poden contenir una sèrie d'identificadors que representen les variables d'entrada de la funció i finalment el signe "dos punts igual" seguit d'una sentència.

```
(%i1) Àrea_del_rectangle(base,altura):=base*altura $
      Àrea_del_rectangle(5,3);
(%o2) 15
```



3.5.LA SENTÈNCIA "BLOCK"

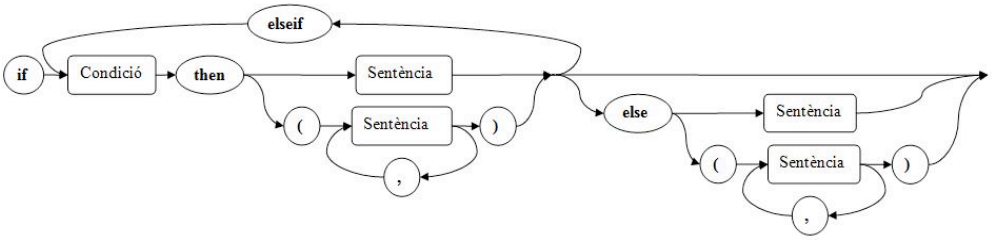
En una funció es pot declarar solament una sentència i per això s'ha creat la sentència "block" que permet incloure una llista de declaracions de variables i una sèrie de sentències separades per comes.



És normal definir funcions dins de funcions amb la intenció de crear utilitats exclusives per a la funció que fa de continent, resulta d'importància tenir molt clar l'accés que tenim al contingut de les variables dins de cada funció. Seguint la similitud de les finestres informàtiques, que es cataloguen en "mares", "filles" i "germanes", una funció en "Maxima" no té accés a les variables declarades en funcions "filles", "germanes" i tampoc a les variables de la funció "mare" amb noms idèntics a les variables pròpies, en resum, solament és possible accedir a les variables pròpies i a les variables de les funcions ascendents de nom diferent. Les funcions finalitzen tornant el valor de l'última sentència o mitjançant la sentència "return".

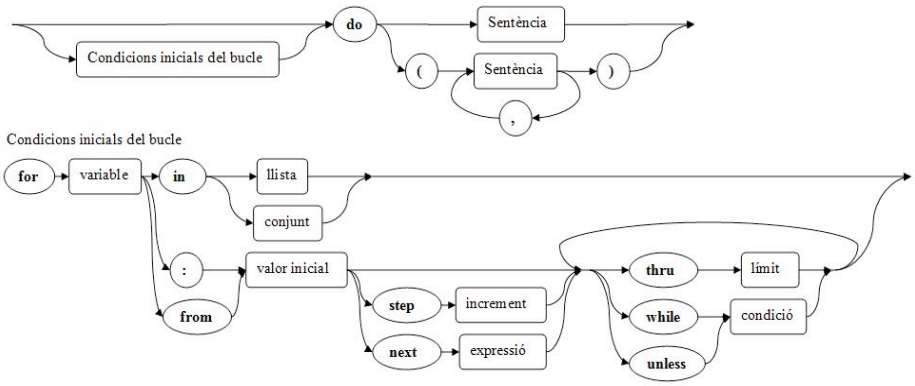
3.6.SENTÈNCIA CONDICIONAL

La sentència "if" permet realitzar l'execució d'una sentència en funció del resultat d'una condició. Si la condició és certa s'executa la sentència posterior a la paraula "then" i si és falsa, la següent de la paraula "else", en cas d'existir. Existeix una variant que permet una sèrie de condicions i sentències, s'executarà la sentència que està a continuació de la primera condició vertadera.



3.7.SENTÈNCIA DE REPETICIÓ

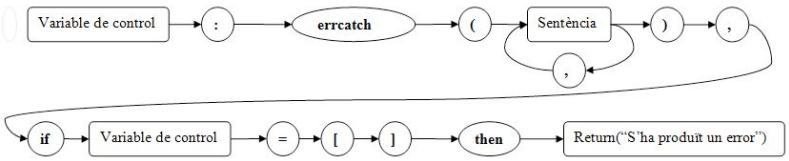
Aquesta instrucció permet repetir una sèrie de sentències. Si no existeixen condicions inicials, el bucle és infinit i la sortida s'ha de realitzar mitjançant una condició combinada amb la sentència "return", aquesta sentència serveix per sortir del bucle, no de la funció.
Amb la paraula "for" es declaren les condicions inicials, començant per l'identificador de la variable que portarà el control del bucle, assolint un valor en cada iteració. Aquests valors poden estar proporcionats per una llista, per un conjunt o per un valor inicial amb un increment declarat després de la paraula "step" o una expressió declarada després de la paraula "next", en el cas d'ometre aquests elements s'assumeix un increment unitat.



La finalització de les iteracions pot produir-se per l'acabament dels elements de la llista o conjunt, per superació del límit declarat després de la paraula "thru", quan la condició posterior a la paraula "while" és falsa o la condició després de la paraula "unless" és vertadera.

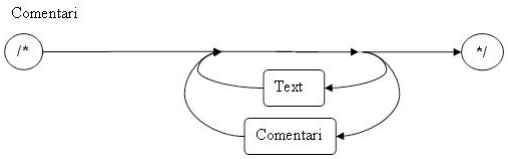
3.8.SENTÈNCIA DE CONTROL D'ERRORS

Les funcions amb paràmetres tenen errors causats generalment per l'escriptura errònia dels paràmetres d'entrada. És convenient tancar els càlculs realitzats amb les variables d'entrada en una sentència "errcatch" que torna una llista buida si es produeix algun error dins dels parèntesis. Després de la sentència "errcatch" s'ha de fer una verificació del contingut de la variable de control amb una sentència "if" per poder informar a l'usuari dels problemes.



3.9.COMENTARIS

En tot llenguatge de programació els comentaris són fonamentals i en "Maxima" s'han de tancar entre els signes /* i */. Una avantatja de "Maxima" respecte d'altres llenguatges de programació, és la capacitat d'incloure comentaris dins de comentaris.



3.10.DOCUMENT DIVISIBILITAT.WXM

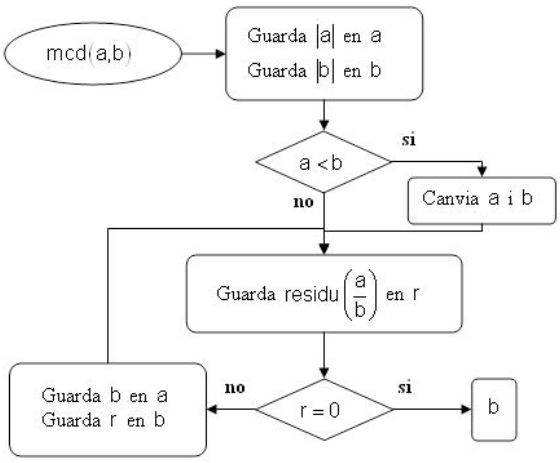
El document de treball està adaptat al taller fent un recorregut de dificultat creixent, utilitzant tots els elements bàsics de la programació. Una vegada descarregat el document "divisibilitat.wxm" i iniciat una sessió de "wxMaxima" es pot executar la sessió d'exemple de la pàgina 1.

Gràcies a la declaració dels nous caràcters alfabètics es poden definir funcions amb els identificadors "és_enter?", "és_enter_no_nul?" i "és_enter_positiu?" que possibiliten el filtratge de la informació proporcionada per l'usuari. Les funcions "divisors_positius", "múltiples_positius", "intersecció", "màxim" i "mínim" tenen la finalitat de permetre el càlcul del màxim comú divisor i del mínim comú múltiple amb conjunts.

$$\text{mcd}(a,b) = \text{màxim}\left(\text{divisors_positius}(a) \cap \text{divisors_positius}(b)\right)$$

$$\text{mcm}(a,b) = \text{mínim}\left(\text{múltiples_positius}(a) \cap \text{múltiples_positius}(b)\right)$$

Finalment, les funcions "mcd" i "mcm" utilitzen l'algoritme d'Euclides.



Taller de programació amb MAXIMA i WXMAXIMA per a la docència

Autor: Juan Manuel Couchoud. Febrer 2010.

```
(%i1) /*****************************/
      /* Divisibilitat amb maxima */
      /*****************************/

      /* Determina si una expressió numèrica és un enter. Una alternativa és alias(és_enter?,integerp) */
      és_enter?(n):=integerp(n)$

      /* Determina si una expressió numèrica és un enter no nul */
      és_enter_no_nul?(n):=block(
          if és_enter?(n) then (if n#0 then return(true)),
          return(false)
      )$

      /* Determina si una expressió numèrica és un enter positiu */
      és_enter_positiu?(n):=block(
          if és_enter?(n) then (if n>0 then return(true)),
          return(false)
      )$

      /* Calcula un conjunt amb els divisors positius d'un nombre enter no nul.
      Incorpora un control dels paràmetres. */
      divisors_positius([n]):=block(
          if length(n)=0 then return("Calcula els divisors positius d'un nombre enter diferent de zero."),
          if length(n)>1 then return("És necessari un nombre enter diferent de zero."),
          if not és_enter_no_nul?(n[1]) then return("L'argument ha de ser un nombre enter diferent de zero"),
          return(divisors(n[1]))
      )$

      /* Calcula un conjunt amb una quantitat de múltiples  positius d'un nombre enter no nul.
      Incorpora un control dels paràmetres. */
      múltiples_positius([n]):=block([comptador,M:set()],
          if length(n)=0 then return("Calcula una quantitat determinada de múltiples positius d'un nombre enter
      diferent de zero."),
          if length(n)#2 then return("És necessari un nombre enter diferent de zero i la quantitat de múltiples
      desitjat."),
          if not és_enter_no_nul?(n[1]) then return("El primer argument ha de ser un nombre enter diferent de zero"),
          if not és_enter_positiu?(n[2]) then return("El segon argument ha de ser una quantitat de múltiples"),
          n[1]:abs(n[1]),
          for comptador:1 thru n[2] do (M:adjoin(comptador*n[1],M)),
          return(M)
      )$

      /* Calcula la intersecció d'una llista de conjunts.
      Incorpora el control de paràmetres amb la sentència "errcatch" */
      intersecció([c]):=block([control_error,comptador,s:set()],
          if length(c)=0 then return("Calcula la intersecció d'una llista de conjunts."),
          if length(c)=1 then return("Al menys és necessari un parell de conjunts."),
          control_error:errcatch(
              s:union(s,c[1]),
              for comptador:2 thru length(c) do (s:intersection(s,c[comptador]))
          ),
          if control_error=[] then return("Els arguments han de ser conjunts"),
          return(s)
      )$

      /* Calcula l'element màxim d'un conjunt d'enters */
      màxim([c]):=block([control_error,s:set()],
          if length(c)=0 then return("Calcula l'element màxim d'un conjunt d'enters."),
          if length(c)#1 then return("És necessari un conjunt."),
          control_error:errcatch(
              s:union(s,c[1])
          ),
          if control_error=[] then return("L'argument ha de ser un conjunt"),
          return(lmax(s))
      )$

      /* Calcula l'element mínim d'un conjunt d'enters. */
      mínim([c]):=block([control_error,s:set()],
          if length(c)=0 then return("Calcula l'element mínim d'un conjunt d'enters."),
          if length(c)#1 then return("És necessari un conjunt."),
          control_error:errcatch(
              s:union(s,c[1])
          ),
          if control_error=[] then return("L'argument ha de ser un conjunt"),
          return(lmin(s))
      )$

      /* Calcula el màxim comú divisor amb l'algoritme d'Euclides. Utilitza una funció dins d'una funció. */
      mcd([n]):=block([i,j],
          euclides_mcd(a,b):=block([r],
              a:abs(a),
              b:abs(b),
              if a<b then (r:a, a:b, b:r),
              do (r:a-b*floor(a/b),
                  if r=0 then return(b),
                  a:b, b:r
              )
          ),
          if length(n)=0 then return("El màxim comú divisor d'un conjunt de nombres enters no nuls és l'element
      màxim de la intersecció dels divisors positius de cada nombre."),
          if length(n)=1 then return("Almenys són necessaris dos nombres enters."),
          j:true,
          for i:1 thru length(n) while j do (j:és_enter_no_nul?(n[i])),
          if not j then return("Els arguments han de ser enters no nuls."),
          j:n[1],
          for i:2 thru length(n) do (j:euclides_mcd(j,n[i])),
          return(j)
      )$

      /* Calcula el mínim comú múltiple amb l'algoritme d'Euclides. Utilitza una funció dins d'una funció. */
      mcm([n]):=block([i,j],
          euclides_mcm(a,b):=block([r,p],
              a:abs(a),
              b:abs(b),
              p:a*b,
              if a<b then (r:a, a:b, b:r),
              do (r:a-b*floor(a/b),
                  if r=0 then return(p/b),
                  a:b, b:r
              )
          ),
          if length(n)=0 then return("El mínim comú múltiple d'un conjunt de nombres enters no nuls és l'element
      mínim de la intersecció dels múltiples positius de cada nombre."),
          if length(n)=1 then return("Almenys són necessaris dos nombres enters."),
          j:true,
          for i:1 thru length(n) while j do (j:és_enter_no_nul?(n[i])),
          if not j then return("Els arguments han de ser enters no nuls."),
          j:n[1],
          for i:2 thru length(n) do (j:euclides_mcm(j,n[i])),
          return(j)
      )$
```

Instruccions

- *Des de la web "maxima amb wxmaxima" baixa el document "divisibilitat.wxm" i guarda-lo en la carpeta "els meus documents".*
- *Amb el "doble clic" obri el document "divisibilitat.wxm".*
- *Situa el cursor en qualsevol sentència i l'executes amb la combinació de tecles "shift" i "enter".*
- *Prova les sentències proposades en la pàgina 1.*
- *Una vegada has finalitzat tanca el document sense guardar-lo.*

3.11.UTILITZACIÓ UN "PAQUET" DE FUNCIONS

Per utilitzar un conjunt de funcions sense visualitzar-les has de transformar el document "wxm" en altre de tipus "mac", i després carregar-lo amb la sentència "load"

Instruccions

- *Amb el "doble clic" obri el document "divisibilitat.wxm".*
- *Guarda-lo en el format (*.mac) en la carpeta "els meus documents".*
- *Tanca la sessió de "wxMaxima".*
- *Obri una sessió de "wxMaxima" i executa la sentència load("C:/Documents and Settings/Propietario/Mis documentos/divisibilitat.mac");*
- *Prova les sentències proposades en la pàgina 1*
- *Una vegada has finalitzat tanca el document sense guardar-lo.*

3.12.GUARDAR EL DOCUMENT EN LES CARPETES DE "MAXIMA"

Per poder utilitzar les nostres funcions de forma més senzilla, amb una simple sentència load("divisibilitat"), s'ha de copiar el document "divisibilitat.mac" en la carpeta
"C:\archivos de programa\maxima-5.21.1/share/maxima/5.21.1/share/".

Instruccions

- *Còpia el document "divisibilitat.mac" situat en la carpeta "els meus documents" en la carpeta "C:\archivos de programa\maxima-5.21.1/share/maxima/5.21.1/share/".*
- *Obri una sessió de "wxMaxima" i executa la sentència load("divisibilitat");*
- *Prova les sentències proposades en la pàgina 1.*
- *Una vegada has finalitzat tanca el document sense guardar-lo.*

3.13.INSTAL·LACIÓ DEL DOCUMENT "DIVISIBILITAT.MAC"EN "MAXIMA"

Si utilitzes molt aquestes funcions seria convenient que "Maxima" les carregara automàticament cada vegada que iniciem una sessió i per això has d'afegir la sentència "load("divisibilitat")$" al document "maxima-init.mac" que està situat en la carpeta "C:\archivos de programa\maxima-5.21.1/share/maxima/5.21.1/share/"

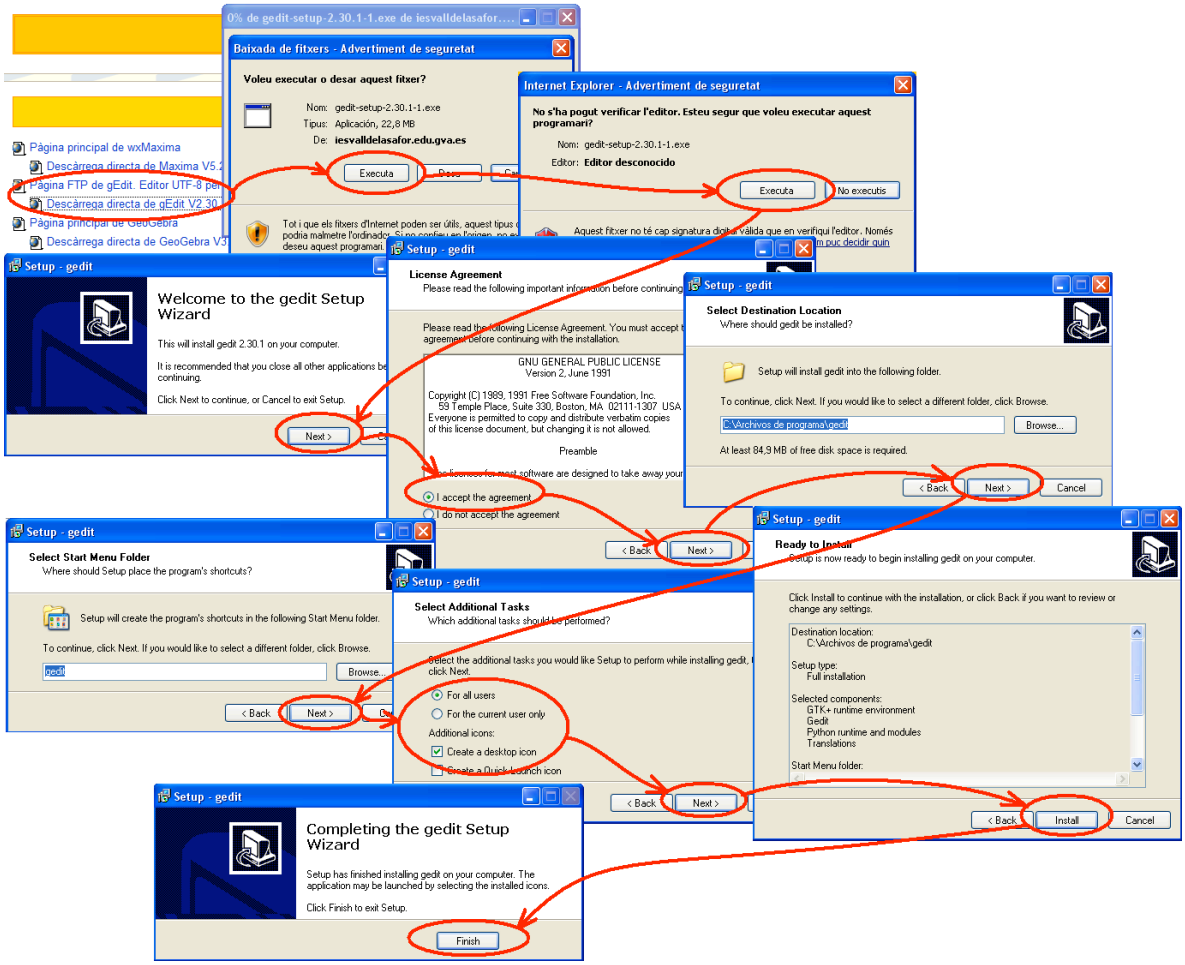
És fàcil observar que el programari "wxMaxima" utilitza documents del tipus "mac" però no els edita, per tant caldria escriure altra vegada totes les sentències del document "maxima-init.mac" amb la sentència "load" afegida i tornar a guardar-lo. En la mesura que aquest document és més complicat resulta molt inconvenient aquest mètode i s'ha de recórrer a un editor que accepte la codificació de caràcters "UTF-8" i siga compatible amb el programari "wxMaxima".

L'editor que recomane és "gEdit" per a "Windows" i el pots trobar en la pàgina d'Internet http://ftp.gnome.org/pub/gnome/binaries/win32/gedit/. També el trobaràs en la pàgina "web" "Maxima amb wxMaxima".

Primer instal·laràs l'editor i a continuació modificaràs el document maxima-init.mac".

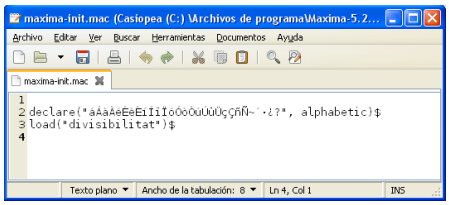
Instruccions

- *Clica la frase "Descàrrega directa de gEdit V2.30. Editor UTF-8 per a Windows".*
- *Clica el botó "Executa" per iniciar la instal·lació.*
- *Clica el botó "Executa" per informar que estem segurs de fer la instal·lació.*
- *Clica el botó "Següent" de la finestra que dóna la benvinguda.*
- *Accepta l'acord de la llicència i clica el botó "Següent".*
- *Clica el botó "Següent" de la finestra que informa de la carpeta d'instal·lació.*
- *Accepta el nom del menú clicant el botó "Següent".*
- *Indica que vols una icona en l'escriptori i clica el botó "Següent".*
- *Clica el botó "instal·la" per continuar el procés.*
- *I per últim clica el botó "finalitzar".*



Instruccions

- *Fes "doble clic" damunt de la icona de l'editor "gEdit".*
- *Obri el document "C:\archivos de programa\maxima-5.21.1/share/maxima/5.21.1/share/maxima-init.mac".*
- *Escriu una nova línea amb el text load("divisibilitat")$.*
- *Guarda el document i tanca l'editor "gEdit".*
- *Obri una sessió de "wxMaxima".*
- *Prova les sentències proposades en la pàgina 1.*
- *Una vegada has finalitzat tanca el document sense guardar-lo.*



3.14.TASQUES ADDICIONALS

En la pàgina "web" "Maxima amb wxMaxima" trobaràs una petita col·lecció de documents amb exemples de programació.

4.ACOMIADAMENT

Espere que aquesta xicoteta i ràpida introducció a la programació amb "Maxima" siga la clau per entrar per la porta d'un món ple de recursos per a la docència de les matemàtiques. Moltes gràcies.

REFERÈNCIES DOCUMENTALS

Bruzón Gallego, M.S. Ramírez Labrador, J. (2009). *Modelos Matemàticos con Maxima*. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Cádiz. http://www.uca.es/softwarelibre/publicaciones

Maxima (2010a). *Manual de Maxima*. Versión 5.21. Maxima Project at Sourceforgue. http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/es/maxima.pdf

Maxima (2010b): *Maxima, un sistema de álgebra computacional*. Versión 5.21.1. Maxima. Sourceforge.net. http://maxima.sourceforge.net/es/

Rodríguez Galván, J.R. (2007): *Maxima con wxMaxima: software libre en el aula de matemáticas*. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Cádiz. https://forja.rediris.es/docman/view.php/209/356/guia_wxmaxima.pdf

Wxmaxima (2009): *wxMaxima is a cross platform GUI for the computer algebra system Maxima based on wxWidgets*. Versió 0.8.4. wxMaxima.Sourdeforge.net. http://wxmaxima.sourceforge.net/

LA INCLUSIÓ D'ACTIVITATS DE GEOGEBRA EN MOODLE

Fernando Juan
IES Joan Fuster. Bellreguard

0.INTRODUCCIÓ

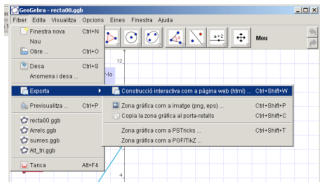
Moodle i GeoGebra han esdevingut en els darrers anys recursos coneguts per bona part del professorat de Matemàtiques. El taller pretén oferir de manera pràctica una visió de les possibilitats de configuració d'activitats de GeoGebra en pàgines web.

En les pàgines següents revisarem el procediment de creació de pàgines web amb GeoGebra i presentarem solucions diferenciades per a la visualització en ordinadors amb o sense connexió a Internet, per a la qual cosa analitzarem els diferents paràmetres de l'applet de Java que contenen les pàgines creades.

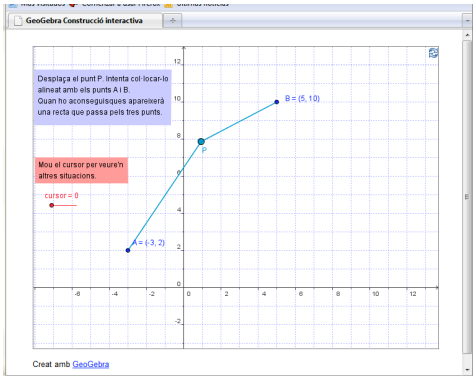
Atés que, com veurem tot seguit, GeoGebra ens permet generar pàgines web que contenen les construccions realitzades, per tal de ser visualitzades amb els navegadors d'Internet i de manera que es puga interactuar amb elles, i tenint en compte també la presència creixent de Moodle en les nostres aules, resulta convenient conéixer també les diferents possibilitats d'inclusió en els cursos creats amb Moodle, de les activitats generades amb GeoGebra.

1.CREACIÓ DE PÀGINES WEB AMB GEOGEBRA

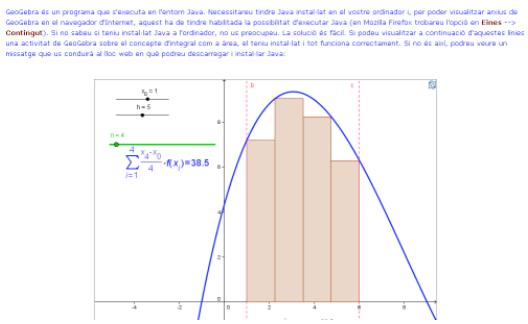
Amb GeoGebra podem exportar en forma de pàgina web qualsevol construcció realitzada:



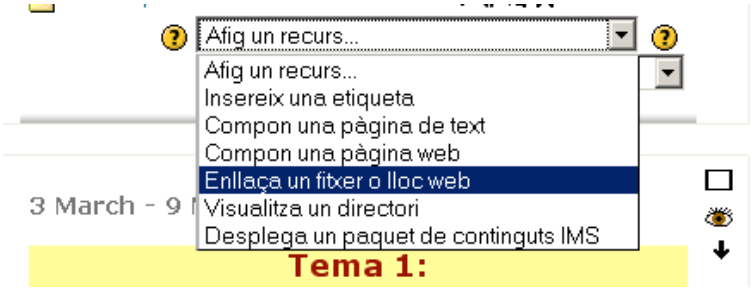
La pàgina web resultant, en ser oberta amb un navegador d'Internet, permet la visualització i la manipulació de la construcció. Podeu veure'n un exemple punxant sobre la imatge següent:



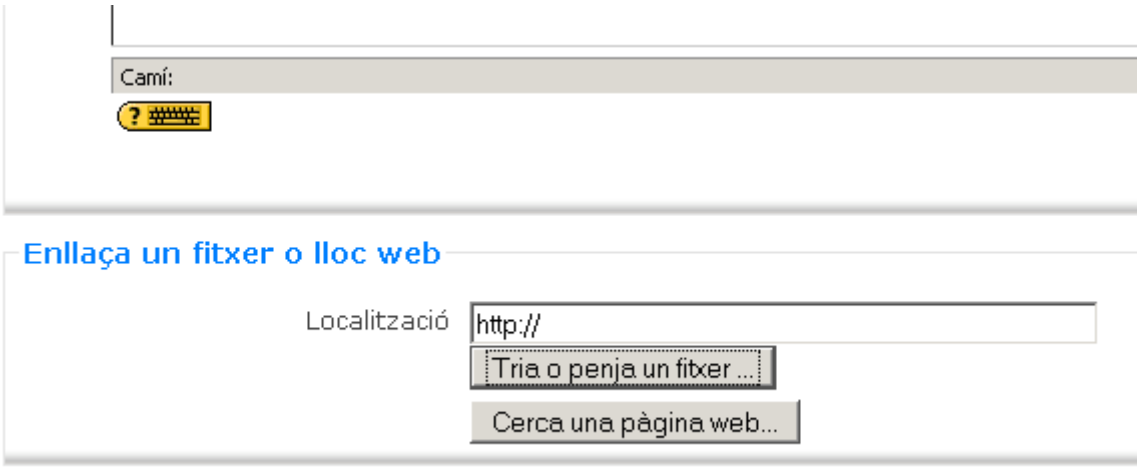
La pàgina pot ser modificada amb un editor de pàgines web per tal d'afegir textos explicatius, propostes didàctiques, imatges, etcètera. I per incloure-hi també altres construccions realitzades amb GeoGebra (punxeu sobre la imatge següent per veure'n un exemple):



Com que un dels recursos bàsics de Moodle consisteix a enllaçar pàgines web, ja tenim, evidentment, una forma fàcil d'incloure activitats de GeoGebra en un curs de Moodle: podem inserir un enllaç a la pàgina creada amb el procediment anterior, mitjançant el recurs "Enllaça un fitxer o lloc web". La pàgina pot estar allotjada en un lloc web extern al curs de Moodle, o en la zona de fitxers del propi curs.



En la pàgina d'edició que s'obrirà, inclourem un títol (el text que es visualitzarà) i indicarem l'adreça web o cercarem el fitxer:



- Si es tracta d'un lloc web extern al curs, podem obrir la pàgina i copiar l'adreça que apareix a la barra de navegació de l'explorador.
- Si és un fitxer que tenim en el nostre ordinador, el botó "Tria o penja un fitxer..." ens permet cercar-lo i situar-lo en la zona de fitxers del curs (si no ho havíem fet anteriorment), i seleccionar-lo.

Ara bé, Moodle ens permet també una utilització més "integrada" de les construccions de GeoGebra. Veurem algunes possibilitats en les pàgines següents, però abans d'això és convenient que fem una ullada a l'applet de GeoGebra.

2. L'APPLET DE GEOGEBRA

El programari de GeoGebra està basat en la tecnologia de Java. Un applet de Java (una *miniaplicació*, se sol traduir de vegades) està format per una sèrie d'instruccions que són interpretades per la *Màquina virtual de Java* quan aquesta està instal·lada en l'ordinador i ha estat habilitat el seu ús en el navegador d'Internet. Els dos enllaços següents condueixen a dues pàgines web de Java. La primera us permetrà instal·lar Java a l'ordinador. Si, una vegada instal·lat, els applets no es visualitzen en el navegador d'Internet, la segona conté instruccions per a habilitar l'entorn d'execució de Java en els diferents navegadors existents

http://www.java.com/es/download/
http://www.java.com/es/download/help/enable_browser.xml

La pàgina web que crea GeoGebra conté un applet. Si obrim la pàgina amb un editor de text, podem veure'n tot el codi html. Ací en tenim un exemple. Observeu que l'applet de GeoGebra té una etiqueta d'inici de la forma **<applet...>**, la qual informa al navegador que en aquest punt comença un applet de Java i s'especifica el tipus d'applet (de GeoGebra) i algunes coses més (per exemple l'amplada [655 píxels] i l'alçada [490 píxels] que ocuparà la construcció de GeoGebra). Després venen una sèrie d'etiquetes amb especificacions sobre els arxius necessaris per a visualitzar la construcció i sobre les opcions de visualització. Finalment, una etiqueta de tancament: **</applet>**. La resta (el codi html anterior a l'etiqueta <applet...> i el posterior a l'etiqueta </applet>) inclou fonamentalment el codi necessari per tal que el navegador identifique l'arxiu com una pàgina web. Però la part essencial per als nostres propòsits és l'applet.

```
<!DOCTYPE html PUBLIC "-//W3C//DTD XHTML 1.0 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/xhtml1/DTD/xhtml1-transitional.dtd">
<html xmlns="http://www.w3.org/1999/xhtml">
<head>
<title>GeoGebra Construcci&#243; interactiva</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=utf-8" />
<meta name="generator" content="GeoGebra" />
<style type="text/css"><!--body { font-family:Arial,Helvetica,sans-serif; margin-left:40px }--></style>
</head>
<body>
<table border="0" width="655">
<tr><td>

<applet name="ggbApplet" code="geogebra.GeoGebraApplet" archive="geogebra.jar"
        codebase="./"
        width="655" height="490" mayscript="true">
        <param name="filename" value="recta00.ggb"/>
        <param name="java_arguments" value="-Xmx512m" />
        <param name="cache_archive" value="geogebra.jar, geogebra_main.jar,
geogebra_gui.jar, geogebra_cas.jar, geogebra_export.jar, geogebra_properties.jar" />
        <param name="cache_version" value="3.2.42.0, 3.2.42.0, 3.2.42.0, 3.2.42.0, 3.2.42.0,
3.2.42.0" />
        <param name="framePossible" value="true" />
        <param name="showResetIcon" value="true" />
        <param name="showAnimationButton" value="true" />
        <param name="enableRightClick" value="true" />
        <param name="errorDialogsActive" value="true" />
        <param name="enableLabelDrags" value="true" />
        <param name="showMenuBar" value="false" />
        <param name="showToolBar" value="false" />
        <param name="showToolBarHelp" value="false" />
        <param name="showAlgebraInput" value="false" />
        <param name="allowRescaling" value="true" />
```

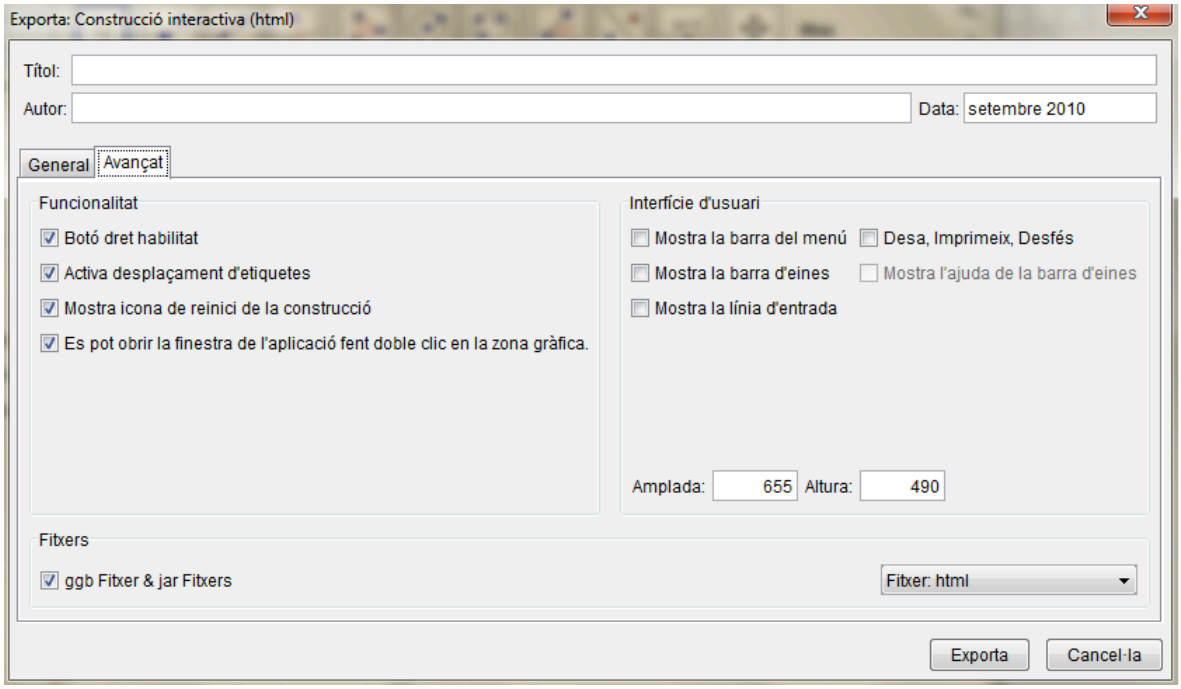
```
Sorry, the GeoGebra Applet could not be started. Please make sure that Java 1.4.2 (or later) is
installed and active in your browser (<a href="http://java.sun.com/getjava">Click here to install Java
now</a>)
</applet>

<p><span style="font-size:small">
Creat amb
<a href="http://www.geogebra.org/" target="_blank" >GeoGebra</a>
</span></p></td></tr>
</table></body>
</html>
```

3.PARÀMETRES CONFIGURABLES DE L'APPLET DE GEOGEBRA

3.1.ASPECTE DE LA CONSTRUCCIÓ I FUNCIONS PERMESES:

Les opcions que apareixen en la pestanya "Avançat" del menú d'exportació de GeoGebra tenen el seu reflex en l'applet:



L'amplada i l'altura de la construcció es reflecteixen, com hem vist, en la primera etiqueta de l'applet:

```
<applet name="ggbApplet" code="geogebra.GeoGebraApplet" archive="geogebra.jar"
        codebase="./"
      width="655" height="490" mayscript="true">
```

Les marques de verificació actives en la apart superior del menú corresponen a l'opció "true" de l'applet. Les presentarem en el mateix ordre:

```
<param name="enableRightClick" value="true" />
<param name="enableLabelDrags" value="true" />
<param name="showResetIcon" value="true" />
<param name="framePossible" value="true" />
```

Les marques de verificació inactives, si apareixen, es transformen en l'opció "false:

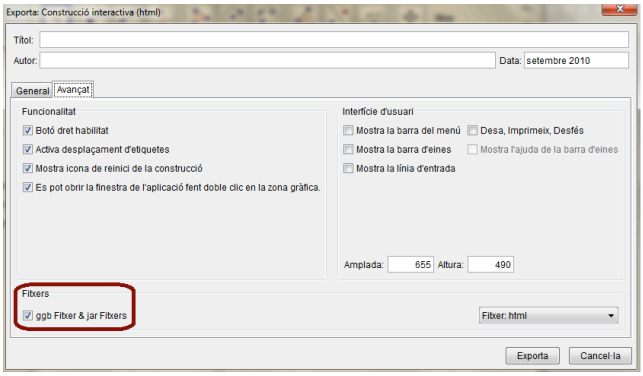
```
<param name="showMenuBar" value="false" />
<param name="showToolBar" value="false" />
<param name="showAlgebraInput" value="false" />
<param name="showToolBarHelp" value="false" />
```

Algunes opcions sols són configurables des de l'applet (és a dir, editant la pàgina web i incloent l'etiqueta corresponent). Podeu veure la llista completa de paràmetres seguint el següent enllaç:

http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/GeoGebra_Applet_Parameters

3.2.GESTIÓ DELS FITXERS:

A la part inferior esquerra del menú d'exportació apareix una casella de verificació el paper de la qual pot ser determinant per al bon funcionament de l'applet. Apareix destacada en la següent imatge:



Amb la casella activada, junt amb la pàgina web d'extensió html es guarda una còpia de l'arxiu de GeoGebra (en l'exemple, recta00.ggb) i 6 arxius Java (extensió jar):

geogebra.jar
geogebra_cas.jar
geogebra_export.jar
geogebra_gui.jar
geogebra_main.jar
geogebra_properties.jar.

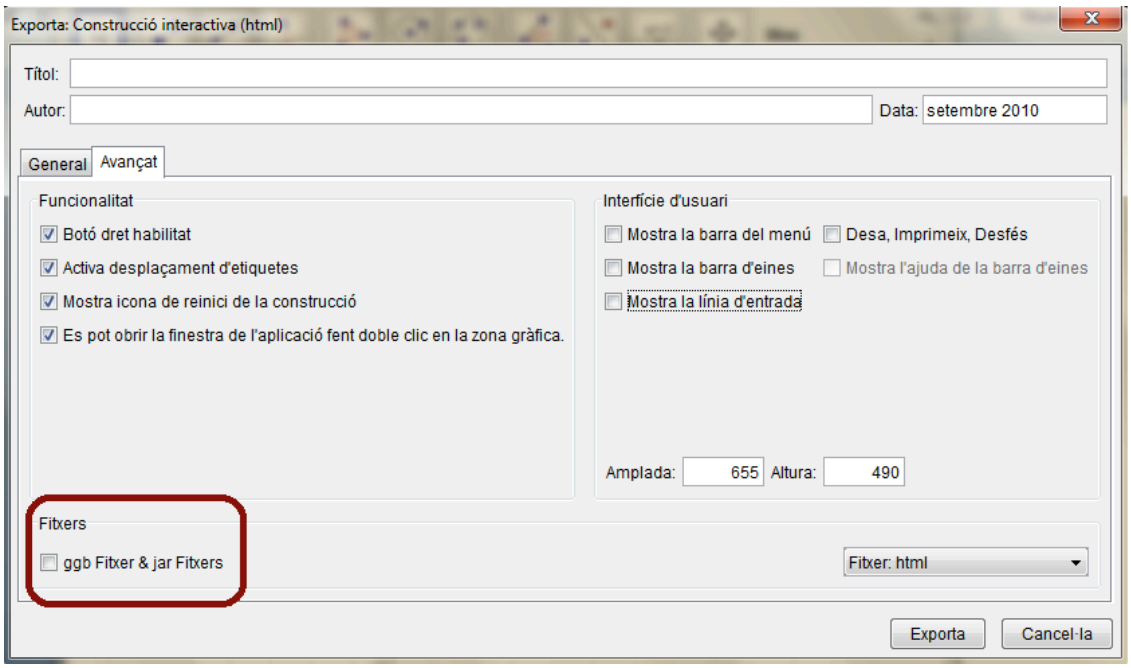
Aquests darrers són, en podríem dir, el motor de GeoGebra. L'applet fa referència al primer d'ells en l'etiqueta inicial:

```
<applet name="ggbApplet" code="geogebra.GeoGebraApplet" archive="geogebra.jar"
        codebase="./"
       width="655" height="490" mayscript="true">
```

I els requereix tots més endavant:

```
<param name="cache_archive" value="geogebra.jar, geogebra_main.jar, geogebra_gui.jar,
geogebra_cas.jar, geogebra_export.jar, geogebra_properties.jar" />
```

Tanmateix, si la casella és inactiva, es crea només la pàgina web, sense cap altre arxiu:



L'applet així creat, amb aquesta opció inactiva, té un aspecte bastant diferent:

```
<applet name="ggbApplet" code="geogebra.GeoGebraApplet" archive="geogebra.jar"
        codebase="http://www.geogebra.org/webstart/3.2/unsigned/"
        width="655" height="490" mayscript="true">
        <param name="ggbBase64"
value="UEsDBBQACAAIAOWEMz0AAAAAAAAAAAAAAAAMAAAAZ2VvZ2VicmEueG1s3Vxdc
uO4EX7ePQWKqZqyk4gmQFI/NfZs2Z7dGe96Y6e82cpPpaYgCpJoU6SGAGekuUFOkbzlCHnP3iQn
SQMgaf5ItCRLa1t8MEkQBLv7+xroBiAffzObBOgTi7kfhScGNi0DsdCLBn44OjESMWx1jW/efH08Y
tGI9WOKhlE8oeLEsE1iyPLEf/P1V8d8HH1GNFBVfvbZ5xNjSAPODMSnMaMDPmZMlMppMvMD
n8bzq/4t8wQ/MUScyHLdxkU4TURW5k0Glz7Pbo/U96aBL976n/wBi1EQeSdG2wXJ4epnFgvfo8GJ4V
i6hJwYpPIQimz5dBzF/pcoFLL6feNDKEGI+18YGITIsuMjpecxS7zAH/g0lLooOaASQp/9gRhLEVxo
kvmjMcjqdLu6NS+K4sHNnAs2QbO/sjgCcRwi7TzXd3a3J+84yMWkXOpR8U41wz7dMCEAFY7ojO
X2GsX+oHh9wc+iYJCbeRr5oTinU5HEClCcFt2IuWwevhRLcU/DUcDSMgIGHzPvrh/NbrQJbN30T/
OpekWJ0x+dR0EUo1gaF9Qepee+Pqs6Us68VttRleSpr06qimw3r4Itouqoc7GhwA+1dKnqONObWNm
XfI5kgbQjUDGzSED7DKA1UBL64jK7AQrc3RtA1v9DMumDCxRJkDeJt9aklBkNgMl/Th1NXv9FXy
uSVeh1fMfikAWaRCFgn0QJR5/KZB0wz58A2LqcpMJLPP8EAurSARvFLNNLO5g2p3pqFXlaKT4+
ymSQInD4rCegowB9hdRV+rEAJ5JXAyqghDPgeT9miFjYkh0EC9iEgT8JxZ4wmbDY93IzeknMo9iQ
34ePJtmnM9KrbiVSPUTF/vcGgMc1KlqKPy6W/cl0TGWLOKUSnUOPUdRbNfhjNEi/ndbjgepaJn6o
xUETOpOdHlzRPo+CRLAbD4waXkYeFarv1PKlfYGjXoJXiHLuuZStLa+G/ozd++fiDuie72IMxAoZ5
8ovRdEDaQi4KzCga5mmjOJTJltX11ltNAWllffrj2qqaVgUrpMJDQcopBOofjFUYPiy/0XUyhBC//vH
P5HqtCg+MQ66pvV7BH8O4Z7Il/5WqGbLhwdt+RfeOIRrV15jsMjh31PMEpG1f6blSaWoEUb1Vjnq
Z8YmrLAKnFAMyUlhNZLiajgEOksQsYbQbWKM8h8ua7sp4lhx4Evu4F8d675XjhnqTbuKRZPu14/
QHbu21t5yNtC+RTSBewvVX0JH6XGr0rFoPMvs2eVDfbxjdtulo9Gw7uYkt3KSt+yMwotYjhXLdZ22
onn5OVHPrcxR4Jrce0HdDU7XcYPTJ3IDR0HRIqu5QcvOer513aCM1g0byfIKZNcapdOaJWmzJXn
aWmYraiztce1Kj7vc4AUmb8f56u6VxcvV8b/Y7dRcZK5QqDiUdh3imk6pdi3WarAE+xjqOlzHPP4E4
nHPFzkYgfTwi1BABMRUxJDGJwVD3TE2lSHlVfhTTEMu84qybhsy4qzGiP56jOjvDSNaxMRl7DuK
E45pLehMWxCq9EqH/ZwpwWaQWnKZtmY2n3w4heR1BoPPwfzg+hC10Pzg9PAQHaGDmb6fyXs
DHT0Yl8qmKkEpNp0edonrELtDul1sO81drFUNPh8S/qwm/FlF+LNVhT+rR9Qucdyehdt2z3Yc0n6M
8A8MpmA7NQIqjaRHKn1+h2T5b0Ebpco1qFL107jZT4dJqHiT6xkvd1R3ZUdtDJsKiejGfrqCfM3M
EGwmcMqNVx+TSLx+yzgEUb/8myIWoGkCFro2kXQtSCSQFwX//U8AWUncCqJXv8HWaypFoGD
jSR9e4OoNjk6Rj85MVeGPCQ0hFUFU5nhslPj8Y8I4olMaM0hX4l/+paolIUUxWJAieIymlHOKprJB
ARLrVk0toFEnqdTCKKv02CDGagQFN4GisrBqx8kFjcW1jE20sc8XBkF6WMW9dWL387quaQK4k
4htNXVXGUAgdF0QjGNsdhaEFFtJc97ul6m6FUs527PUty/VUpZZjj4g9Nyxqb57waYqk4psxQHLI/h
1FMxHMK6Wh/FzPXi/1cnvt3CypSGrg/YUXsa6qqerDnRVOZnvgJ0fSmz1tzMgdHMrT4KtHYCrkH
uUniuw4i2F4MtZWU01vA01XYW8TZruItmAbL904K6iajYHRhwTFx+TpuSiqvyvn1w0wjbYI9isdJK
mY9qlPrmjc8K2Y9q2e3+0Xy5qbI9Qay33tsrsKcmSe5P0cPF4wf433CMkM/9rdUwd8HTbZpcU/fAZw
1SOI65iMY5gMKfBJUi7eHZudjrzeS2IGDUHCVL5HLbRDsFfPbt8tAPjFPdsfFyw7rEd4B+H13whX
uM18BrvBV65m+IUr/qC1JPClU61jWtQ+WtA5e8FVFXParn5R54InFMNzqgGzu0a4NzuBTg1PyK/A
jj5iFfBZaRxua3h8u6hpLU4ufBus8mF2oao3Zp94ar6I1dml9l1rO3q1+z6fh27vn8BdnXz7Gmd7QkbLX
```

```
innci7mlHvmo1aDZ7vtjG7UrRFOPD1vg+ofZVWLq4B1UPsdJdWtryizmuDRJZ1LUsWvFtVjF5QZL
2YEe80I65rjAjWY0Swr4xoLd4SkQUGrul03OLx0gmRxuzva4SYrEeIyb4SIusilmyAsLHZK06SWM9
6tmsVRrxfticmXI8R4b4yYtkWmXzrZmWxqoOfMyUWbx4gpc0DP0aJ3DaQblWcSnuxJGav6DTir8N
0w4Ba0ee+SKgnpVpjWZ885bL+4q3ZSALdTZfta1tDm0LQiydeN3zcptoVV63TAHaLW5W/33uzdcxe
dbVE7g83t7gR4oe9NyLZvREv996I9qYOvMoegAsdPnyvF/Z/0Av7l7VgQi7akzTn/4B15Vt1AdXv1IUD
acYH/FD6X98LQHa5FyALKdLtuOq82V6A1deupIF2N5HXpNJu5lqd8jqks3gZkmA3C6fKPp/9puR5
hlONSN7uFZJZauRms+akU9kN/qyToQfmvPYKqtYSr2stdTv5I5CS23VfMJjBXoGZL4hkjmdvb7lqJ
+AcFX8IrH4an/5rgDf/B1BLBwhwh0lJ/ggAAExAAABQSwECFAAUAAgACADlhDM9cIdJSf4IAAB
MQAAADAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAZ2VvZ2VicmEueG1sUEsFBgAAAAABAAEAOgAA
ADgJAAAAAA==" />
        <param name="image" value="http://www.geogebra.org/webstart/loading.gif" />
        <param name="boxborder" value="false" />
        <param name="centerimage" value="true" />
        <param name="java_arguments" value="-Xmx512m" />
        <param name="cache_archive" value="geogebra.jar, geogebra_main.jar,
geogebra_gui.jar, geogebra_cas.jar, geogebra_export.jar, geogebra_properties.jar" />
        <param name="cache_version" value="3.2.42.0, 3.2.42.0, 3.2.42.0, 3.2.42.0, 3.2.42.0,
3.2.42.0" />
        <param name="framePossible" value="true" />
        <param name="showResetIcon" value="true" />
        <param name="showAnimationButton" value="true" />
        <param name="enableRightClick" value="true" />
        <param name="errorDialogsActive" value="true" />
        <param name="enableLabelDrags" value="true" />
        <param name="showMenuBar" value="false" />
        <param name="showToolBar" value="false" />
        <param name="showToolBarHelp" value="false" />
        <param name="showAlgebraInput" value="false" />
        <param name="allowRescaling" value="true" />
Sorry, the GeoGebra Applet could not be started. Please make sure that Java 1.4.2 (or later) is
installed and active in your browser (<a href="http://java.sun.com/getjava">Click here to install Java
now</a>)
</applet>
```

Analitzarem quines coses han canviat:

- La referència a l'arxiu recta00.ggb ha desaparegut. Ja no es necessita aquest arxiu, perquè ha estat substituït pel codi alfanumèric que correspon al paràmetre **ggbBase64** que, al seu temps ha ocupat el paper del paràmetre **filename**:

```
<param name="ggbBase64"
value="UEsDBBQACAAIAOWEMz0AAAAAAAAAAAAAAAAMAAAAZ2VvZ2VicmEueG
1s3VxdcuO4EX7ePQWKqZqyk4gmQFI/NfZs2Z7dGe96Y6e82cpPpaYgCpJoU6SGAGekuUF
OkbzlCHnP3iQnSQMgaf5ItCRLa1t8MEkQBLv7+xroBiAffzObBO … etcétera, etcètera"
```

- En les declaracions de l'etiqueta inicial, l'expressió `codebase="./"` ha estat reemplaçada per una adreça URL que obligarà a cercar els 6 arxius d'extensió jar en el lloc web de GeoGebra:

```
codebase="http://www.geogebra.org/webstart/3.2/unsigned/"
```

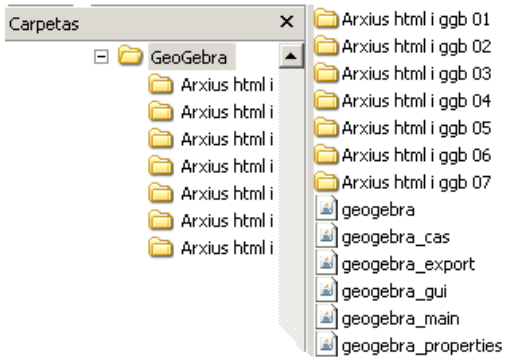
Resumint, aquesta segona forma de crear la pàgina web aporta una evident comoditat: la pàgina web creada és autònoma; no necessita arxius auxiliars. Tanmateix, aquesta autonomia és relativa: l'applet no funcionarà correctament si la pàgina s'obri en un ordinador sense connexió a Internet, ja que el navegador no podrà trobar els 6 arxius d'extensió jar que executen GeoGebra.

4.ORGANITZACIÓ DELS ARXIUS PER A LA VISUALITZACIÓ SENSE CONNEXIÓ A INTERNET

En crear la pàgina web amb l'opció ☑ ggb Fitxer & jar Fitxers activa, GeoGebra desarà en la mateixa carpeta que la pàgina HTML una còpia de l'arxiu de GeoGebra i els 6 arxius auxiliars: geogebra.jar, geogebra_cas.jar, geogebra_export.jar, geogebra_gui.jar, geogebra_main.jar i geogebra_properties.jar.

L'applet de GeoGebra utilitza aquests sis arxius per mostrar la construcció (és a dir, l'arxiu d'extensió ggb). No els cercarà en el servidor de GeoGebra, sinó que **els cercarà en la mateixa carpeta on estiga l'arxiu html**. I també **cercarà l'arxiu ggb en la mateixa carpeta**. És a dir, ens obliga a tindre els 8 fitxers en la mateixa ubicació. Això pot ser convenient al principi, però un poc molest si tenim moltes pàgines: si les posem totes en una mateixa carpeta, pot resultar un poc embolicat; si les posem en carpetes diferents, ho tenim millor estructurat, però en cada una d'elles han d'estar els 6 arxius jar, que ocupen vora 3 Mb. Això últim potser ja no siga problemàtic en els ordinadors actuals, que compten amb molt d'espai, però sí que ho és si volem posar les mateixes pàgines en un servidor d'Internet (en Moodle o fora de Moodle).

Una solució que resulta adequada consisteix a mantenir els arxius jar en una carpeta específica: es col·loquen els sis arxius jar en una carpeta i tots els applets de GeoGebra es modifiquen de manera que cerquen els arxius en eixa carpeta. Això es pot fer posant l'adreça "absoluta" de l'arxiu geogebra.jar, però és molt més versàtil posar l'adreça "relativa" ja que, en el segon cas, si canviem d'ubicació la carpeta GeoGebra o la copiem a un altre ordinador, tot continuarà funcionant perfectament. Una organització que pot resultar eficient és la següent:



En una mateixa carpeta (GeoGebra en l'exemple) posem els arxius jar i una carpeta per cada construcció. Aquestes contenen cada una l'arxiu html i l'arxiu ggb corresponents. Com farem per redireccionar els applets correctament?:

Una vegada creada la pàgina html l'obrim amb un editor de pàgines web (o simplement amb el bloc de notes de Windows o programa equivalent de Linux) i en l'etiqueta que obri l'applet, localitzem l'expressió archive="geogebra.jar":

```
<applet name="ggbApplet" code="geogebra.GeoGebraApplet" archive="geogebra.jar"
        codebase="./"
    width="655" height="490" mayscript="true">
```

La forma d'indicar que un arxiu es troba en la carpeta situada en un nivell immediatament superior és anteposar al nom de l'arxiu l'expressió **../** (dos punts i una barra inclinada). Així, haurem d'afegir aquest text davant del nom de l'arxiu, per tal d'obtenir:

```
<applet name="ggbApplet" code="geogebra.GeoGebraApplet" archive="../geogebra.jar"
        codebase="./"
      width="655" height="490" mayscript="true">
```

Una vegada fet això, guardem l'arxiu html. Ja es pot aplicar l'estructura de carpetes que hem descrit.

5. Inserint applets de GeoGebra en l'editor de pàgines web de Moodle

Moodle compta amb un editor de pàgines web que s'utilitza en la creació de la majoria dels recursos i activitats que formen part d'un curs de Moodle: etiquetes, pàgines web, lliçons, tasques, qüestionaris... Com hem vist al principi, podem incloure activitats de GeoGebra mitjançant enllaços a les corresponents pàgines web. Tanmateix, de vegades potser preferirem integrar completament els applets de GeoGebra en el recurs de Moodle. El procediment no resulta excessivament complicat:

Durant la creació d'una pàgina amb l'editor web de Moodle (o quan l'editem posteriorment) podem incloure applets de GeoGebra (i també d'altres aplicacions). Sols hem de canviar al mode d'edició HTML i enganxar el text de l'applet que hem creat amb GeoGebra (amb l'opció "ggb Fitxer & jar Fitxers" inactiva).

Els passos per a crear una pàgina web d'aquestes característiques amb Moodle seran:

- En la secció del curs on volem crear la pàgina i amb el curs en mode d'edició, despleguem el quadre de selecció "Afig un recurs..." i seleccionem l'opció "Compon una pàgina web".
- En la finestra d'edició que s'obrirà donem títol a la pàgina (el text que apareixerà en la portada del curs) i, si volem, escrivim un resum en el camp corresponent.
- Passem tot seguit al camp "Text complet". Situem el cursor dins del quadre d'escriptura i canviem a mode HTML (haurem de punxar sobre la icona <>). Enganxem ara el text de l'applet i tornem al mode de visualització normal. Si volem, afegim text o imatges davant o darrere de l'applet.
- Una vegada completa la pàgina que volem que es visualitze, definim la resta de paràmetres que apareixen en pantalla i premem el botó "Desa els canvis i torna al curs" o, si ho preferim, el botó "Desa els canvis i visualitza".

  Notes:

  - Per assegurar-vos que no esteu mesclant el text introductori o complementari amb el codi l'applet, podeu canviar a mode HTML durant un moment per comprovar-ho, i tornar després a l'entorn gràfic de visualització habitual.
  - En mode HTML la tecla Enter no produeix realment un salt de línia en el document final. Per forçar un salt de línia cal escriure l'etiqueta <br />.
  - Si per algun motiu l'applet conté referència a l'arxiu de GeoGebra (extensió ggb) i/o no volem utilitzar el *motor* de GeoGebra de geogebra.org, haurem de:

- Situar els arxius necessaris en la zona de fitxers del curs.
- Modificar l'applet per tal d'indicar les adreces corresponents. Explicarem açò amb un poc més de detall, emprant l'exemple vist anteriorment:

  En l'expressió **<param name="filename" value="recta00.ggb"/>** haurem d'indicar al navegador la situació de l'arxiu recta00.ggb. El resultat serà alguna cosa semblant a:

  <param name="filename" value="http://iesjoanfuster-matematiques.edumoot.com/file.php/16/GeoGebra/recta/recta00.ggb"/>

  Una forma senzilla d'indicar l'adreça sense error consisteix a mantenir obertes simultàniament dues finestres o pestanyes en el navegador d'Internet. En una tenim la pàgina web amb l'applet en procés d'edició i en l'altra la zona de fitxers del curs. Cerquem el fitxer (recta00.ggb en aquest exemple) i, amb el cursor sobre el seu nom, premem el botó dret del ratolí i seleccionem l'opció "Copia l'enllaç". Amb l'adreça copiada tornem a l'edició de l'applet, seleccionem el nom de l'arxiu recta00.ggb i enganxem el text. El mateix, si és el cas, haurem de fer amb l'etiqueta inicial

  <applet name="ggbApplet" code="geogebra.GeoGebraApplet"
  archive="geogebra.jar" codebase="./"
  width="655" height="490" mayscript="true">

  canviant geogebra.jar per l'adreça URL corresponent.

6.El filtre de GeoGebra per a Moodle

Potser la forma més còmoda d'integrar els applets de GeoGebra en Moodle siga mitjançant la utilització del filtre de GeoGebra:

La comunitat Moodle (http://moodle.org) desenvolupa multitud d'aplicacions per a millorar la potència i versatilitat del recurs. A http://moodle.org/mod/data/view.php?id=6009 podeu trobar una immensa llista de mòduls, filtres, extensions... per als propòsits més diversos.

Des de 2006 existeix un filtre per a GeoGebra (creat per Jochem Maeusle) que es pot incorporar a la instal·lació de Moodle. La darrera versió (revisió de l'anterior creada per Sara Arjona i Florian Sonner) és d'agost de 2009 i ha millorat la funcionalitat del filtre, de manera que ara és de fàcil instal·lació i permet una major personalització dels applets que la versió original.

Una vegada instal·lat i actiu (competència de la persona que administra el lloc, que, per a la instal·lació, ha de tenir accés al servidor on estiga instal·lat Moodle), el filtre GeoGebra permet inserir applets simplement com a **enllaços als fitxers de GeoGebra** (els d'extensió ggb). Com podreu veure en la documentació que es descarrega juntament amb el filtre (en anglés), es tracta sols d'això. L'única cosa opcional serà, si ho necessitem, definir l'amplada i l'alçada de l'applet, afegint a l'adreça de l'enllaç l'expressió **?w=m&h=n**, on **m** s'ha de substituir per l'amplada en píxels i **n** per l'alçada, també en píxels.

La documentació i arxius per a la instal·lació els trobareu a l'adreça del següent enllaç, on podran trobar-se també les futures actualitzacions:

http://moodle.org/mod/data/view.php?d=13&rid=2423&filter=1

7.PER A PRACTICAR

Per a la realització del taller en les Jornades, vaig preparar un seguit de cursos destinats a la pràctica individual dels comtinguts exposats, en el lloc web http://iesjoanfuster-matematiques.edumoot.com/. Si hi esteu interessats, podeu visitar-los. Per poder realitzar les pràctiques, us hi haureu d'inscriure: per al curs **nn GGB-Moodle** heu d'utilitzar, tant per al nom d'usuari/ària com per a la contrasenya, l'expressió **semcvnn**. Podeu utilitzar-los amb total llibertat. Si voleu contactar amb mi, ho podeu fer a través del fòrum del lloc principal, o amb un correu a fdojuan@gmail.com

ENLLAÇOS D'INTERÉS

SOBRE GEOGEBRA:

http://www.isftic.mepsyd.es/formacion/enred/ofrecemos/geogebra.php
(Descàrrega dels materials d'un magnífic curs sobre GeoGebra oferit pel Ministeri d'Educació)

http://www.geogebra.org/cms/
(Lloc web de GeoGebra)

http://www.geogebra.org/cms/ca/portable
(Pàgina de descàrrega de la versió portable de GeoGebra)

http://www.geogebra.es/
(Institut GeoGebra de Cantàbria)

http://acgeogebra.cat/moodle/
(Institut GeoGebra de Catalunya)

http://thales.cica.es/geogebra/
(Institut GeoGebra d'Andalusia)

http://geometriadinamica.es/
(Lloc web del grup G4D)

http://i2geo.net/xwiki/bin/view/Main/?language=es
(Projecte europeu InterGeo)

SOBRE MOODLE

http://www.xtec.cat/formaciotic/dvdformacio/materials/td204/
(Curs de Moodle en XTEC)

http://moodle.org/
(Lloc web de Moodle)

http://docs.moodle.org/ca/Pàgina_principal
(moodle.org. Documents en català)

http://docs.moodle.org/es/Página_Principal
(moodle.org. Documents en castellà)

http://moodle.org/course/view.php?id=39
(Comunitat Moodle en català)

http://moodle.org/course/view.php?id=11
(Comunitat Moodle en castellà)

SOBRE GEOGEBRA I MOODLE

http://moodle.org/mod/data/view.php?d=13&rid=2423&filter=1
(Pàgina de descàrrega del filtre per a Moodle)

ELABORACIÓ DE MATERIALS DIGITALS PER A MATEMÀTIQUES AMB EXELEARNING

Gregori García
CEFIRE d'Ontinyent

0.INTRODUCCIÓ

Coneixerem l'eXeLearning, una eina per a la creació, l'edició i l'organització de recursos didàctics. Amb aquest programa podem crear les nostres activitats, editar els nostres continguts, o bé organitzar els nostres recursos, i tot sota un mateix entorn. Amb ell podem crear llibres virtuals que tinguen incorporats tots els recursos necessaris, com per exemple exposicions teòriques, imatges, exemples resolts, activitats interactives, applets de java, vídeos, o bé material multimèdia.

L'eXe ens permet crear material nou amb els editors i els iDevices que disposa, o bé fer servir el nostre propi a més del que puguem trobar per internet. El programa reorganitza el material i l'encapsa en un mateix entorn, està tot integrat i no s'ha d'anar obrint diferents programes, amb un hi ha suficient. Els materials creats amb l'aplicació poden complementar la forma tradicional de fer classe, o bé les activitats tradicionals de bolígraf, paper i pissarra són les que poden complementar aquesta nova metodologia de treball on l'alumnat incorpora l'ordinador com a instrument principal, i té cabuda la pissarra digital.

Font: gratisblog.com

1.QUÈ ÉS L'EXE?

L'editor XHTML de materials digitals per a l'aprenentatge eXe Learning és un entorn d'autoria, és a dir un programa per a la creació i edició de contingut multimèdia, basat en el disseny web per ajudar al professorat i món acadèmic en la creació, el disseny, el desenvolupament i la publicació de materials docents i educatius sense necessitat de ser massa competent en XTML, XML o complicades aplicacions de publicació en web.

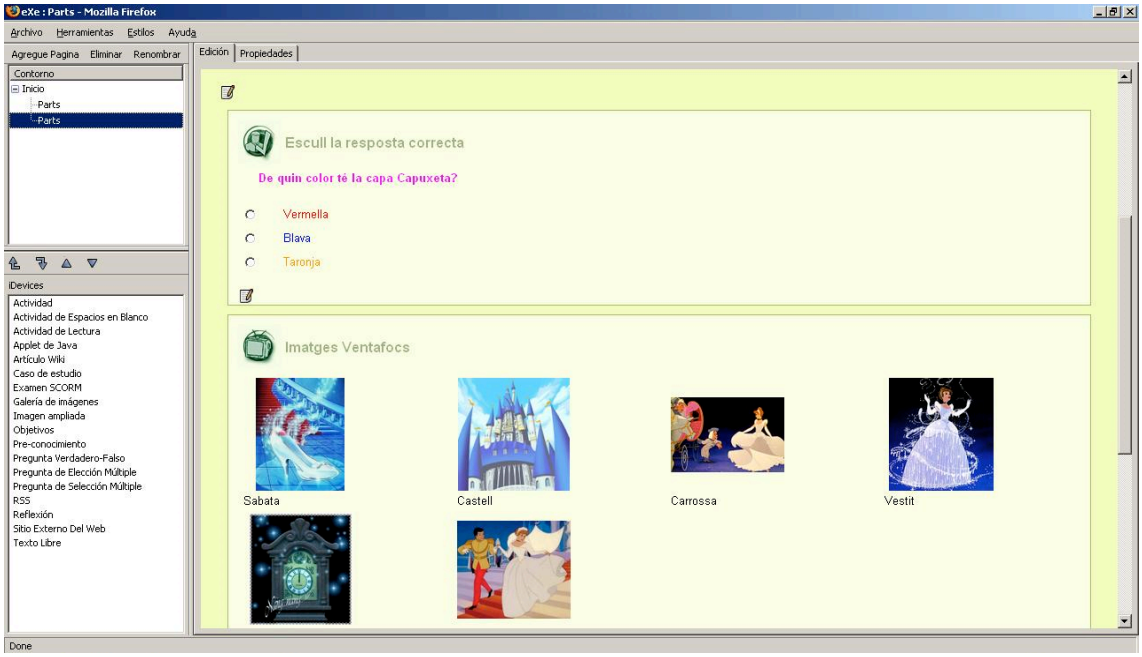


Encara que la creació de materials web en general és difícil i complicada, donat que la gran majoria de professorat no posseeix habilitats tècniques per a construir els seus propis espais web, i per tant han de dependre de programadors i informàtics per a generar continguts online d'aspecte professional. La majoria d'aplicacions d'autoria no han sigut dissenyades per a la creació i la publicació de continguts i activitats didàctiques. Però no ocorre el mateix amb l'eXe Learning, que és una eina intuïtiva, d'utilització simple i que permet al professorat publicar llocs web professionals per a l'ensenyament.

Els materials que publiquem amb l'eXe són fàcilment catalogables i compleixen els estàndards per a la publicació en els diferents sistemes de gestió de materials didàctics. Per a fer servir alguns programes d'autoria cal disposar de connexió a internet, però l'eXe funciona com una eina d'autor off-line sense el requeriment de la connexió. Per altra banda l'eXe permet la visualització de com quedaran els continguts una vegada publicats sense necessitat d'estar penjats al servidor.

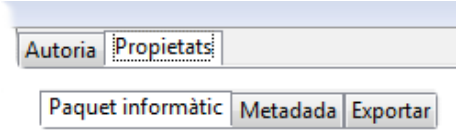
Font: arcablavamataro.wordpress.com

L'eXe pot ser instal·lat als sistemes Windows i Linux. La pàgina oficial del projecte i des d'on també es pot descarregar és *http://exelearning.org* S'ofereixen dues versions, una que instal·la els fitxers directament al disc dur i per tant el programa queda allotjat de forma permanent, o bé la versió que des d'una memòria externa pot ser executada.



2.COMENÇANT A CONSTRUIR

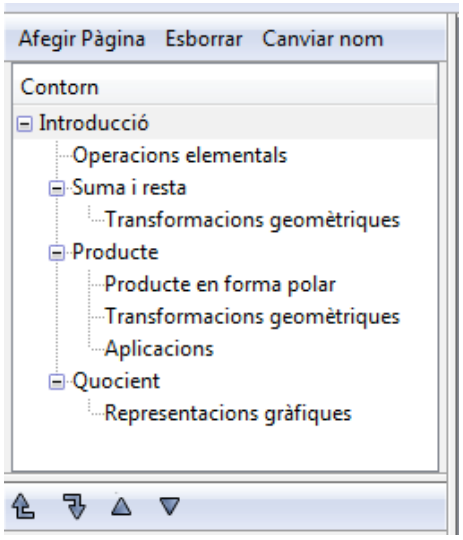
Una vegada executat el programa trobem dues pestanyes principals la d'*autoria* que és l'espai on anirem creant i afegint recursos i la de *propietats* que és on indicarem les dades del projecte. Començarem per les propietats on dins la pestanya paquet ficarem el títol, el nom de l'autor, una breu descripció, un peu de pàgina, triarem una llicència o bé incrustarem una imatge per a la capçalera. En la taxonomia podem deixar els noms dels nivells o canviar-los. Una vegada actualitzem i apliquem podem omplir les dades de la pestanya *metadata* si desitgeu incorporar el vostre treball a un LMS, com pot ser AGREGA.



Tornem a la pestanya d'autoria i es fixem en la finestra de *contorn* que es troba a la part superior esquerra. Des d'ahí podem definir l'estructura del nostre treball. Podem afegir i eliminar nodes que no seran altra cosa que les diferents pàgines del nostre projecte, anomenar i canviar el nom de les pàgines, modificar la posició o el nivell de jerarquia dels nodes i podem importar altres projectes fets en l'eXe Learning.

2.1.iDEVICES

Una vegada tenim clara l'estructura del nostre treball sols cal omplir-la de continguts. Per a fer-ho l'eXe incorpora els anomenats iDevices que són elements estructurats que proveeixen d'un bastiment on encaixar els diferents continguts. Alguns d'estos inclouen objectius, conceptes previs, activitats d'espais en blanc i text lliure. Els materials didàctics es compilen seleccionant els iDevices del menú corresponent i introduint el contingut. En definitiva, el recurs creat consisteix en la inclusió d'un conjunt de pocs o molts iDevices, segons es desitge. L'aplicació inclou una ferramenta per a la creació de nous iDevices. Abans de començar a inserir iDevices cal triar l'estil que emprarem. L'eXe incorpora una gama de fulles d'estil gràfic i es recomana seguir l'estil proposat en la mesura del possible, és a dir mantindre els tamanys i els tipus de lletra per defecte.



2.2.TIPUS DE IDEVICES

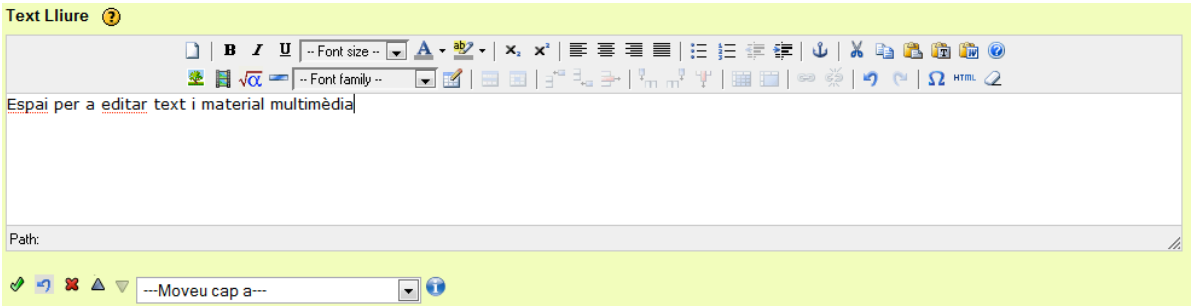
A continuació indicarem els iDevices que més se solen utilitzar.

2.2.1.TEXT LLIURE

Es tracta d'un editor de text enriquit on podem fer les següents accions

1. Ficar text i donar-li format, color, tamany, tipus de lletra, alineament, negreta, cursiva i altres efectes. Copiar i pegar text pla d'altres aplicacions.
2. Fer enumeracions i sagnats. Ficar etiquetes per a poder navegar pel document.
3. Afegir hipervincles a pàgines web externes, enllaços a llocs de dins del mateix projecte que estem creant i podem adjuntar o enllaçar altres documents de diversos formats.
4. Inserir imatges amb formats GIF, JPG i PNG, així com editar algunes propietats.
5. Inserir àudio, vídeo i animacions de flash.
6. Escriure expressions matemàtiques amb l'editor de Latex que incorpora.
7. Inserir i editar taules. Donar-les format, afegir i eliminar tant files com columnes, combinar i deslligar cel·les.
8. Té l'opció de treballar directament amb el codi html. D'aquesta forma podem copiar i pegar codi d'altres llocs i embeure'l al nostre treball, per exemple vídeos de youtube o documents que tinguem publicats a internet.

Aquest editor es troba en tots els iDevices que requereixen que escrivim text, bé per als enunciats o bé per a les respostes. El text lliure no està dins de cap quadre ni apareix amb una icona característica, segons l'escrivim a l'editor apareixerà a la pantalla. La resta de iDevices s'encapçalen amb una icona, un títol i s'emmarquen dins d'una caixa.



2.2.2.ACTIVITAT, ACTIVITAT DE LLEGIR, CAS D'ESTUDI, OBJECTIUS, PRE-CONEIXEMENT, REFLEXIÓ

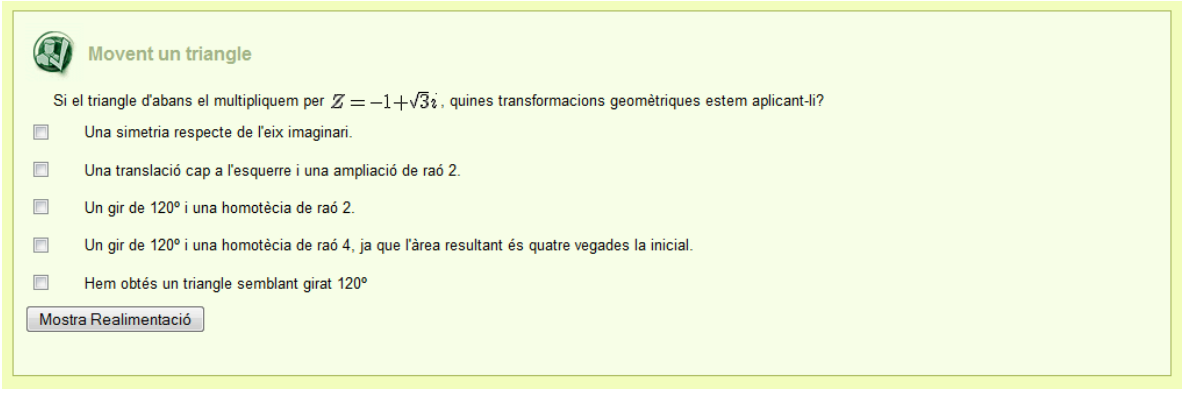
Són iDevices sense interactivitat, és a dir que sols serveixen per a presentar propostes, mostrar objectius, indicar els coneixements necessaris, plantejar activitats o projectes, ja que les respostes no s'inclouen, s'haurien de fer a banda de l'aplicació.

2.2.3.ACTIVITAT DE BUITS

Activitat interactiva més utilitzada. Permet inserir un enunciat i després escriure un text amb espais per a que l'alumnat escriga el que calga. Per exemple, podem deixar parts d'una definició en blanc, o bé el resultat d'una operació o d'un problema. Una vegada completat l'espai l'aplicació et diu si està bé o mal, i si es vol també dóna la resposta.

2.2.4.ELECCIÓ MÚLTIPLE, SELECCIÓ MÚLTIPLE, PREGUNTES VERITAT/FALS

Aquest tipus d'activitats també són interactives. Consisteixen d'un enunciat i la o les respostes s'han de triar entre diverses opcions. També està l'opció d'inserir alguna pista o retroalimentació.



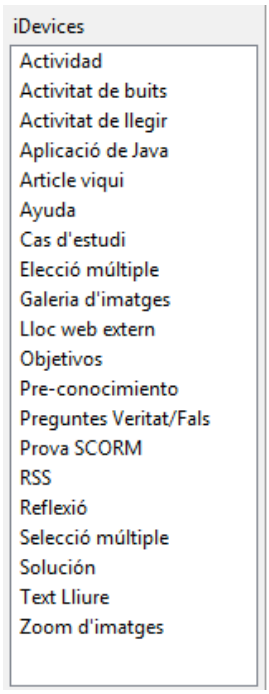
2.2.5.APLICACIÓ DE JAVA

Aquest iDevice ens permet incloure un applet de Java al nostre treball. Els més utilitzats són els de GeoGebra, Descartes i Jclic. Hem de tindre en compte dues coses, el codi font html que duu associat l'applet, i els fitxers que el fan funcionar, tant de java com el de l'aplicació que hem creat.

2.2.6.ARTICLE DE WIKIPEDIA

Podem inserir directament un article, o bé part d'ell al nostre treball.

2.2.7.GALERIA D'IMATGES, IMATGE AMPLIADA



Aquestos iDevices permeten inserir un grup d'imatges al nostre treball. La imatge ampliada consisteix en una lupa que per on la fiquem podem fer un zoom a la imatge original.

2.2.8.PROVA SCORM

Aquest tipus d'examen sols funciona si exportem el treball a una plataforma tipus Moodle, si l'emprem i no estem en una plataforma d'aquest tipus llavors no funcionarà correctament.

3.GUARDAR I EXPORTAR

Un cop tenim feta feina hem de guardar el projecte per a evitar futures pèrdues. Li fiquem un nom i l'extensió que fa servir el programa és *elp*. Aquest és el nostre fitxer mare, el que haurem d'editar per a modificar qualsevol cosa que desitgem canviar del nostre treball un cop estiga ja exportat.

3.1.PAQUET SCORM 1.2

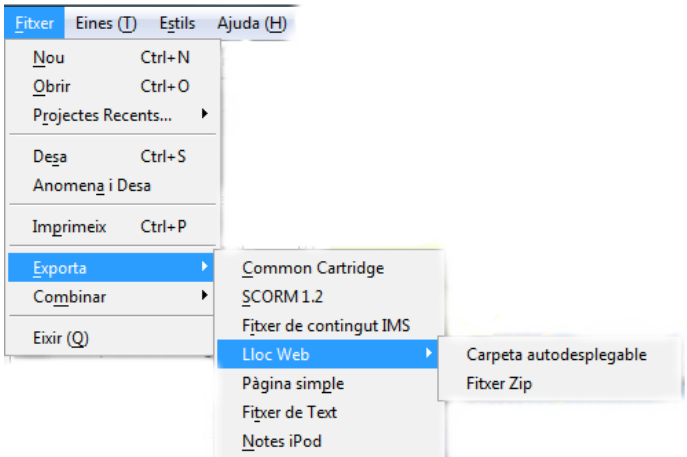
És un paquet comprimit per a poder ser exportat a les plataformes educatives digitals que soporten aquestes especificacions. Per exemple la plataforma Moodle.

3.2.LLOC WEB --> CARPETA AUTODESPLEGABLE

Amb aquesta opció exportarem el conjunt de les pàgines del projecte i la resta d'arxius dependents a una carpeta dins de la carpeta que nosaltres hagem triat. Esta opció és molt adient per poder vore com han quedat els nostres materials i per a poder retocar algun detall del codi html amb un editor extern. La pàgina inicial l'anomena *index.html*

3.3.LLOC WEB --> FITXER ZIP

Ho comprimeix tot en un fitxer *zip*. Està indicat per a quan ja tenim el projecte acabat i a punt per a pujar a un servidor web. Una vegada al servidor remot el descomprimim i ja ho tenim publicat.



3.4.PÀGINA SIMPLE

Amb aquesta opció obtindrem una única pàgina web que emprarà tot l'ample de pantalla, però sense menú de navegació.

4.CONCLUSIÓ

eXeLearning és una eina fàcil d'emprar i que ofereix moltes utilitats en el procés d'ensenyança i aprenentatge de les matemàtiques, tant en la docència virtual com en la presencial. Amb aquest programari podem recapitular tots els recursos que tenim de matemàtiques i presentar-los sota un mateix estil, a més també podem crear-ne de nous. Cal fer menció dels avantatges que ofereix el programari lliure, afavorint l'adaptabilitat i l'intercanvi dels nostres recursos educatius.

WEBGRAFIA

Pàgina oficial del projecte *http://exelearning.org*

Tutorial en la xarxa *http://www.aprenderenred.net/exelearning_tutorial*

eXeLearning en espanyol *http://www.exe-spain.es*

Tutorial de la Junta de Andalucía
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/~materiales/btoad/btoad_guias_ayuda

Manual molt complet en anglés *http://wikieducator.org/Online_manual*

Tutorial en espanyol *http://wiki.exe-spain.es/doku.php/tutorial_en_espanol?rev=1174677771*

MURPHYX (EL JUEGO DEL 9)
APLICADO AL AULA DE MATEMATICAS

Javier Muñoz
info@murphyx.com

1.OBJETIVO

El objeto del Taller realizado en las pasadas Jornadas Matemáticas era dar a conocer a los profesores de matemáticas el juego de mesa MURPHYX, basado en el cálculo numérico, con la posibilidad de incorporarlo al aula como complemento a la asignatura de matemáticas.

El juego del 9 es una forma divertida para los alumnos de familiarizarse con la técnica de comprobación aritmética de la casi olvidada "prueba del nueve", consiguiendo una gran rapidez en la comprobación de operaciones y como resultado un ahorro de tiempo en los exámenes de matemáticas.

Cuando utilizamos la técnica de "reducir un número a una cifra" para aplicar la prueba del 9, vemos que si eliminamos los 9 o múltiplos de 9, ahorramos en tiempo de cálculo para hallar la reducción (suma continua de todas las cifras, hasta obtener una sola como resultado final) ya que los "nueves" no afectan al resultado final.

Ejemplo: 72638143 = 7 + 2 + 6 + 3 + 8 + 1 + 4 + 3 = 34 = 3 + 4 = 7

Buscamos las cifras que sumen 9 entre si y al eliminarlas ya no hay necesidad de contarlas..

Si eliminamos 7 y 2 =9, 6 y 3=0, 8 y 1=9, nos queda 4 + 3 = 7

Para jugar a MURPHYX, cada jugador tiene 8 fichas aleatorias (su anverso y reverso siempre suman 9, en total tenemos 4 fichas en las que tenemos los números del 1 al 8: ficha1 y 8, ficha 2 y 7, ficha 3 y 6, ficha 4 y 5). La ficha 9 no existe, ya que no afecta al resultado.

El juego consiste en conseguir, con la reducción a una cifra de las 8 fichas, un número (del 1 al 9) llamado NIX, previamente elegido por algún jugador.

Para conseguir el NIX, debemos combinar las 8 fichas usando su anverso o reverso hasta que el resultado sea el NIX buscado.

Una vez obtenido se ordenan de menor a mayor y se para el juego diciendo ¡¡NIX!!

2.NIVEL EDUCATIVO

El juego está recomendado a partir de 9 años, edad en la que los niños se empiezan a familiarizar con las operaciones aritméticas. Los niños aprenden rápidamente el juego y entienden su aplicación en el aula.

3.TEMAS

- Explicación “prueba del nueve”.
- Técnicas y práctica del juego.
- Aplicación a la asignatura de matemáticas.

3.1.EXPLICACIÓN “ PRUEBA DEL NUEVE “

La prueba del nueve es una forma muy eficaz de comprobar operaciones aritméticas que se dejó de utilizar en los años setenta con la aparición de las calculadoras.

En wikipedia tenemos una explicación bastante detallada de la “prueba del nueve”.
http://es.wikipedia.org/wiki/Prueba_del_nueve

3.2.TÉCNICAS Y PRÁCTICA DEL JUEGO

En la parte trasera del juego va adherida una pegatina con una breve explicación de cómo se juega a MURPHYX. (ver archivo en la carpeta de material).

El juego se compone de fichas con números (del 1 al 8) en su anverso y reverso, cuyos colores corresponden con los colores del arco iris (el 1 con el rojo, el 2 con el naranja, así sucesivamente hasta el 7 que es violeta y el 8 que es blanco).

El anverso y reverso de las fichas siempre suman 9, luego tendremos cuatro tipos de fichas:

- 1 rojo / 8 blanco
- 2 naranja / 7 violeta
- 3 amarillo / 6 añil
- 4 verde / 5 azul

Cada jugador recibe 8 fichas aleatoriamente y usando su anverso o reverso, tiene que conseguir que con la reducción a una cifra de todas ellas nos de cómo resultado el número NIX que previamente ha sido elegido por el jugador mano.

Cuando ha conseguido que la reducción de todas ellas sea igual al número NIX, las ordena de menor a mayor y para el juego, diciendo ¡¡NIX!!

TÉCNICA:

1º BUSCAMOS NUEVES

Buscamos entre nuestras 8 fichas, las que sumen entre sí 9 o múltiplos de 9, para eliminarlas.

NOTA: los nueves son como si no existiesen en la técnica de la reducción a una cifra, como hemos explicado en el OBJETIVO.

Podemos hacer nueves uniendo: 1 y 8 (rojo y blanco), 2 y 7 (naranja y violeta), 3 y 6 (amarillo y añil) o 4 y 5 (verde y azul) o también con 2, 3 y 4 o 5, 6 y 7 etc.

Si tenemos 2 fichas cualesquiera del mismo color, al darle la vuelta a una de ellas tendremos siempre un 9 con la suma de las dos.

2º OBTENEMOS EL NUMERO NIX

Una vez separados las fichas que suman nueve (porque equivalen a cero) deberemos sumar las fichas que nos quedan para obtener el número NIX.

Si por ejemplo teníamos: 2 5 6 3 7 1 4 4

Separamos:

1) El 2 y el 7 (2 + 7 = 9)
2) El 3 y el 6 (3 + 6 = 9)
3) El 1, el 4 y el 4 (1 + 4 + 4 = 9)

Nos queda el 5 que es el resultado de la reducción a una cifra de todas ellas: 2 + 5 + 6 + 3 + 7 + 1 + 4 + 4 = 32, 3 + 2 = 5.

Antes de ver todos los casos posibles para hallar el NIX, vamos a ver que, al igual que el 9 equivale a un cero, se cumple una tabla de igualdades para cada número del 0 al 9.

TABLA

0	equivale a	9
1	"	-8
2	"	-7
3	"	-6
4	"	-5
5	"	-4
6	"	-3
7	"	-2
8	"	-1
9	"	0

Esta TABLA nos viene a decir que en la técnica de la reducción a una cifra, nos da igual sumar un número o restar su complementario a nueve. El resultado será el mismo:

Ejemplo: 4 equivale a -5

84, 8 + 4 = 12, 1 + 2 = 3
8 -5(4) = 3, como vemos, el resultado es el mismo.

Vamos a explicar todos los casos posibles para hallar el NIX:

1.- NIX 6

Deberíamos sumar 1 a nuestro 5 para obtener 6.

Le daríamos la vuelta a un 4 (se convierte en un 5, 4 + 1 = 5) para sumar 1 a nuestro resultado final:

2 + 5 + 6 + 3 + 7 + 1 + 4 + 5 (reverso del 4) = 33, 3 + 3 = 6

2.- NIX 7

Deberíamos sumar 2 a nuestro 5 para obtener 7.

Le daríamos la vuelta a un 8 (se convierte en un 1, 8+2 = 10, 1+ 0 = 1) para sumar 2 a nuestro resultado final. En este caso, como no tenemos un 8, le damos la vuelta a 2 fichas que sumen 8, por ejemplo a los dos 4 :

2 + 5 + 6 + 3 + 7 + 1 + 5(4) + 5(4) = 34, 3 + 4 = 7

3.- NIX 8

Deberíamos sumar 3 a nuestro 5 para obtener 8.

Le daríamos la vuelta a un 3 (se convierte en un 6, 3+3 = 6) para sumar 3 a nuestro resultado final:

2 + 5 + 6 + 6(3) + 7 + 1 + 4 + 4 = 35, 3 + 5 = 8.

4.- NIX 9

Deberíamos sumar 4 a nuestro 5 para obtener 9.

Le daríamos la vuelta a un 7 (se convierte en un 2, 7 + 4 = 11, 1+1 = 2) para sumar 4 a nuestro resultado final:

2 + 5 + 6 + 3 + 2(7) + 1 + 4 + 4 = 27, 2 + 7 = 9.

5.- NIX 1

Deberíamos sumar 5 a nuestro 5 para obtener 1 (10, 1+0 = 1).

Le daríamos la vuelta a un 2 (se convierte en un 7, 2 + 5 = 7) para sumar 5 a nuestro resultado final:

7(2) + 5 + 6 + 3 + 7 + 1 + 4 + 4 = 37, 3 + 7 = 10, 1+0 = 1.

6.- NIX 2

Deberíamos sumar 6 a nuestro 5 para obtener 2 (11, 1+1 = 2).

Le daríamos la vuelta a un 6 (se convierte en un 3, 6+6 = 12, 1+2 = 3) para sumar 6 a nuestro resultado final:

2 + 5 + 3(6) + 3 + 7 + 1 + 4 + 4 = 29, 2 + 9 = 11, 1+1 = 2.

7.- NIX 3

Deberíamos sumar 7 a nuestro 5 para obtener 3 (12, 1+2 = 3).

Le daríamos la vuelta a un 1 (se convierte en un 8, 1+7 = 8) para sumar 7 a nuestro resultado final:

2 + 5 + 6 + 3 + 7 + 8(1) + 4 + 4 = 39, 3 + 9 = 12, 1+2 = 3.

8.- NIX 4

Deberíamos sumar 8 a nuestro 5 para obtener 4 (13, 1+3 =4).

Le daríamos la vuelta a un 5 (se convierte en un 4, 5+8 = 13, 1+3 = 4) para sumar 8 a nuestro resultado final:

2 + 5 + 6 + 3 + 7 + 8(1) + 4 + 4 = 39, 3 + 9 = 12, 1+2 = 3.

Ahora, ya sabemos lo que hace cada ficha al darle la vuelta:

- la ficha 4, suma 1 ó como hemos visto en la TABLA, resta 8
- la ficha 8, suma 2 ó, " " " " " " , resta 7
- la ficha 3, suma 3 ó, " " " " " " , resta 6
- la ficha 7, suma 4 ó, " " " " " " , resta 5
- la ficha 2, suma 5 ó, " " " " " " , resta 4
- la ficha 6, suma 6 ó, " " " " " " , resta 3
- la ficha 1, suma 7 ó, " " " " " " , resta 2
- la ficha 5, suma 8 ó, " " " " " " , resta 1

Si tenemos claro el mecanismo, podríamos memorizar la secuencia: 48372615 y sabríamos que ficha hay que dar la vuelta, en caso de querer SUMAR.

Del mismo modo, podríamos memorizar la secuencia: 51627384 y sabríamos que ficha hay que dar la vuelta, en caso de querer RESTAR.

3º ORDENAMOS LAS FICHAS DE MENOR A MAYOR

Una vez obtenido el NIX, por ejemplo el primer caso, NIX 6:
25637144, le damos la vuelta a un 4..
25637145 = 2 + 5 + 6 + 3 + 7 + 1 + 4 + 5 = 33, 3+3 = 6
Ordenamos de menor a mayor: 12345567, decimos en voz alta "NIX" y se detiene el juego.

3.3.APLICACIÓN A LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICAS

El uso de MURPHYX ayudará al alumno en las siguientes facetas:

- Conocimiento de números complementarios a 9
- Dominio de la técnica de la reducción a una cifra con el uso de la TABLA

Ejemplo: 63723288

El 6 se va con el 3 (6+3 = 9 equivale a 0).
El 7 se va con el 2 (7+2 = 9 equivale a 0).
3 + 2 + 8 + 8 = 21, 2 + 1 = 3, pero si en lugar de sumar 2 veces 8, restamos 2 veces 1 (8 equivale a -1) nos da el mismo resultado:
3 + 2 -1 -1 = 3

Hay casos en que para “sumar” es mas rápido restar su complementario a nueve..

- Familiarización con la “prueba del nueve” y su uso como herramienta de comprobación aritmética.
- Ahorro de tiempo dedicado en los exámenes al no tener que realizar la operación de nuevo para comprobarla.

CURIOSIDADES:

La técnica de reducción a una cifra me ha tenido fascinado durante años y he hecho algún descubrimiento muy interesante:

3.3.1. Memorización de secuencias de suma y resta

Si tomamos la tabla de multiplicar del 4:

4 x 1 = 4
4 x 2 = 8
4 x 3 = 12, 1+2 = 3
4 x 4 = 16, 1+6 = 7
4 x 5 = 20, 2+0 = 2
4 x 6 = 24, 2+4 = 6
4 x 7 = 28, 2+8 = 1+0 = 1
4 x 8 = 32, 3+2 = 5

Como vemos, es idéntica a nuestra secuencia para SUMAR.

Del mismo modo, si tomamos la tabla de multiplicar del 5:

5 x 1 = 5
5 x 2 = 10, 1 + 0 = 1
5 x 3 = 15, 1 + 5 = 6
5 x 4 = 20, 2 + 0 = 2
5 x 5 = 25, 2 + 5 = 7
5 x 6 = 30, 3 + 0 = 3
5 x 7 = 35, 3 + 5 = 8
5 x 8 = 40, 4 + 0 = 4

Como vemos, es idéntica a nuestra secuencia para RESTAR.

3.3.2. Uso en números primos

Entre los 10.000 primeros números primos, no hay ninguno que su reducción a una cifra sea igual a 3, a 6 o a 9 (exceptuando el 3).
Yo lo tengo calculado para los primeros 10.000 números primos y con bastantes números primos de mas cifras...

3.3.3.SUCESIÓN DE FIBONACCI

La sucesión de Fibonacci, se obtiene con la siguiente fórmula: An = An-1 + An-2

Si hacemos la reducción a una cifra de sus elementos, observamos que a partir del número 75.025 (posición 25 de la sucesión), se repite la misma secuencia de números que desde la posición 1 a la 24.

Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sucesión	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
Reducción	1	1	2	3	5	8	4	3	7	1
Posición	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Sucesión	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6785
Reducción	8	9	8	8	7	6	4	1	5	6
Posición	21	22	23	24	25	26	27	……		
Sucesión	10946	17711	28657	46368	75025	121393	196418			
Reducción	2	8	1	9	------1	1	2	……		

Como vemos, a partir de la posición 25, se repite la "secuencia" en La Sucesión de Fibonacci.

MATERIALS PER A L'ESTUDI DE FAMÍLIES DE FUNCIONS

Onofre Monzó
IES Veles e Vents. Torrent
Universitat de València
Luis Puig
Universitat de València

0.INTRODUCCIÓ

Analitzarem el comportament d'algunes funcions fent servir la calculadora gràfica: les polinòmiques, les racionals i les trigonomètriques. En totes elles ens fixarem en la relació de l'expressió analítica amb la forma de la gràfica, per a poder explicar la relació existent entre els paràmetres de la funció expressada en una determinada forma canònica i la seua representació gràfica.

A l'utilitzar la calculadora gràfica Classpad 330 en aquest treball, la identificació entre els paràmetres i la gràfica es pot desenvolupar a partir de l'estudi dels canvis que es produeixen en la representació gràfica al canviar els paràmetres, ja que el dinamisme que es pot imprimir a l'edició de la funció ho facilita.

Investigarem com es pot obtindre, a partir de la funció més elemental de la família, altres funcions de la mateixa família d'expressió més complexa, per mitjà de translacions horitzontals o verticals, i per mitjà de dilatacions horitzontals o verticals.

En termes generals el que explorarem és que, si es passa d'una funció

$y = f(x)$,

que hem pres com la més elemental d'una família, a una altra

$y = a\, f(b(x - c)) + d$,

a produeix una dilatació vertical,
b produeix una dilatació horitzontal,
c produeix una translació horitzontal, i
d produeix una translació vertical.

1.FUNCIONS POLINÒMIQUES

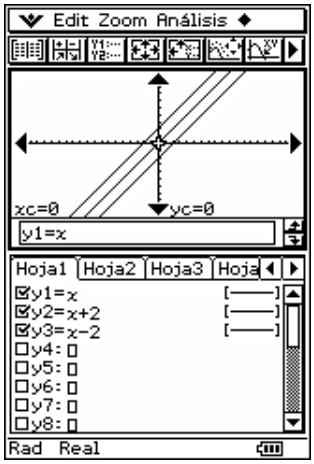
1.1.FUNCIONS LINEALS

Efecte del canvi dels paràmetres de la funció en la gràfica

Començarem dibuixant la funció $y = x$, pel que escriurem en la pantalla algebraica $y1 = x$

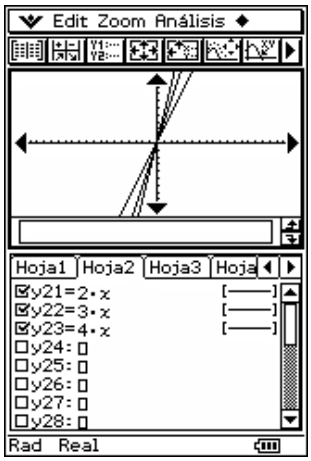
Amb ***Zoom*/ Ràpid estàndard** veiem que, en la finestra estàndard de representació ($-10 = x = 10$, $-10 = i = 10$), la gràfica té un aspecte diferent de l'usual a causa de la forma rectangular de la pantalla de la calculadora. Les escales són diferents en ambdós eixos i, per tant, la gràfica apareix amb menor inclinació respecte a l'eix d'abscisses del que ocorreria en una pantalla en què l'amplitud de la unitat horitzontal fóra la mateixa que la vertical. Aconseguirem un ajust quadrat seleccionant l'opció ***Zoom*/ Quadrat.**

Representem ara $y2 = x + 2$, $y3 = x - 2$.
Activem **Anàlisi/ traç** per a recórrer les gràfiques.
Amb les fletxes esquerra-dreta recorrem la gràfica i amb les fletxes amunt-baix canviem de funció.



Observem que la gràfica es desplaça dos unitats en ambdós casos, però en sentits oposats. Ara bé, en el cas del pas de $y1 = x$ a $y2 = x + 2$, el desplaçament ens pot paréixer tant que és cap amunt com que és cap a l'esquerra. En el cas del pas de $y1 = x$ a $y2 = x - 2$, també podem veure el canvi de la gràfica de dos maneres: com un desplaçament cap avall, o com un desplaçament cap a la dreta.

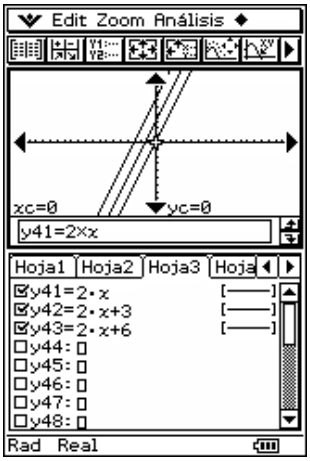
En el cas de la funció lineal, no es pot distingir si el desplaçament és horitzontal o vertical, perquè el 2 pot ser tant el paràmetre c com el paràmetre d.



Anem al Full2 de gràfics per a representar $y = 2x$, $y = 3x$ i $y = 4x$, simultàniament. En aquesta ocasió també polsarem **Anàlisi/ traç** per a situar el cursor sobre la primera de les gràfiques representades, i ens desplaçarem sobre ella o passarem a les altres gràfiques amb els cursors.

En la imatge, el cursor està recorrent la primera funció $y = 2x$. Aquesta és la que té menor inclinació (pendent) de les tres.

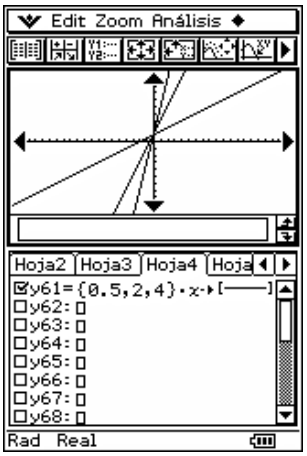
Representem continuació $y = 2x+3$ i $y = 2x + 6$, comparant-les amb $y = 2x$.



Observem que $y = 2x+3$ és una translació vertical de tres unitats, i que $y = 2x + 6$ és una translació vertical de 6 unitats. Ara bé, en ambdós casos, també podríem considerar la primera com una translació horitzontal d'1'5 unitats i la segona com una translació horitzontal de 3 unitats.

Aquesta ambigüitat sempre apareixerà amb les funcions lineals, i correspon a l'equivalència entre $y = 2x + 6$ i $y = 2(x + 3)$ o, en general, $y = a(x - b)$ i $y = ax - ab$. La translació vertical és, no obstant això, més senzilla d'identificar amb els paràmetres.

Ús de llistes

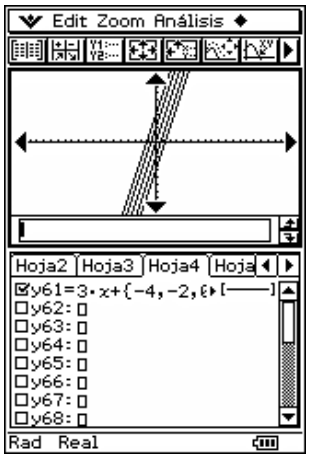


Farem servir ara l'edició de funcions amb llistes, amb la qual cosa representarem diverses funcions simultàniament, una per a cada valor de la llista.

Açò es fa escrivint una llista en el lloc d'un paràmetre. Per exemple, si en la pantalla algebraica escrivim la llista {0'5, 2, 4} com a coeficient del terme de primer grau, i al terme independent li donem un valor fix, 2,

$y61 = \{0'5, 2, 4\}x + 2$

Obtindrem les tres gràfiques de la imatge. En ella s'aprecia clarament que l'ordenada en l'origen és la mateixa per a les tres rectes, tenint major pendent la de major coeficient, 4 en aquest cas.



Per a observar l'efecte de canviar el terme independent podem fer el contrari: editem ara una llista de cinc elements per al terme independent, i deixem el coeficient de la *x* fix:

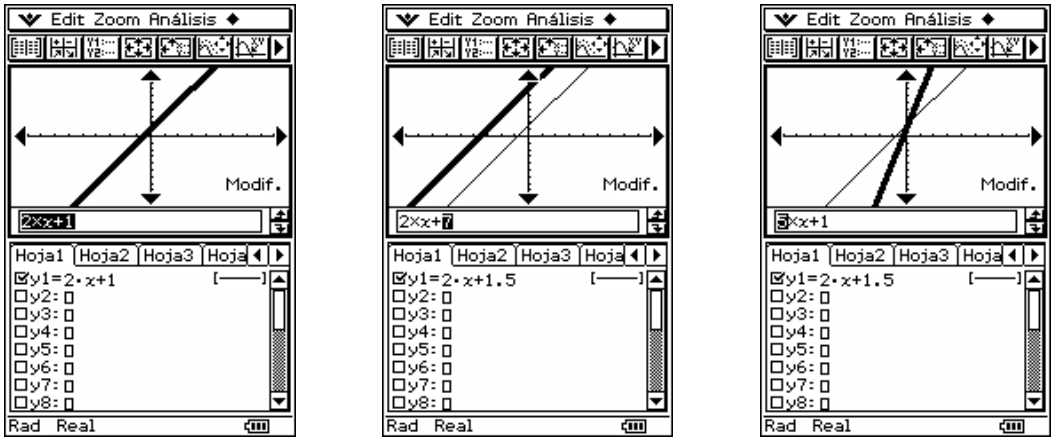
$y61 = 3x + \{-4,-2,0, 2,4\}$

En la imatge podem veure el canvi corresponent de la gràfica.

Modificar un gràfic

La calculadora Classpad 330 permet estudiar els canvis de la gràfica d'una funció al modificar els seus coeficients. Ho comprovarem per a l'estudi de rectes.

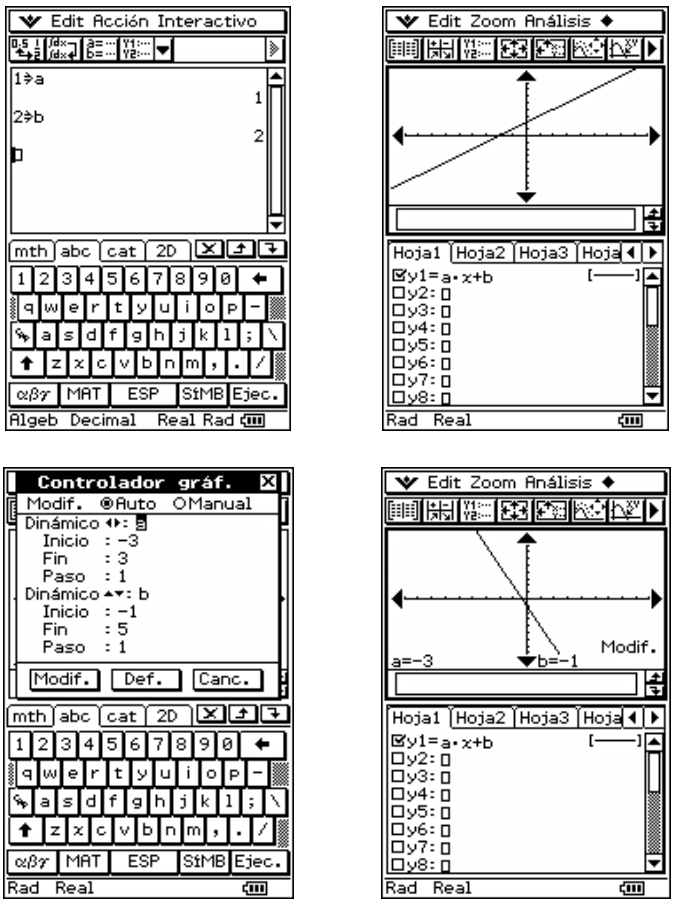
En primer lloc introduïm la funció $y=2x+1$, la representem amb . Amb el menú **Anàlisi/ Modif.** entrem en la modificació dels coeficients de la funció. Indiquem el pas de la modificació. Podem seleccionar quin número volem que es modifique seleccionant-lo en la finestra d'estat de la finestra gràfica. Si seleccionem el terme independent, cada vegada que polsem fletxa dreta (esquerra) de la pantalla, el coeficient augmentarà (disminuirà) una unitat. [Recordar que les fletxes de la pantalla s'activen en el menú **Format de gràfic** seleccionant "Controlador G".] També es pot seleccionar només un dígit d'un número, per exemple, havent introduït la funció $y=2x+1.5$, si entrem en la modificació i seleccionem la xifra 5 de les desenes, els augments i disminucions es produiran en una desena, dins del rang 0 a 9, però, si seguim, es produeixen efectes inesperats, a l'escriure un negatiu o un número de més d'un dígit en el lloc d'un dígit. Si seleccionem el coeficient de *x*, i polsem les fletxes esquerra i dreta el que canviem és el pendent de la recta



Generació automàtica de gràfics dinàmics.

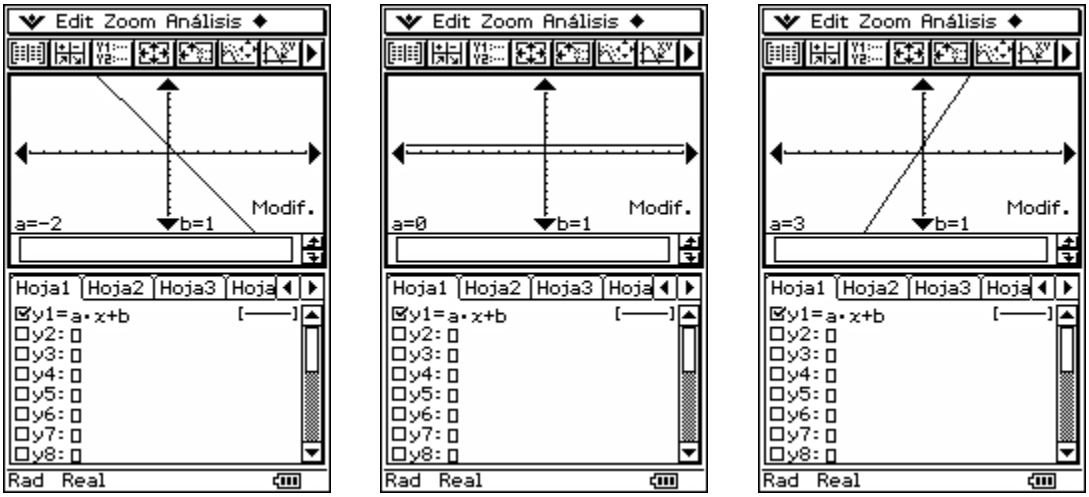
En la calculadora, la modificació dels coeficients pot ser dinàmica. Ho veurem per a la funció $y = ax + b$ amb valors de a entre –3 i 3 i valors de b entre –1 i 5.

En primer lloc anem a la pantalla principal per a assignar els valors 1 en a i 2 en b. Després introduïm la funció lineal $y1 = ax + b$, utilitzem el ***Zoom*/ Ràpid estàndard**. Utilitzem la ferramenta ◆ **/ Gràfic dinàmic** per a introduir en la calculadora els intervals entre els que es mouen els coeficients, i el pas. A més, advertim en aquesta pantalla que volem que la transició siga automàtica (**Auto**), sense la nostra intervenció.



Si ara polsem la fletxa a la dreta, canviaran els valors de a en el rang que s'ha expressat. Igual ocorre amb els valors de b al polsar la fletxa cap amunt.

Si volem veure les coses amb més deteniment, serà preferible triar l'opció **Manual** en el **Gràfic dinàmic**. Açò ens permet modificar cada un dels dos coeficients per separat amb les fletxes esquerra/dreta i amunt/baix. Vegem unes pantalles que mantenen fix el valor de *a* per a modificar el de *b*:



En la pantalla del Controlador gràfic podem veure quin paràmetre modifiquem amb les fletxes esquerra i dreta, i quina amb les fletxes amunt i baix. Només es poden modificar dos paràmetres.

1.2. FUNCIONS QUADRÀTIQUES

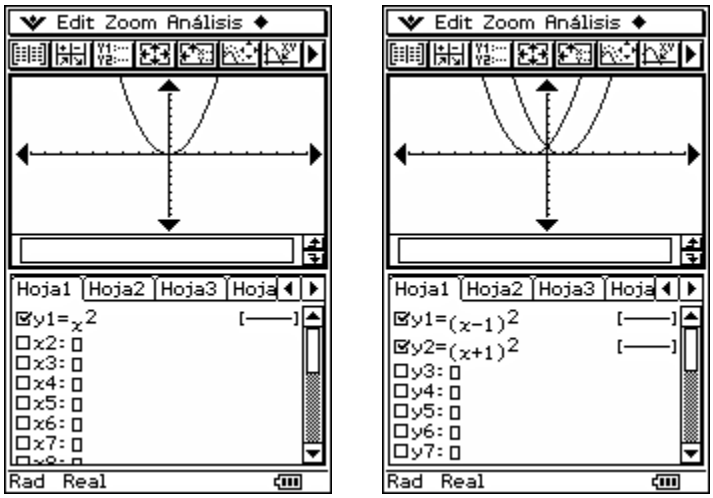
Efecte del canvi dels paràmetres de la funció en la gràfica

Començarem representant $y = x^2$ en la finestra estàndard, i analitzarem els canvis de la gràfica al modificar els paràmetres *a*, *c* i *d* en la família funcional

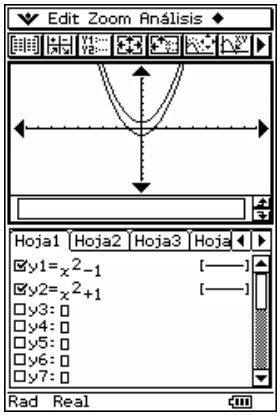
$$y = a(x - c)^2 + d$$

Un a u.

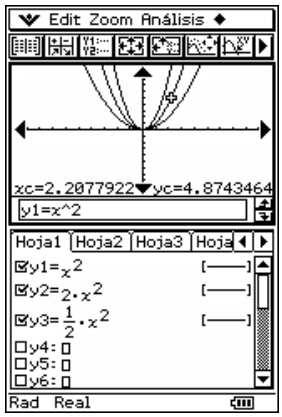
Fent $c = 1$ i $c = -1$, és a dir, $y = (x - 1)^2$ i $y = (x + 1)^2$ es veuen translacions horitzontals d'una unitat, a la dreta i a l'esquerra de la corba $y = x^2$.



Fent $d = 1$ i $d = -1$, és a dir, $y = x^2 + 1$ i $y = x^2 - 1$ es veuen translacions verticals d'una unitat, a la dreta i a l'esquerra de la corba $y = x^2$.

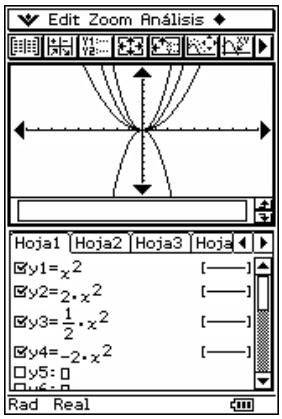


Si comparem ara $y = x^2$ amb $y = 2x^2$ i $y = \frac{1}{2}x^2$, observem, per la posició del cursor en $y = x^2$, que la transformació patida és una major obertura de les branques de la paràbola en $y = \frac{1}{2}x^2$ i més tancada (creix més ràpidament) en $y = 2x^2$.



En ambdós casos es tracta de dilatacions verticals $y = af(x)$, en el primer cas para $a = 2$ i en el segon para $a = \frac{1}{2}$.

També podrien considerar-se com a dilatacions horitzontals, $y = f(bx)$ per a $b = \sqrt{2}$ i $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, per l'equivalència entre $y = 2x^2$ i $y = \left(\sqrt{2}x\right)^2$, d'una banda, i $y = \frac{1}{2}x^2$ i $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)^2$.



Si en compte d'un coeficient positiu introduïm un negatiu, tindrem que la funció $y = -2x^2$ serà la simètrica respecte a l'eix d'abscisses de $y = 2x^2$.

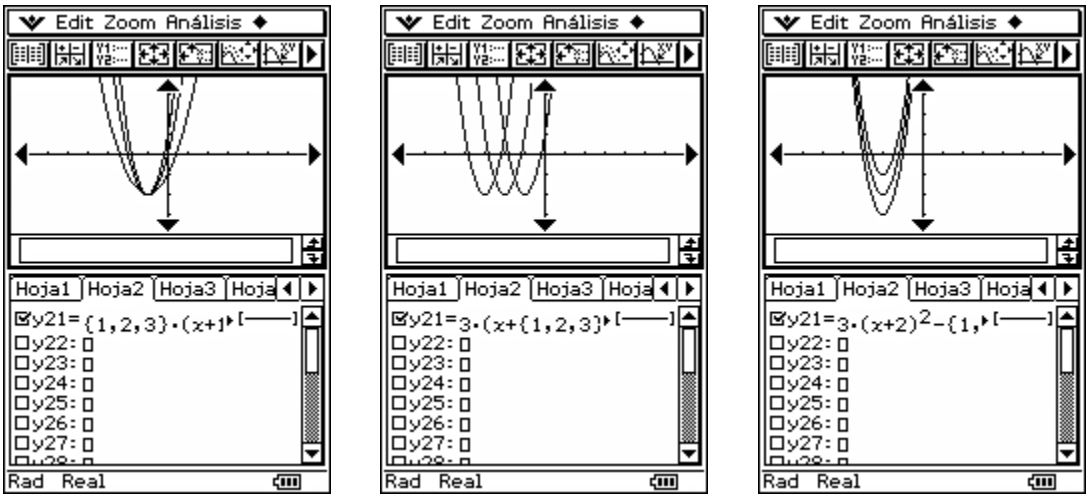
També es pot observar que al representar $y = x^2+1$ la gràfica no talla a l'eix d'abscisses, que $y = (x - 1)^2$ talla una sola vegada a l'eix d'abscisses i que $y = x^2 - 1$ curta en dos punts (els corresponents a $x = 1$ i $x = -1$).

Nota: L'estudi de les funcions quadràtiques també es podria haver plantejat per mitjà de l'anàlisi dels canvis en la gràfica que produeix la variació dels paràmetres A, B, i C, quan per a la família de funcions quadràtiques es pren com a forma canònica $y = Ax^2 + Bx + C$, però eixos paràmetres no estan directament relacionats amb les transformacions simples que hem considerat. Aquesta és una de les raons per les quals té sentit ser capaç d'efectuar càlculs algebraics: per a poder passar d'una expressió de la forma $Ax^2 + Bx + C$, en la que no es pot observar amb facilitat la relació entre els coeficients i l'aspecte general de la gràfica, a una expressió de la forma $a(x - c)^2 + d$, en la que açò sí s'observa amb facilitat.

Ús de llistes

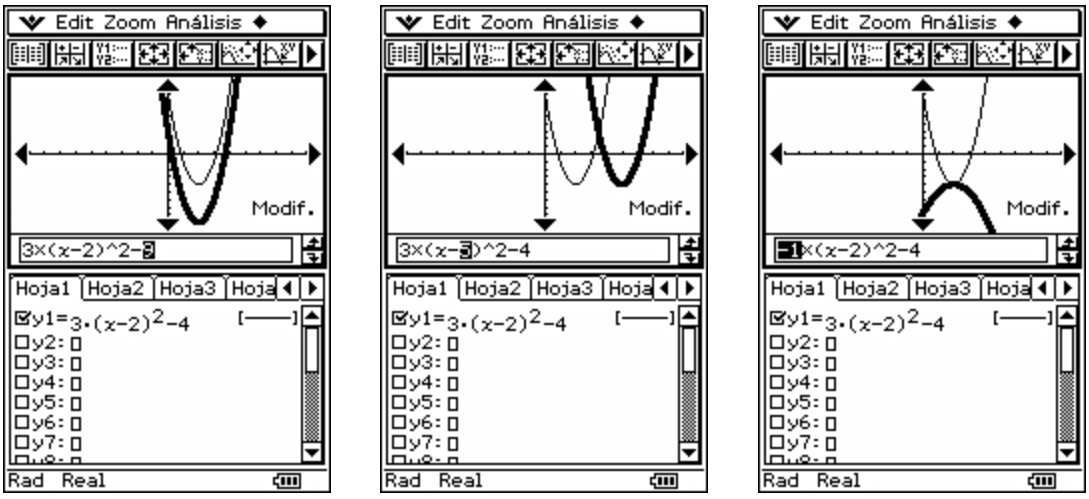
Igual que vam fer per a les funcions polinòmiques de primer grau, també podem introduir llistes en l'expressió analítica de les funcions de segon grau per a veure simultàniament els canvis que es produeixen en les gràfiques. Vegem-ho per als paràmetres *a*, *c* i *d*, mantenint $b = 1$.

$y = \{1, 2, 3\}\ (x + 1)^2 - 2$ $\quad$ $y = 3(x + \{1, 2, 3\})^2 - 2$ $\quad$ $y = 3(x + 2)^2 - \{1, 2, 3\})$

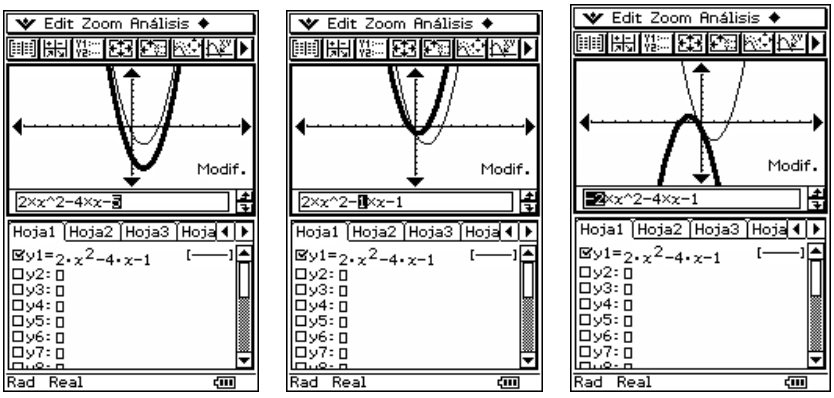


Modificar un gràfic

Anem ara a fer un estudi semblant amb **Anàlisi Modif.**
Representem la funció $y = 3(x - 2)^2 - 1$, i observem les transformacions de la gràfica al canviar els tres paràmetres *a*, *c* i *d*, mantenint $b = 1$:



Ara ho farem amb $y = Ax^2 + Bx + C$. Representem la funció $y = 2x^2 - 4x - 1$ i anirem modificant des del terme independent fins al coeficient de segon grau.



Podem observar que, quan la funció quadràtica està representada en la forma

$$y = a(x - c)^2 + d$$

La variació dels paràmetres està directament relacionada amb els canvis en la gràfica en tots els casos.
Al contrari, quan la funció quadràtica està representada en la forma

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

La variació dels paràmetres no està directament relacionada amb els canvis en la gràfica en tots els casos.

2.FUNCIONS RACIONALS $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

2.1.LA FUNCIÓ $y = \dfrac{1}{x}$

La funció racional més senzilla és la funció de proporcionalitat inversa, la hipèrbola equilàtera $y = \dfrac{1}{x}$.

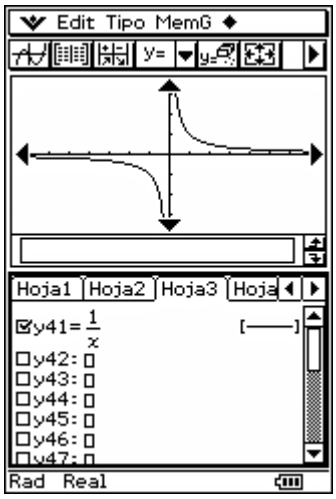
Com en el cas de les funcions lineal i quadràtica, estudiarem els canvis que es produeixen en la seua gràfica al canviar la funció *f*(*x*) per *af*(*b*(*x* – *c*)) + *d*, examinant l'efecte dels paràmetres *a*, *b*, *c* i *d*, un a u.

Usarem com a exemple les funcions que indiquem en la taula següent. En eixa taula, partint de la funció $y = \dfrac{1}{x}$ com la més simple de la família, hem escrit les funcions corresponents als casos en què els paràmetres *a*, *b*, *c* i *d* canvien el valor que tenen en $y = \dfrac{1}{x}$ per 3:

$y = f(x)$	$y = f(x - c)$	$y = f(x) + d$	$y = af(x)$	$y = f(bx)$
$y = \dfrac{1}{x}$	$y = \dfrac{1}{x - 3}$	$y = \dfrac{1}{x} + 3$	$y = \dfrac{3}{x}$	$y = \dfrac{1}{3x}$

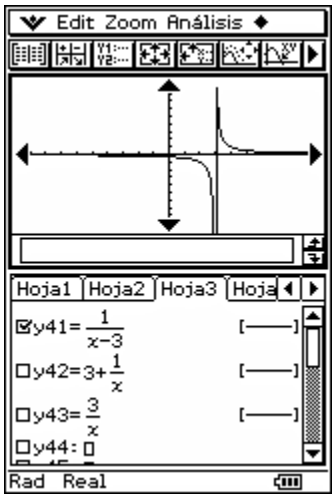
Observació: Quins valors tenen els paràmetres els paràmetres *a*, *b*, *c* i *d* en la funció més simple de la família $y = \frac{1}{x}$?

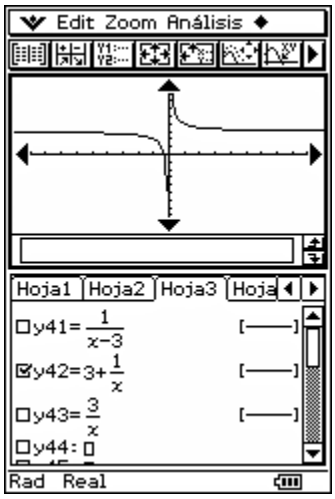
La representació de $y = \frac{1}{x}$ amb ***Zoom*/ Ràpid inicialització** és:

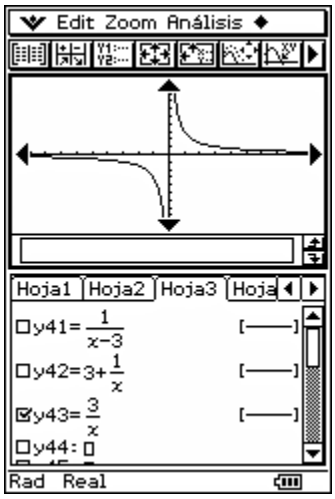


I estes són les representacions de les gràfiques de

$y = f(x-3) = \frac{1}{(x-3)}$ $y = f(x)+3 = \frac{1}{x}+3$ $y = 3 \cdot f(x) = \frac{3}{x}$

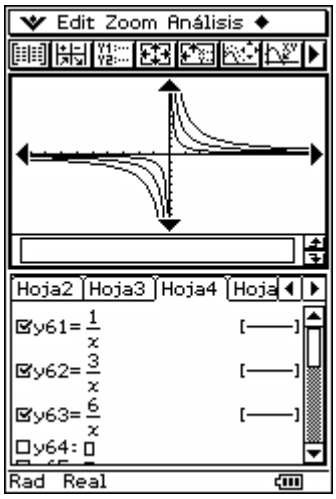




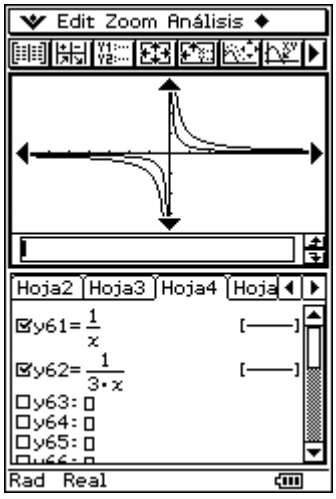


En els dos primers casos s'identifica sense dificultat una translació horitzontal i una vertical, i, a diferència del que succeïa amb els tipus de funcions anteriors, no hi ha ambigüitat en la interpretació: $y = f(x)+3 = \frac{1}{x}+3$ no es pot veure com una translació horitzontal, perquè $f(x)+3 = \frac{1}{x}+3$ no es pot posar en la forma $f(x-c) = \frac{1}{(x-c)}$.

Es veu millor que la transformació de $y = f(x) = \frac{1}{x}$ en $y = 3 \cdot f(x) = \frac{3}{x}$ és una dilatació (vertical), si es representen al mateix temps les dos funcions, o millor encara afegint alguna més com $y = 6 \cdot f(x) = \frac{6}{x}$



El mateix succeeix amb la transformació de $y = f(x) = \frac{1}{x}$ en $y = f(bx) = \frac{1}{3x}$ que és una dilatació horitzontal. Però qualsevol dilatació horitzontal de la gràfica de la funció $y = f(x) = \frac{1}{x}$ pot veure's globalment com una dilatació vertical, ja que $y = f(bx) = \frac{1}{3x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{b} f(x)$ i viceversa.



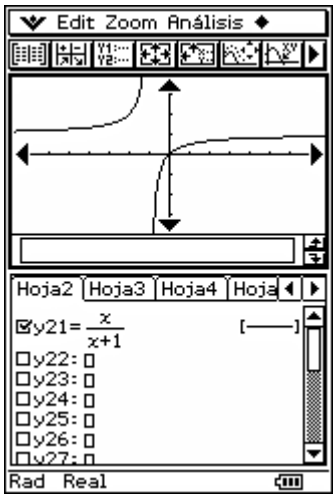
És interessant també examinar què els succeeix a les asímptotes en els quatre tipus de transformacions estudiades. La translació horitzontal trasllada l'asímptota vertical i manté l'asímptota horitzontal. La translació vertical trasllada l'asímptota horitzontal i manté la vertical. Els dos tipus de dilatacions no canvien les asímptotes.

2.2.LA FUNCIÓ $y = \dfrac{x}{x+1}$

Farem ara el mateix estudi per a una funció racional amb polinomis de primer grau en numerador i denominador, per exemple $y = \dfrac{x}{x+1}$

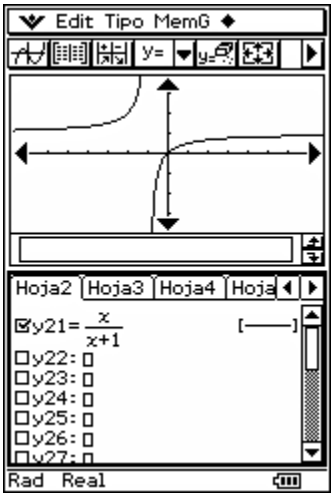
$y = f(x)$	$y = f(x+3)$	$y = f(x)+3$	$y = 3f(x)$	$y = f(3x)$
$y = \dfrac{x}{x+1}$	$y = \dfrac{x+3}{x+4}$	$y = \dfrac{x}{x+1}+3$	$y = \dfrac{3x}{x+1}$	$y = \dfrac{3x}{3x+1}$

La representació de la funció $y = \dfrac{x}{x+1}$ és:

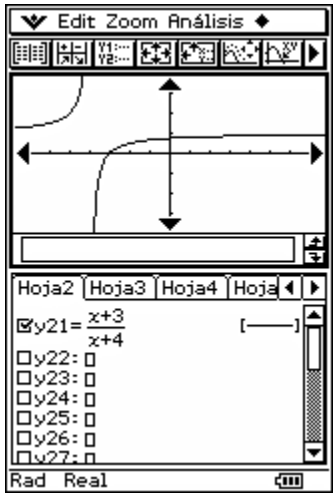


I les dos funcions generades per translació respecte d'ella són:

$$f(x+3) = \frac{(x+3)}{(x+4)}$$

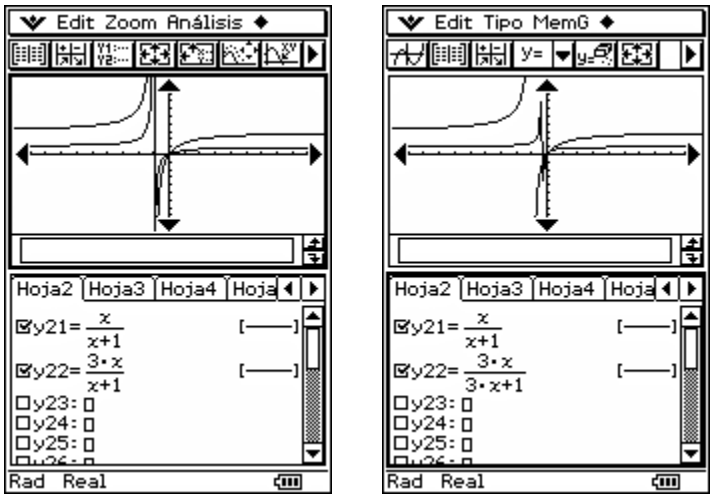


$$f(x)+3 = \frac{x}{(x+1)}+3$$



En el cas de la primera transformació, la translació horitzontal, l'asímptota vertical s'ha traslladat també horitzontalment passant a ser la recta $x = -4$, i l'asímptota horitzontal es manté inalterada en la recta $y = 1$.
En el cas de la segona transformació, la translació vertical, l'asímptota vertical es manté inalterada en la recta $x = -1$ mentre que l'asímptota horitzontal es desplaça 3 posicions igual que tota la funció, passant a ser $y = 4$.

Ara representarem les dilatacions comparant-les en cada cas amb la funció presa com a prototip $y = \frac{x}{x+1}$:

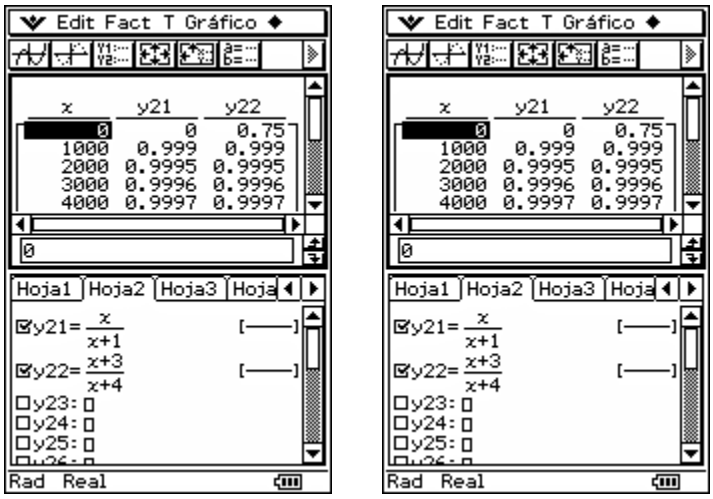


En aquest cas podem constatar visualment que, en la primera transformació, la dilatació vertical, l'asímptota vertical es manté inalterada en $x = -1$, mentre que l'asímptota horitzontal es modifica amb el mateix factor que tota la gràfica, passant a ser la recta $y = 3$.
En la segona transformació, la dilatació horitzontal, l'asímptota vertical es modifica passant a ser la recta $x = -1/3$, mentre que l'asímptota horitzontal es manté en $y = 1$.
En el cas que hem estudiat abans, el de la funció $y = \frac{1}{x}$, aquest desplaçament de les asímptotes en les dilatacions no podia observar-se: les asímptotes eren $x = 0$ i $y = 0$, que si es multipliquen pel factor de dilatació romanen invariables: $x = 3 \cdot 0$ és $x = 0$.

Ús de taules

També podem estudiar les asímptotes analitzant les taules de valors que ens proporciona la Classpad 330.

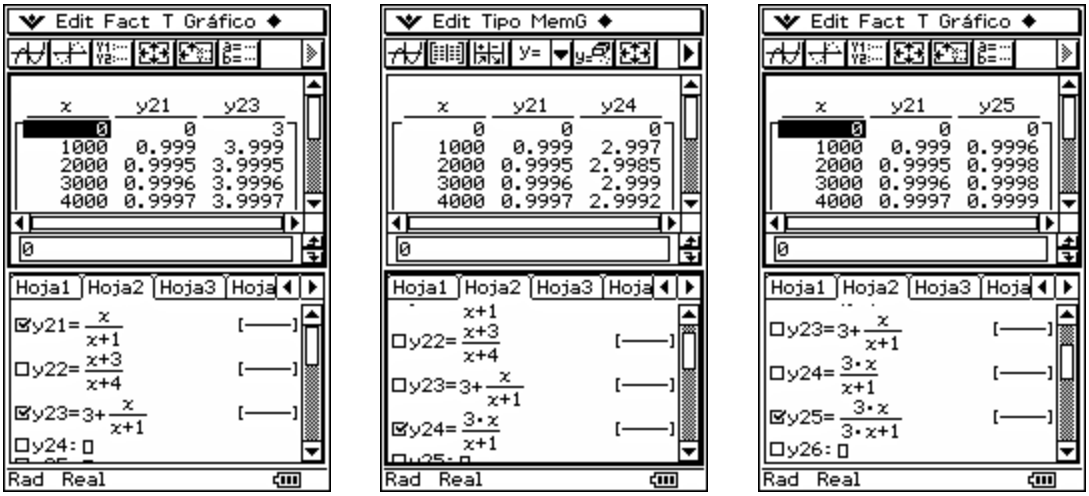
Començarem primer definint les característiques de la taula per mitjà del menú desplegat al polsar . Si volem veure el que ocorre per a valors molt alts de x, li demanem que els prenga de 1000 en 1000:



Compararem per parelles $y1 = \dfrac{x}{x+1}$ amb

$y2 = \dfrac{x+3}{x+4}$, $y3 = \dfrac{x}{x+1} + 3$, $y4 = \dfrac{3x}{x+1}$ i $y5 = \dfrac{3x}{3x+1}$.

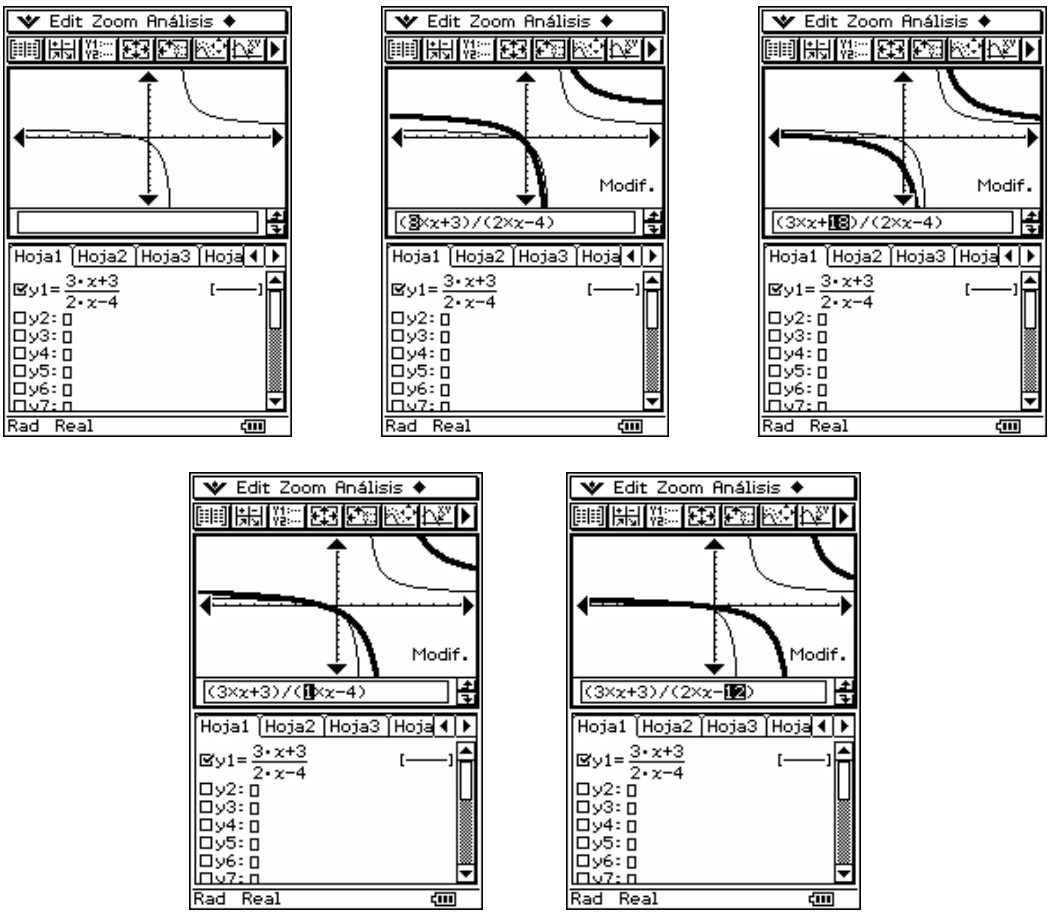
Per a passar d'una a una altra basta d'anul·lar la selecció de la primera i activar la de la segona polsant amb el llapis sobre el quadret que es troba a l'esquerra de la funció.



Formes canòniques

Si haguérem estudiat estes funcions racionals variant els paràmetres *A*, *B*, *C* i *D* en $y = \dfrac{Ax+B}{Cx+D}$ i analitzant els canvis que es produeixen en les corresponents gràfiques, no haguérem pogut identificar el canvi en un paràmetre amb una transformació simple en les gràfiques.

Ho veurem amb la ferramenta **Anàlisi Modif.**, representant $y = \dfrac{3x+3}{2x-4}$ i introduint canvis en els quatre coeficients un a u.



Podem observar que els paràmetres que estan relacionats amb les transformacions simples de les gràfiques no són eixos coeficients, sinó els coeficients de la forma canònica que hem usat abans: $y = af(b(x - c)) + d$.

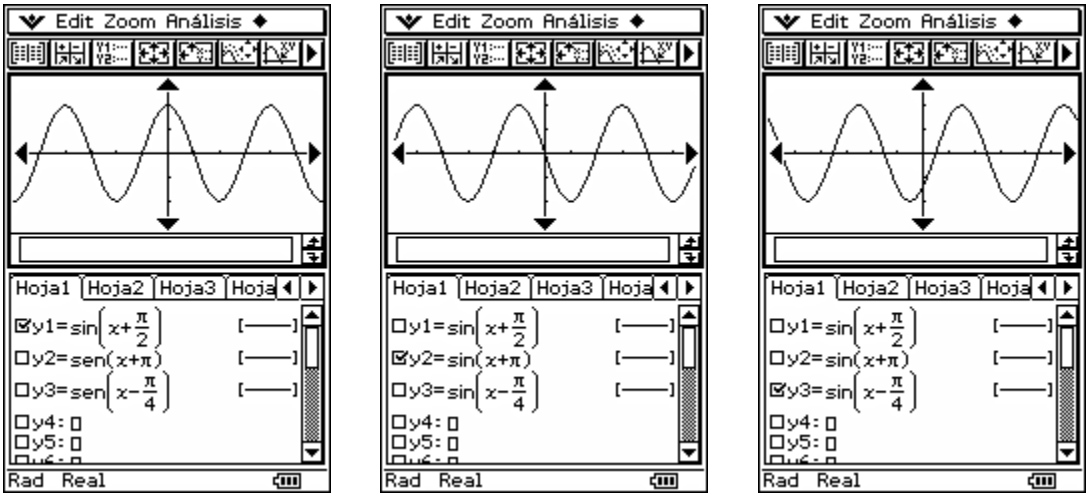
FUNCIONS TRIGONOMÈTRIQUES

Representarem la funció $y = \sin(x)$ i estudiarem les transformacions de la gràfica al canviar els paràmetres a, b, c i d, en $y = a\sin(bx - c) + d$, un a u.

Prèviament ens assegurem que estiga definida la mesura dels angles en radians en el menú ⮟ **/ Format bàsic/ Angle** seleccionant **Radian** en el desplegable. Després utilitzem el ***Zoom*/ Ràpid trigonomètric**, que per a estes funcions defineix els valors de la pantalla i dibuixa la gràfica que apareixen en les figures següents:

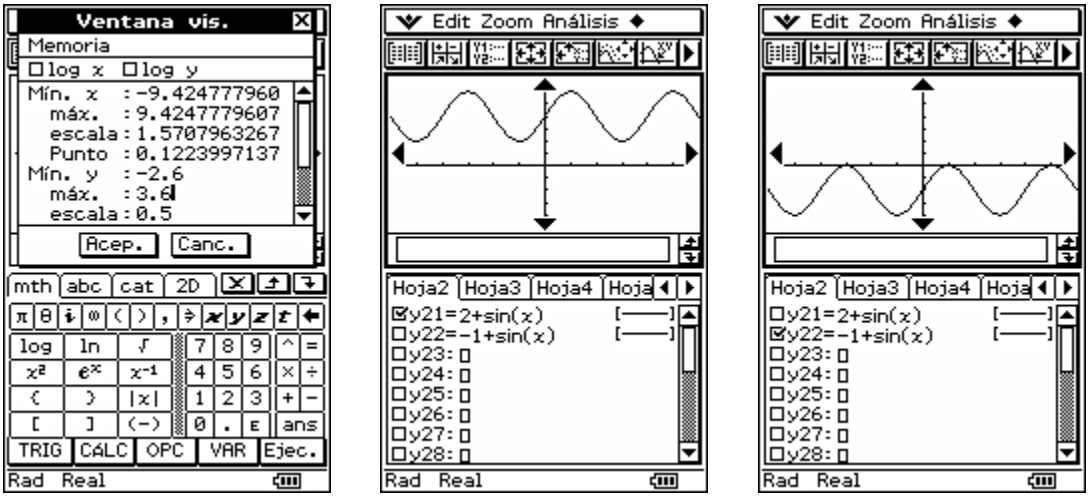


1. Efecte del paràmetre c, $yi = \sin(x + c)$.
Observem-ho per a $c = \pi/2$, $c = \pi$ i $c = -\pi/4$.



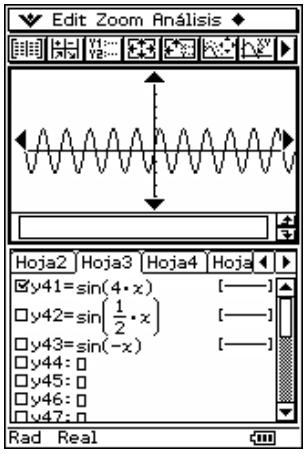
Es tracta d'una translació horitzontal cap a l'esquerra en els dos primers casos i cap a la dreta en el tercer.

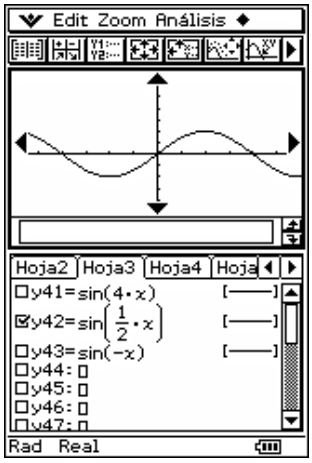
2. Efecte del paràmetre d, $y = \sin(x) + d$, per a $d = 2$ i $d = -1$.
Prèviament hem de variar l'interval de representació per a l'eix d'ordenades. Aquesta vegada podem fer-ho manualment amb , bastarà de disminuir en 1 l'extrem inferior (Min.y) i augmentar en 2 l'extrem superior (màx.)

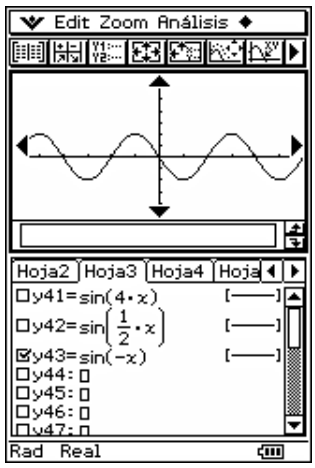


S'aprecia clarament que estem davant d'una translació vertical, en el primer cas positiva de 2 unitats i en el segon negativa d'1 unitat.

3. Efecte del paràmetre b, $y = \sin(bx)$, per a $b = 4$, $b = \frac{1}{2}$ i $b = -1$.
Usem ara la mateixa finestra de representació que en el cas anterior.



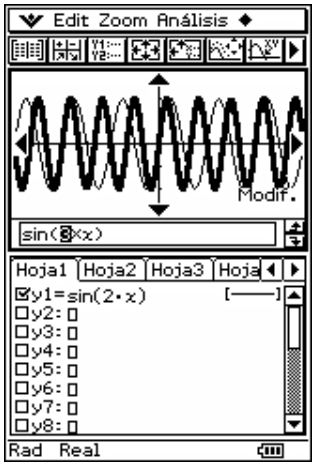


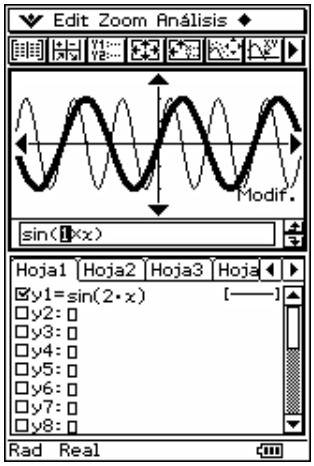


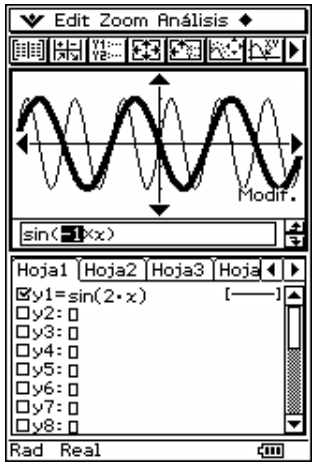
Es tracta en els dos primers casos de dilatacions horitzontals. La dilatació horitzontal, en el cas de les funcions trigonomètriques, es tradueix en una reducció o ampliació del període. Per a $b = 4$ el període es redueix a p/2 i per a $b = \frac{1}{2}$ s'àmplia a 4p .

Quan b pren un valor negatiu, la transformació és una dilatació horitzontal, de factor el valor positiu corresponent, acompanyada d'una simetria respecte a l'eix OX. Com ací $b = -1$, la transformació és una simetria respecte a l'eix OX.

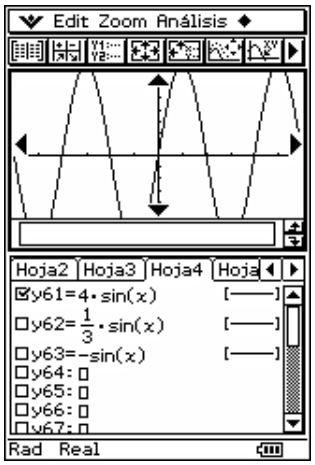
També podem examinar el canvi d'aquest paràmetre b amb **Anàlisi Modif.**

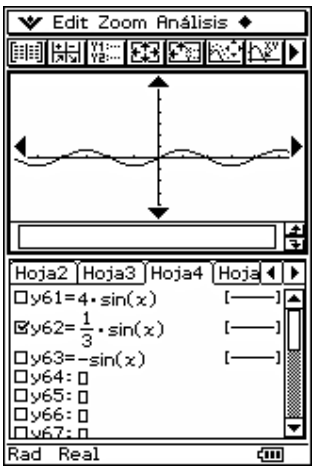


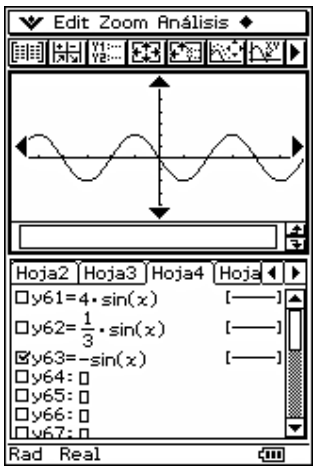




4. Efecte del paràmetre a, $y = asinx$, per $a = 4$, $a = \frac{1}{3}$ i $a = -1$.

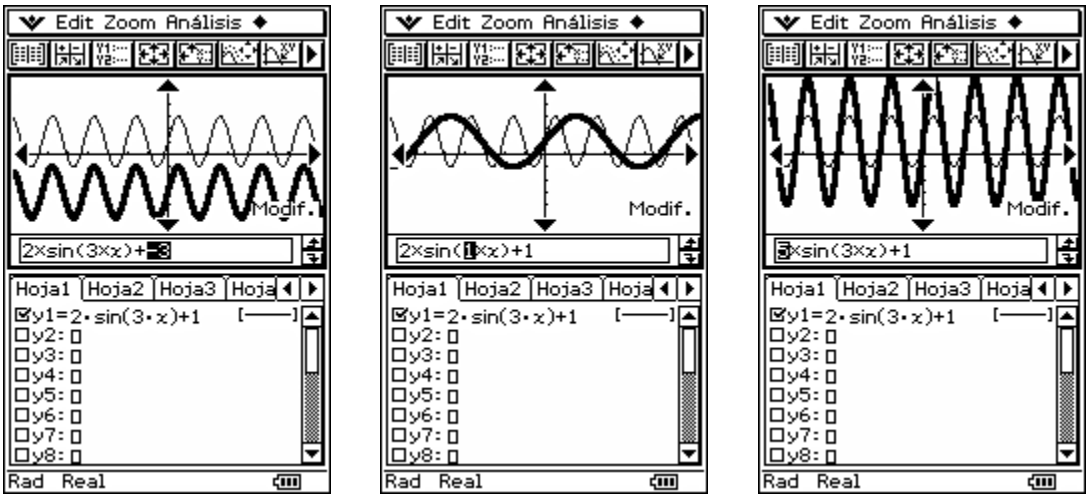






Es tracta en els dos primers casos de dilatacions verticals. La dilatació vertical, en el cas de funcions trigonomètriques, es tradueix en un canvi en l'amplitud o recorregut de la funció. Para $a = 4$, el recorregut se "estira entre" $-4 = i = 4$ i, per a $a = \frac{1}{3}$, s'estreteix entre $-1/3 = i = 1/3$. Quan a és negatiu, a més de la dilatació també hi ha una simetria respecte de l'eix OY.

Finalment, amb **Anàlisi Modif.** Podem estudiar l'efecte de la variació dels paràmetres un a u. Ho fem partint de la funció $y = 2\sin(3x) + 1$.

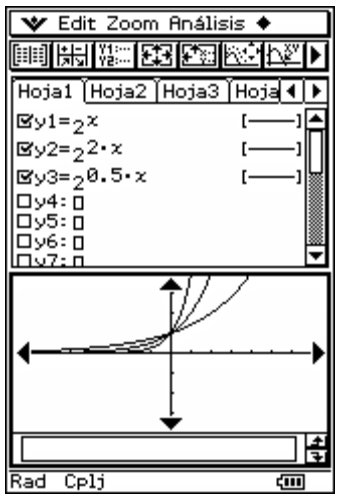


FUNCIONS EXPONENCIALS

Com a exemple de les funcions exponencials, representarem la funció $y = 2^x$ i estudiarem les transformacions de la gràfica al canviar els paràmetres a, b, c i d, en $y = a2^{bx-c} + d$, un a u. L'estudi pot fer-se de forma semblant per a qualsevol base.

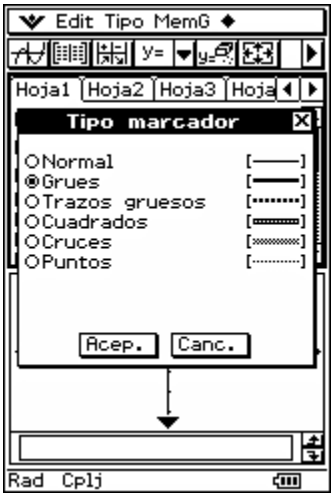
1. Efecte del paràmetre b.

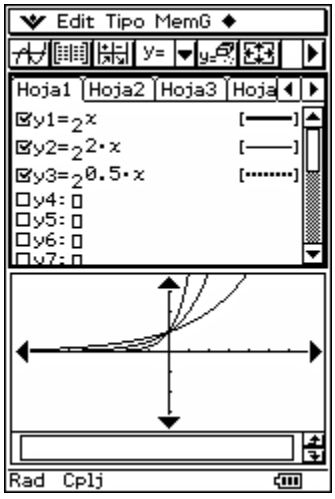
Representem simultàniament les gràfiques de $y = 2^x$, $y = 2^{2x}$, i $y = 2^{0'5x}$

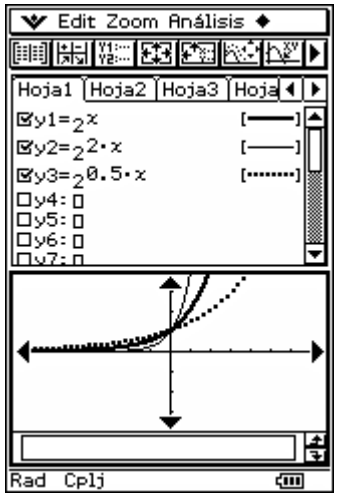


Observem que totes elles passen pel punt (0, 1), on tallen a l'eix OY, i, a més, totes elles són creixents.

Per a identificar cada gràfica amb la seua expressió algebraica, polsem en la línia a continuació de cada funció situada en l'editor de gràfics per a modificar el traç de la seua gràfica. Si seleccionem traç gruixut per a la primera, traç normal per a la segona i traç gruixut a punts per a la tercera, identificarem cada gràfica:



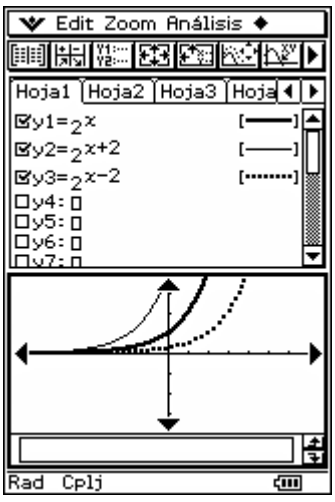




Veiem que la gràfica que creix més de pressa és la segona, $y = 2^{2x}$, mentre que la tercera, $y = 2^{0'5x}$, és la que creix més lentament. En definitiva, la velocitat de creixement de la gràfica ve donada pel paràmetre b en l'expressió $y = a2^{bx-c} + d$.
S'observa a més que les tres tenen l'eix OX com a asímptota horitzontal. Però també podem apreciar altres propietats:

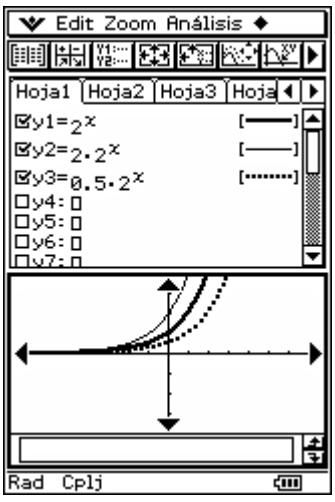
Per a valors negatius de x, es compleix $2^{2x} \le 2^x \le 2^{0'5x}$, mentre que per a valors positius de x, es compleix que $2^{0'5x} \le 2^x \le 2^{2x}$, tal com indiquen les gràfiques.

2. Efecte del paràmetre c.



Representem simultàniament les gràfiques de $y = 2^x$, $y = 2^{x+2}$, i $y = 2^{x-2}$.
El canvi en el paràmetre c es reflecteix en una translació horitzontal cap a la dreta o l'esquerra en funció del signe de c. El tall amb l'eix OY està en $y = 2^{-c}$, en aquest cas en $y = 2^2 = 4$, i $y = 2^{-2} = 1/4$, respectivament.

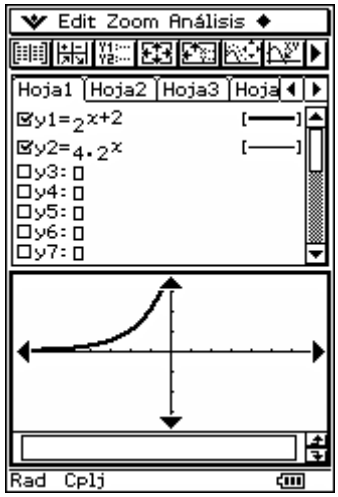
3. Efecte del paràmetre a.



Representem simultàniament les gràfiques de $y = 2^x$, $y = 2\cdot 2^x$, i $y = 0'5\cdot 2^x$.
En aquest cas es produeixen dilatacions verticals, de factors 2 i 0'5, respectivament.

Ara bé, encara que aquest és l'efecte sobre la gràfica considerada punt a punt, globalment la dilatació vertical de factor 2 produeix el mateix efecte que una translació a l'esquerra, ja que la funció , $y = 2\cdot 2^x$ és equivalent a $y = 2^{x+1}$.

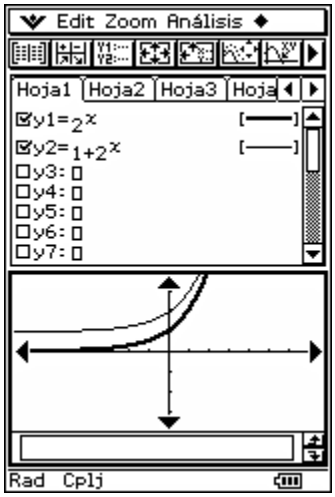
Açò és un fet general: com $2^{x-c} = 2^x \cdot 2^{-c} = 2^{-c} \cdot 2^x$, sobre la gràfica de $y = 2^x$ globalment té el mateix efecte una translació cap a la dreta de 2 unitats que una dilatació vertical de factor 2^{-c}.

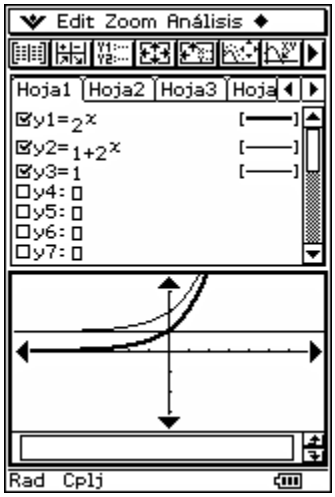


Per exemple, si dibuixem les gràfiques de les funcions $y = 2^{x+2}$ i $y = 4 \cdot 2^x$, ens trobem amb la coincidència de les dos gràfiques:

4. Efecte del paràmetre *d*.

L'efecte del paràmetre *d* és una translació vertical, com sempre. En el cas de les funcions exponencials la translació vertical canvia l'asímptota $y = 0$ per $y = d$, tal com veiem al dibuixar simultàniament les gràfiques de les funcions $y = 2^x$, i $y = 2^x + 1$:





En efecte, basta dibuixar la recta $y = 1$ en els mateixos eixos per a comprovar que aquesta és la nova asímptota i veure que s'ha fet una translació de vector (0, 1).

Un estudi semblant es podria fer per al cas en què la base de la potència fóra un nombre real comprés entre 0 i 1. S'observaria llavors que les gràfiques són decreixents, en compte de ser creixents com en el cas en què la base és 2, que hem estudiat.

EL CINEMA COM A MOTIVACIÓ
L'HABITACIÓ DE FERMAT

Teresa Arabí
Vicent Chorro
Loreto Signes
l'IES Antoni Llidó. Xàbia

0.INTRODUCCIÓ

L'objectiu general del taller és donar a conéixer materials i recursos per a un millor aprenentatge de les matemàtiques.

El temes específics què s'aborden en el taller són els nombres primers.

La primera part la utilitzem com una introducció motivadora per al tema de divisibilitat, la podem utilizar a 1r, 2n o 3r d'ESO.

La segona part es pot utilizar per a les activitats de final de trimestre o per al dia de les matemàtiques o qualsevol activitat extraescolar del centre relacionada amb les matemàtiques o les ciències.



1.SABEU QUÈ SÓN ELS NOMBRES PRIMERS?

Conjectura de Goldbach: "Tot nombre parell, major que 2 pot expressar-se com la suma de dos nombres primers"

Exemples:

a) 18 = 7 + 11
b) 24 = 5 + 19
c) 100 = 17 + 83
d) 1000= 521 + 479
e) 7112= 5119 + 1993

Podries trobar altres exemples ?

No podem comprovar si tots els parells són la suma de dos nombres primers perquè els nombres són infinits. Hem de trobar una llei que els englobe a tots i trobar-la s'ha convertit en el problema més difícil de la història de les matemàtiques

1.1.PRIMER REPTE

Si és vosté capaç de resoldre la següent endevinalla, de la qual cosa no dubte, serà convidat a una reunió de cap de setmana amb les ments matemàtiques més ingenioses.

En que orden están los siguientes números?:
5 – 4 – 2 - 9 – 8 – 6 -7 - 3 – 1

Atentament Fermat.

Pista: La pregunta està en castellà

1.2.EL PASTOR, EL LLOP L'OVELLA I LA COL:

Un pastor ha de creuar un riu amb una ovella, un llop i una col. A la barca sols caben ell i una de les tres coses. El pastor sap que si deixa sols l'ovella i el llop, aquesta tindrà un mal final..., i si deixa sols l'ovella i la col, aquesta es menjarà la col.

Què pot fer el pastor per a no perdre cap de les seues possessions i creuar el riu?



2.ENIGMES PLANTEJATS A L'HABITACIÓ.

2.1.PRIMER ENIGMA

Un pastisser rep tres caixes opaques amb caramels, una conté caramels de menta, l'altra d'anís i la tercera una barreja de menta i d'anís. Totes les caixes estan mal etiquetades. Quants caramels hem de treure com a mínim de les caixes per poder etiquetar-les bé?

2.2.SEGON ENIGMA

Apareixen 169 zeros i uns a la pantalla, què representen?

```
0000000000000001111111100011
1111111100111111111110011000
1000110011000100011001111011
1110011110001111000111111110
0000101010100000011010110000
0111111100000000000000000
```

2.3.TERCER ENIGMA

A l'interior d'una habitació hermèticament tancada hi ha una bombeta, fora hi ha tres interruptors. Sols un dels tres encén la bombeta. Mentre no obrim la porta podem polsar els interruptors totes les vegades que vulguem, però sols podem obrir la porta una vegada i quan l'obrim hem de dir quin dels interruptors encén la bombeta.

Pista: Els homes estan tractant de parar el moviment de les parets per la força, sols Oliva es preocupa dels enigmes de la PDA. El moviment de les parets està a punt de trencar les làmpades i deixar-los sense llum. Accidentalment Pascal es crema al tocar una de les làmpades. Açò dóna una pista a Oliva per a resoldre l'enigma.

2.4.QUART ENIGMA.

Com podem cronometrar 9 minuts amb dos rellotges d'arena, l'un de 4 minuts i l'altre de 7 minuts ?



2.5.CINQUÉ ENIGMA:

Un alumne li pregunta al seu professor quina edat tenen les seues tres filles, i el professor contesta: El producte de les seues edats és 36 i la suma és el número de la teua casa.

Després d'una estona de càlculs l'alumne li indica al professor que li falta una dada. Després de repassar els comptes el professor li diu: En efecte, la major toca el piano.

2.6.Enigma Sisè:

A la terra falsa tots els habitants menteixen sempre i a la terra certa tots els habitants diuen sempre la veritat. Un estranger es troba atrapat en una habitació que té dues portes, una porta dóna a la llibertat i l'altra no, les portes estan custodiades per un carceller de la terra falsa i per un de la terra certa. Per a aplegar a la porta que du a la llibertat el presoner pot fer sols una pregunta a un dels carcellers però no sap quin és el de la terra certa i quin és el de la terra falsa. Quina pregunta va formular?

2.7.Enigma Setè:

És un problema d'edats: La mare és 21 anys major que el fill, d'ací a sis anys el fill serà 5 vegades menor que la seua mare. Que està fent el pare?

3.Els Personatges:

Qui són Hilbert,Galois, Oliva, Pascal i Fermat?

3.1.Evarist Galois (1811-1832)



És en la història de les matemàtiques l'etern jove impetuós, l'adolescent rebel que entra en contacte amb les matemàtiques als quinze anys, resolent al poc temps el problema de la resolució de les equacions polinòmiques amb radicals, qüestió que en el món matemàtic duia un segle plantejada. Tanmateix, les seues aportacions més notables estan relacionades en la Teoria de Grups. Cal assenyalar que tots aquests descobriments els realitza Galois al marge dels ambients científics i universitaris, als qual no va poder accedir, i al marge, també, dels grans matemàtics de començaments del XIX: Cauchy, Poisson, Abel, Jacobi o el mateix Fourier que va extraviar els treballs que Galois li havia adreçat.

Paral·lelament als quefers matemàtics, Galois mantenia un ferm compromís polític. Anticlerical i antimonàrquic va haver de passar en dues ocasions per la presó.

Dos dies abans de la seua mort, ix de la presó. No estan clars els detalls que el portaren a batre's en duel i el seu convenciment que anava a morir, el qual restarà per a la història, farà que la nit d'abans Galois la passa escrivint el que seria el seu testament matemàtic. Mor el 30 de maig del 1832, amb vint anys. Deu anys després Liouville revisaria eixos documents i reconeixeria que suposaven una vertadera revolució en l'Àlgebra. Serien publicats l'any 1846.

3.2.Oliva Sabuco



És el nom de l'autora de "Nueva Filosofia de la naturaleza del hombre,no conocida ni alcanzada de los grandes filósofos antiguos, la cual mejora la vida y salud humana". Un nom pretensiós per a un tractat científic-naturalista, i alhora filosòfic, publicat a Madrid l'any 1587, escrit en

castellà i una part en llatí. Una obra important per a la seua època, en ple Renaixement, tant pel seu contingut com pel seu estil.

Poc es coneix de la seua biografia. Va nàixer a ALcaraz l'any 1562 i que es va casar l'any 1580. Era filla del batxiller i farmacèutic Miguel Sabuco, després nomenat lletrat, sembla que aquest seria el responsable que Oliva aconseguira estudis dins l'ambient familiar.
Existeixen moltes ombres sobre l'autoria de la "Nueva Filosofia...", es parla que l'autor podria haver estat son pare si més no de tota, de part de l'obra. Però ens interessa reivindicar l'Oliva Sabuco, filòsofa i metge, dona avançada a l'època que li va tocar viure i autora d'una magna obra, on qüestiona i corregeix els coneixements dels antics filòsofs grecs, englobant aspectes psicològics, mèdics així com naturalistes i polítiico-social. En la part on tracta la compostura del món defensa el geocentrisme per molt que les teories de Copèrnic eren ja conegudes.

3.3.BLAISE PASCAL(1623-1662)

Filòsof, físic i matemàtic francés. Sa mare mor quan ell tenia tres anys, fet que fa que son pare, el matemàtic Etienne Pascal, transllade la família a París. Va ser un geni precoç a qui son pare havia iniciat molt prompte en la geometria i el va introduir en el cercle de Mersenne, l'Acadèmia, a la qual son pare pertanyia. Allí Pascal es va familiaritzar amb les idees de Girard Desargues i en 1640 publica "Essai pour les coniques" que contenia el que hui es coneix com a teorema de l'Hexàgon de Pascal.



La designació de son pare com a comissari de l'impost reial va suposar el trasllat a Ruán, on Pascal despertà un nou interés pel disseny i la construcció d'una màquina de sumar.

En Ruán Pascal també es va interessar per la física ,en especial per la hidrostàtica, i va encetar les seues primeres experiències sobre el buit. Va intervenir en la polèmica al voltant a l'existència de l'*horror vacui* en la natura i realitzà importants experiments en recolzament de l'explicació donada per Torricelli al funcionament del baròmetre.

La malaltia fa que Pascal torne a París l'any 1647; els metges li aconsellaren distracció iniciant un període mundà que finalitzà amb la seua experiència mística a finals de 1654, convençut que el camí a Déu estava en el cristianisme i no en la filosofia. Blaise Pascal suspengué el seu treball científic quasi per complet.

Pocs mesos abans, com testimonia la correspondència amb Fermat s'havia ocupat de les propietats del triangle aritmètic hui anomenat de Pascal i que dóna els coeficients dels desenvolupaments de les successives potències del binomi; el seu tractament del triangle en termes d'una geometria de l'atzar el convertí en un dels fundadors del càlcul matemàtic de probabilitats.

En 1658, Pascal realitzà el seu estudi de la cicloide que resultà un important estímul del càlcul diferencial.

3.4.DAVID HILBERT (1862-1943)



Fou un matemàtic alemany, reconegut com un dels més influents del segle XIX i principis del XX. Estableix la seua reputació com a gran matemàtic i científic inventant o desenvolupant un gran ventall d'idees, com la teoria d'invariants, l'axiomatització de la geometria i la noció d'espai de Hilbert,un dels fonaments de l'anàlisi funcional. Hilbert i els seus estudiants proporcionarien parts significatives de la infraestructura matemàtica necessària per a la mecànica quàntica i la relativitat general. Fou un dels fundadors de la teoria de la demostració , la lògica matemàtica i la distinció entre matemàtica i metamatemàtica. Adoptà i va defendre vivament la teoria de conjunts i els nombres transfinits de Cantor. Un exemple famós del seu lideratge mundial en la matemàtica és la presentació en 1900 d'un conjunt de problemes que marcarien el curs de gran part de la recerca matemàtica del segle XX.

En la pugna per demostrar correctament alguns dels errors comesos per Einstein, en la teoria general de la relativitat, David Hilbert es va avançar a les correccions d' Einstein, tanmateix mai no va voler atorgar-se el mèrit.

3.5.PIERRE FERMAT



Va néixer el 20 d'agost de 1601 a Beaumont de Lomagne. El seu pare Dominique Fermat, era un ric comerciat de pells que va donar al seu fill una bona educació. Degué ser un estudiant brillant ja que dominava el grec, el llatí i la majoria dels idiomes europeus, a més amava la literatura i era un poeta ocasional. Va estudiar a la universitat de Toulouse. I va ser a Bordeus on va començar les seues primeres investigacions matemàtiques.

En 1631 es va casar amb Louise de Long, cosina de sa mare, amb qui va tindre tres fills i dues filles. Un dels seus fills, Clément Samuel, seria qui recopilaria tots els seus treballs matemàtics i els publicaria.

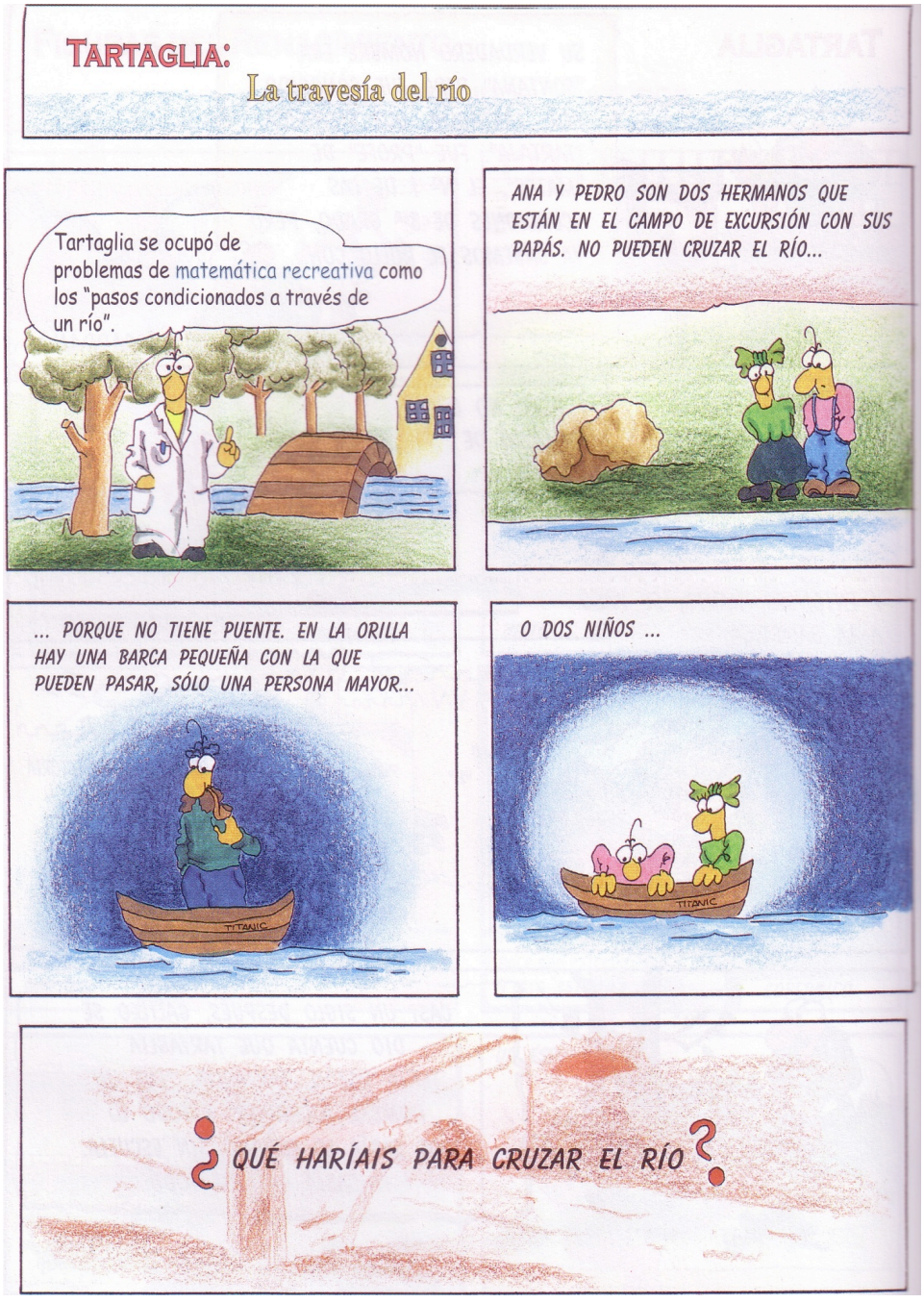
Fermat no era un matemàtic professional, era magistrat. Tenia el costum de no publicar res, sinó que anotava o feia càlculs en els margens dels llibres o escrivia casualment els seus descobriments en cartes als seus amics. Després de donar detalls sobre un descobriment acaba dient: " Ho sento però aquest marge és insuficient per a donar detalls de la demostració". De manera que la humanitat es va quedar sense saber quina era la demostració (qui sap, pot ser s'ho va inventar).

L'últim teorema de Fermat: Aquest teorema no es va trobar en cap carta, sinó que es va trobar en un marge del llibre Aritmètica de Diofant.

Aquest teorema es relaciona amb les ternes pitagòriques. $x^n + y^n = z^n$. Diu que per a n>2 aquesta relació no es compleix. Fermat explica, "és impossible dividir un cub en suma d'altres dos o un biquadrat en altres dos biquadrats, en general, una potència qualsevol superior a dos en dos potències del mateix grau; he descobert una demostració vertaderament meravellosa, però aquest marge és massa estret per a contenir-la".

El teorema de Fermat va ser demostrat per Andrew Wiles, un matemàtic anglés que treballava a la universidad de Princenton als Estats Units.

4.ALTRES PROBLEMES DEL MATEIX ESTIL



4.1.Primer Enigma: Caragols, rosques i claus

Tenim tres caixes, l'una té caragols, l'altra rosques i l'altra claus. El qui ha posat l'etiqueta del que contenien s'ha confós i no n'ha encertat cap. Obrint una sola caixa i traient una sola peça, com es pot aconseguir posar a cada caixa la seua etiqueta correcta?

4.2.Tercer Enigma: Un altre d'interruptors

Al soterrani d'una casa hi ha quatre bombetes i al pis de dalt hi ha quatre interruptors, un per cada bombeta. Quan accionem un interruptor des de la casa, és impossible vore quina bombeta s'ha encés.

La pregunta és: Fent un sol viatge, com podem saber quin interruptor encén cada llum?.

4.4.Quart Enigma: El problema dels ciris

Tenim dos ciris que sabem que tarden 1 hora cadascun en consumir-se completament i que, a més a més, ho fan de manera uniforme. Com podrem mesurar 15 minuts?

4.5.Cinquè Enigma: Els barrets

Tres persones duen barret (blanc o negre) del qual no coneixen el color, encara que saben que tots no són blancs.

Les tres persones estan en fila, una rere l'altra, de manera que l'última persona veu els colors del primer i el segon, mentre que el segon veu, únicament el barret del primer. L'últim diu que té dubtes en el color del seu barret, el segon diu el mateix, mentre que el primer que no veu cap dels tres barrets diu que sap el color del seu barret. De quin color és?

COMUNICACIONS

DUES REVISTES DE PROBLEMES

Ricard Peiró i Estruch.
IES “Abastos” València.

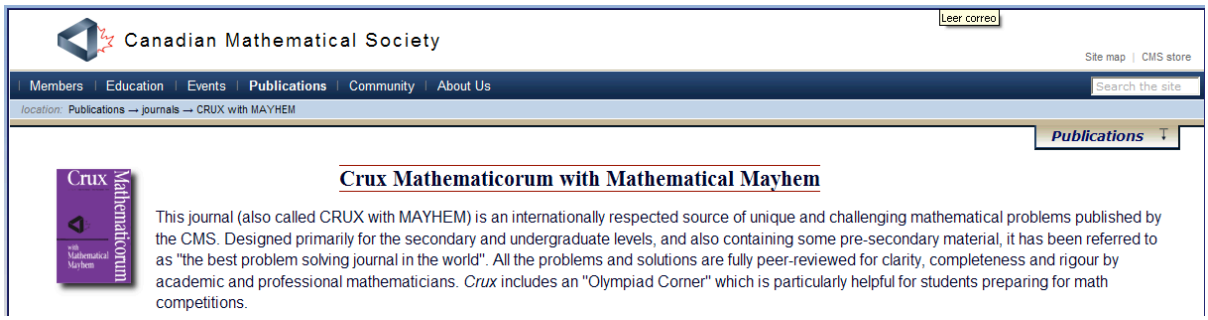
Una de les tasques lúdiques que satisfà més els matemàtics i que hauríem d’inculcar als estudiants és la resolució de problemes.

Aquest joc requereix una forta concentració i preparació i ens dóna, després de diversos intents, satisfaccions o frustracions que són inherents al joc.

Les revistes de problemes són:

La canadenca Crux Mathematicorum http://www.cms.math.ca/crux/, la qual té una secció lliure (Mayhem) dedicada a l’ensenyament mitjà i la sevillana TriángulosCabri http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/ que dirigeix, des de fa més de 10 anys, el professor Ricardo Barroso. Totes dues efectuen una gran tasca de divulgació de la resolució de problemes amb la proposició de problemes i publicació de les sues solucions, efectuades per un gran conjunt de col·laboradors.

Amb la comunicació presente les dues revistes i propose als participants la possibilitat per participació en les mateixes.



La revista *Crux Mathematicorum* està editada per la Canadian Mathematical society, aquest any és publica el volum 36.

Crec que és la revista més completa dedicada a la resolució de problemes, perquè va dirigida a distints nivells (primàri, seundàri, universitari...) i per la gran varietat de problemes (numèrics, geomètrics, algebraics...)

La revista presentada en format pdf i en paper per als subscriptors es publica amb 8 números a l’any. La temàtica és la resolució de problemes de distinta dificultat. També publiquen articles monogràfics i d’opinió.

Des del volum 22 fins el 30 són completament lliures i es poden descarregar des de la seua pàgina web.

La revista publica els enunciats en francés i anglés, les solucions estan només en anglés.

Les seccions de la revista són:

SKOLIAD. Apartat de problemes de nivell de primària.

MATHEMATICAL MAYHEM. Apartat de problemes de nivell de secundària i batxillerat. Aquesta secció és lliure en tots els seus números i per la temàtica la més interessant per als nostres alumnes.
PROBLEM OF THE MONTH. Estudi sobre un problema especial.
THE OLYMPIAD CORNER. Apartat de problemes proposats en les distints olimpíades.
BOOK REVIEWS. Apartat de comentaris sobre llibres publicats de matemàtiques.
PROBLEMS. Apartat de problemes d'alt nivell.

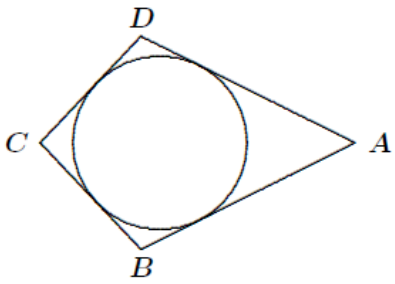
Els problemes MATHEMATICAL MAYHEM són proposats per professors, alumnes o els editors de la revista. Es donen 3 mesos per poder resoldre'ls i enviar la solució a una direcció electrònica. De cada problema només publiquen una solució (al voltant d'un any de la seua publicació), la que els editors consideren més original.

El problema següent va ser publicat en el volum35 número 4.

La seua publicació s'he efectuat en el volum 36 número 2.

M395. *Proposed by the Mayhem Staff.*

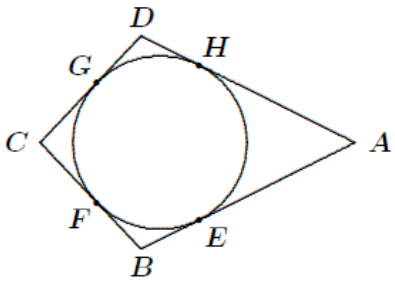
The quadrilateral $ABCD$ is such that each of its sides is tangent to a given circle, as shown. If $AB = AD$, prove that $BC = CD$.



Solution by Jaclyn Chang, student, Western Canada High School, Calgary, AB.

In the diagram, $AB = AD$, and AB, BC, CD, DA are tangent to the circle at E, F, G, H, respectively.

Because of the theorem that says that the two tangents to a circle from a given exterior point have the same length, then $AE = AH$, $BE = BF$, $CF = CG$, and $DG = DH$.



Also, since $AB = AD$, then $AH + DH = AE + BE$. But $AH = AE$, so $DH = BE$. But $DG = DH$ and $BE = BF$, so $DG = BF$. Since $CF = CG$, then $BC = BF + CF = DG + CG = CD$, as required.

Also solved by EDIN AJANOVIC, student, First Bosniak High School, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina; GEORGE APOSTOLOPOULOS, Messolonghi, Greece; HUGO LUYO SÁNCHEZ, Pontificia Universidad Católica del Peru, Lima, Peru; RICARD PEIRÓ, IES "Abastos", Valencia, Spain; BRUNO SALGUEIRO FANEGO, Viveiro, Spain; JIXUAN WANG, student, Don Mills Collegiate Institute, Toronto, ON; GUSNADI WIYOGA, student, SMPN 8, Yogyakarta, Indonesia; and KONSTANTINE ZELATOR, University of Pittsburgh, Pittsburgh, PA, USA. There was one incomplete solution submitted.

Podem observar la gran diversitat de nacionalitat dels que resolen els problemes.

Un problema de la secció PROBLEMS:

3318. [2008 : 103, 105] *Proposed by D.E. Prithwijit, University College Cork, Republic of Ireland.*

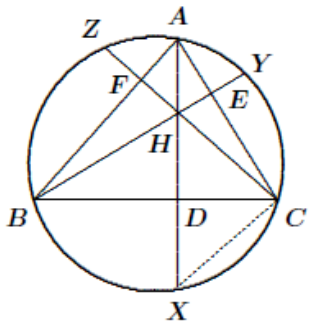
The altitudes AD, BE, and CF of $\triangle ABC$ are produced to meet the circumcircle at X, Y, and Z, respectively. Prove that

$$\frac{AX}{AD} + \frac{BY}{BE} + \frac{CZ}{CF} = 4.$$

Similar solutions by Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, Spain; George Apostolopoulos, Messolonghi, Greece; Ricardo Barroso Campos, University of Seville, Seville, Spain; Cao Minh Quang, Nguyen Binh Khiem High School, Vinh Long, Vietnam; Apostolis K. Demis, Varvakeio High School, Athens, Greece; Andrea Munaro, student, University of Trento, Trento, Italy; and George Tsapakidis, Agrinio, Greece.

Let H be the orthocentre of $\triangle ABC$. The proof is trivial when the triangle ABC is right-angled. We now assume that $\triangle ABC$ is acute. The right triangles CDH and CDX are congruent, because

$$\begin{aligned} \angle DHC &= 90^\circ - \angle DCH \\ &= 90^\circ - \angle BCF \\ &= 90^\circ - (90^\circ - \angle B) \\ &= \angle B = \angle AXC \\ &= \angle DXC. \end{aligned}$$



Hence, $XD = HD$. Similarly, $YE = HE$ and $ZF = HF$. Let $[ABC]$ denote the area of triangle ABC. We have

$$\begin{aligned} \frac{AX}{AD} + \frac{BY}{BE} + \frac{CZ}{CF} &= \frac{AD + XD}{AD} + \frac{BE + YE}{BE} + \frac{CF + ZF}{CF} \\ &= \frac{AD + HD}{AD} + \frac{BE + HE}{BE} + \frac{CF + HF}{CF} \\ &= 3 + \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} \\ &= 3 + \frac{[HBC]}{[ABC]} + \frac{[HAC]}{[ABC]} + \frac{[HAB]}{[ABC]} \\ &= 3 + \frac{[ABC]}{[ABC]} = 4. \end{aligned}$$

Also solved by ŠEFKET ARSLANAGIĆ, University of Sarajevo, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina; MICHEL BATAILLE, Rouen, France; CHIP CURTIS, Missouri Southern State University, Joplin, MO, USA; IAN JUNE L. GARCES, Ateneo de Manila University, Quezon City, The Philippines; OLIVER GEUPEL, Brühl, NRW, Germany; JOHN G. HEUVER, Grande Prairie, AB; WALTHER JANOUS, Ursulinengymnasium, Innsbruck, Austria; VÁCLAV KONEČNÝ, Big Rapids, MI, USA; SALEM MALIKIĆ, student, Sarajevo College, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina; RICARD PEIRÓ, IES "Abastos", Valencia, Spain; SALEM MALIKIĆ, student, Sarajevo College, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina; JOEL SCHLOSBERG, Bayside, NY, USA; D.J. SMEENK, Zaltbommel, the Netherlands; PETER Y. WOO, Biola University, La Mirada, CA, USA (2 solutions); KONSTANTINE ZELATOR, University of Toledo, Toledo, OH, USA; TITU ZVONARU, Comănești, Romania; and the proposer.

Bataille, Geupel, and Peiró gave solutions using signed distances, for which the featured solution is valid for all triangles, but the statement (as given) is not true for obtuse triangles. For example, if $AB = AC$, then AX is fixed (it is the diameter of the circumcircle), so the ratio $\frac{AX}{AD}$ can be larger than 4; in fact, it can be made arbitrarily large. The correct statement for an obtuse triangle, say, with $\angle A > 90^\circ$, B between E and Y, and C between F and Z would be

$$\frac{AX}{AD} - \frac{BY}{BE} - \frac{CZ}{CF} = 4.$$



La revista **Laboratorio Virtual de triángulos con Cabri**, està editada pel professor Ricardo Barroso Campos de la Universitat de Sevilla.

Està dedicada a la geometria del triangle. Fa més de 10 anys que està publicada.

La periodicitat de la revista és quinzenal. El professor Barroso publica al voltant de 4 problemes el dia 1 i 16 de cada més, deixa 10 dies per poder donar-los solució i publica totes les solucions presentades. Després de desé dia només publica aquelles distintes de les publicades.

La procedència dels problemes és diversa: proposta del mateix professor, proposta dels col·laboradors, proposta de distints llibres (la bibliografia dels llibres és abundant, alguns d'ells antics).

Actualment té al voltant de 600 problemes publicats. Han participat al voltant de 90 col·laboradors (plantejant o resolent problemes).

La revista té un comité editorial que s'encarrega de resoldre dubtes de solucions presentades, aquest comité es renova cada dos anys. He participat dos anys en aquest comité ajudant el professor Barroso en els seus dubtes.

El nivell dels problemes es divers. Des de problemes de nivell secundari o bé problemes d'alt nivell.

Moltes solucions van acompanyades per applets de CabriJava, que donen a la solució una interactivitat gràfica.

Problema plantejat la segona quinzena de febrer de 2007.

Aquest problema el vaig proposar als meus alumnes de 4t d'ESO de l'IES Juan de Garay de València, informant-los que era d'internet i que el premi era la publicació. Els vaig donar 10 minuts per resoldre'l individualment. Me'l van resoldre 4 alumnes.

Problema 374.

27 En el triángulo ABC <A=5x, <B=7x, <C=36°. Encontrar las medidas de <A y <B. (p. 103)

Geltner, P.B. , Peterson, D.J. (1998) Editorial Thomson México DF(p. 103)

Quincena del 15 al 28 de febrero de 2007

Problema 374. Ángulo 36° y otros

Resposta de Ignacio Guerrero Balaguer. Alumne de 4t opció B IES "Juan de Garay" València (20 de febrero de 2007)

Resposta de Roberto del Teso March. Alumne de 4t opció B IES "Juan de Garay" València (20 de febrero de 2007)

Resposta de Rubén Ajaú González. Alumne de 4t opció B IES "Juan de Garay" València (20 de febrero de 2007)

Resposta de Victoria Arauz Garcia. Alumna de 4t opció B IES "Juan de Garay" València (20 de febrero de 2007)

Resposta de Victoria Arauz García. Alumna de 4t opció B
IES "Juan de Garay" València.

Victoria Arauz García 4ºD

Problema 374.

En el triangle ABC Els angles mesuren: A=5x, B=7x, C=36º. Calculeu les mesures dels angles A i B.

Geltner, P.B. , Peterson, D.J. (1998). Editorial Thomson. México DF. (p. 103).

Solució:

tots els angles sumen 180° en el cas dels triangles

$A+B = 180° - 36°$

$A+B = 144°$

$A = 5x \quad B = 7x$

$5x+7x = 144°$

$12x = 144°$

$x = 12°$

$A = 5x = 5 \cdot 12 = 60°$

$B = 7x = 7 \cdot 12 = 84°$

Aquest problema el vaig proposar la primera quinzena de desembre de 2003:

Problema 124

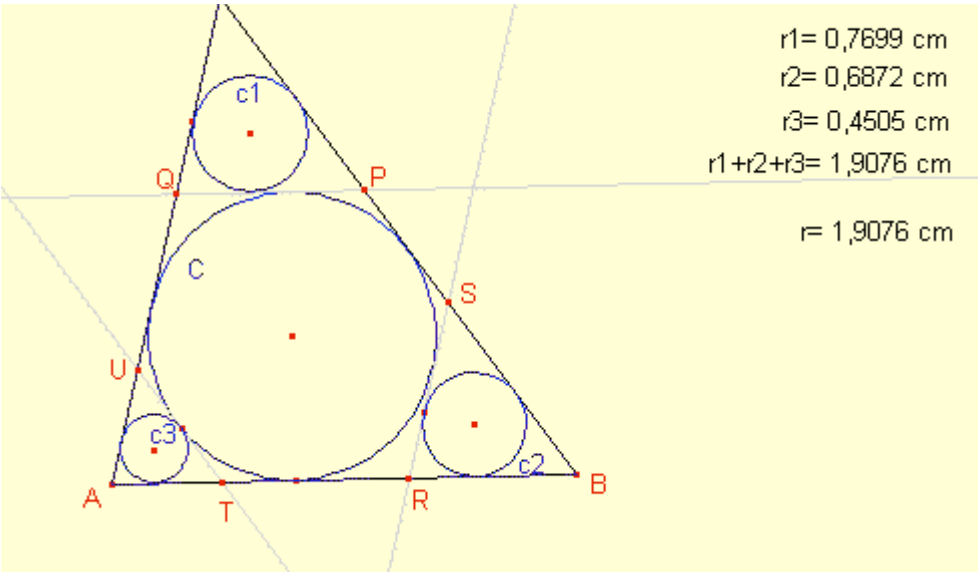
Sea el triángulo ABC y su circunferencia inscrita C de radio r.

Sean las rectas tangentes a la circunferencia C paralelas a los lados del triángulo, que determinan con los vértices los triangulos PQC, RSB, TUA.

En cada triángulo, construimos la circunferencia inscrita de radios r1, r2, r3, respectivamente.

Entonces: r=r1+r2+r3

Peiró i Estruch, R. (2003): Comunicación personal



Un problema d'alt nivell és el de la primera quinzena de maig de 2010.

D'aquest problema foren publicades 3 solucions, una d'elles la meua.

Problema 562

Reflexiones en el triángulo Dibujar un triángulo ABC y marcar un punto P. Marcar las reflexiones X, Y, Z del punto P respecto a los lados del triángulo. Entonces las circunferencias XYC, YZA, ZXB y la ABC misma, todas se cortan en un punto común.

Pag 258

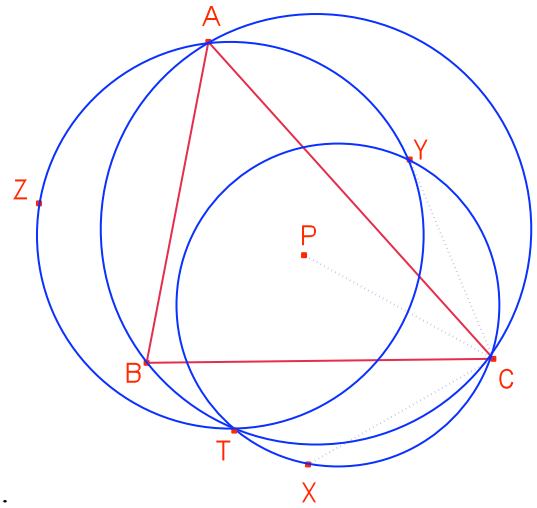
Wells, D. (1991) THE PENGUIN DICTIONARY OF CURIOUS AND INTERESTING GEOMETRY. the Penguin Group

La meua solució:

Problema 562

Siguen donats un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i un punt P.
Siguen X, Y, Z els punts simètrics de P respecte dels costats $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ del triangle, respectivament. Demostreu que les circumferències circumscrites als triangles $\overset{\Delta}{XYC}$, $\overset{\Delta}{YZA}$, $\overset{\Delta}{ZXB}$ i $\overset{\Delta}{ABC}$, totes quatre s'intersecten en un punt.

Solució:



Notem que per la simetria $\overline{CP} = \overline{CY}$, $\overline{CP} = \overline{CX}$.
$\angle XCY = 2C$

Anàlogament, $\overline{AY} = \overline{AP} = \overline{AZ}$, $\angle YAZ = 2A$.
Aleshores, $\angle AZY = 90º - A$

Siga T el punt d'intersecció de les circumferències circumscrites als triangles $\overset{\Delta}{XYC}$, $\overset{\Delta}{ABC}$, distint de C.
Siga $\alpha = \angle ATY$.

El quadrilàter TXCY és inscriptible, aleshores, $\angle YTX = 180º - 2C$.

$\angle YTC = \frac{1}{2}\angle YTX = 90º - C$.

$\alpha = \angle ATY = \angle ATC - \angle YTC = B - (90º - C) = 90º - A$.

Aleshores, $\angle AZY = \angle ATY$, per tant, T pertany a la circumferència que passa pels punts AZY. Per tant, T pertany a l circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{YZA}$

Anàlogament T pertany a la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ZXB}$.

Altres revistes de problemes:

Mathematical Reflections.
http://reflections.awesomemath.org/index.html
Publicada per Titu Andreescu i Gabriel Dospinescu.
Idioma: anglés.
Periodicitat: 6 números a l'any.

KöMaL

http://www.komal.hu/info/bemutatkozas.e.shtml

Publicada per MATFUND Hungarian High School Mathematics and Physics Foundation, the János Bolyai Mathematical Society and the Roland Eötvös Physical Society with the financial support of the Ministry of Education and Cultura.
Idioma: magiar i anglés.
Periodicitat: 8 números per curs acadèmic. Es premia als millors estudiants que presenten solucions.
Problemes de preparació per a l'olimpíada de matemàtiques.
Un dels alumnes premiats va ser Paul Erdös, quan era estudiant.

Per a concloure, donada la importància de la resolució de problemes en l'ensenyament de les matemàtiques i en particular en l'ensenyament secundari és important conéixer i participar en les esmentades revistes.

València, setembre de 2010.

APLICACIONES DIDÁCTICAS DE LA NÁUTICA EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS EN ESO-BACHILLER Y PRÁCTICA DE SU INTERDISCIPLINARIEDAD (LA TRIGONOMETRÍA Y LA NAUTICA EN LA HISTORIA: LECTURA DE TEXTOS NÁUTICOS SIGLOS XVI-XVIII)

Ignacio Díaz

En esta experiencia educativa que voy a tratar de presentar en esta comunicación se ha tratado de que el alumno construya instrumentos con sus propias manos, los gradúe y obtenga medidas de la realidad operando con ellos, comprobando finalmente que sus medidas se aproximan bastante a las obtenidas con instrumentos fabricados en serie, lo cual contribuye a producirles la sensación de que ellos mismos son los protagonistas del resultado final de la medida, y no un aparato que se diseña y fabrica en serie, y que acaba siendo visto como un *ente* extraño, que no se sabe bien de dónde procede, y que funciona por medio de mecanismos matemáticos misteriosos. Los resultados de Emma Castelnuovo en *Didáctica de la Matemática Moderna* sobre la importancia de la recreación histórica de las experiencias científicas para la consecución de un aprendizaje significativo fundamentan buena parte de la inspiración del contenido de esta comunicación.

En la nueva asignatura de 4º de la ESO Taller Monográfico de Investigación (TMI), una serie de alumnos eligieron trabajar cuestiones de Astronomía. Dedicaron la 1ª y 2ª Evaluación a la construcción y diversos usos del gnomon, entre otros para realizar la medición del radio de la Tierras por el procedimiento de Eratóstenes e investigar las diversas mediciones que se realizaron en la antigüedad y que han llegado hasta nosotros.

Durante la 3ª Evaluación de este curso 2008-2009, los mismos alumnos han estado elaborando para su posterior uso los siguientes instrumentos náuticos: Ballestilla, sextante, compás magnético o brújula marina, cuadrante y teodolito, en coordinación con el profesorado de Tecnología, que ha cedido amablemente el aula-taller y ha asesorado en todo momento acerca de las cuestiones técnicas que surgían en la fabricación de dichos instrumentos (cómo recortar determinados materiales, qué herramientas usar en determinados diseños, etc...) También se llevó a cabo parte de esta experiencia educativa en el curso 2004-2005, en el IES Vilamarxant, en el desarrollo de la asignatura optativa de 4º de ESO Astronomía, donde se realizaron una ballestilla, un cuadrante y un teodolito.

Como en este curso la experiencia ha sido más amplia en cuanto a la construcción de instrumentos, y además se ha introducido la novedad por parte del autor de esta comunicación de la facilitación a los alumnos de textos antiguos a partir de los cuales trabajar el diseño, será referida la experiencia de este curso 2008-2009, realizada en el IES *Carles Salvador* de Aldaia.

Si se consulta bibliografía especializada, veremos que la trigonometría experimentó un auge inédito durante el siglo XVI en Europa debido entre otras razones a las necesidades de la náutica. Es sabido que en España se focalizó como en ningún otro lugar esta necesidad de perfeccionar los instrumentos náuticos, ya que tras el descubrimiento de América la monarquía necesitaba contar con medios óptimos de navegación en sus barcos mercantes, que transportaban el oro y plata que se expoliaba en el continente americano.

En el TMI se ha pretendido que el alumno aplique contenidos de trigonometría al diseñar instrumentos náuticos: cuadrante (uso de la tangente, deducción de igualdad de ángulos), ballestilla (tangente de un ángulo), y en el caso del sextante también contenidos de Física (Reflexión de la luz) y una deducción basada en paralelismo para obtener los ángulos en la graduación del sextante. Para el compás magnético el alumno usa concepto de orientación y rumbo mediante medidas angulares y conceptos de magnetismo. En todos loa casos han utilizado documentos históricos suministrados por el profesor para realizar el diseño.

Al mismo tiempo se trataba de poner en práctica las directrices que Emma Castelnuovo expresa en *Didáctica de la matemática moderna*, en el sentido de reclamar la práctica de una geometría intuitiva, manipulativa y sensorial previa al aprendizaje de la geometría abstracta. Como ella escribe: *"No hace falta poner al alumno en condiciones de inferioridad; descorazonarlo con una "didáctica catedrática", con una enseñanza verbal, porque así su aprendizaje será pasivo. Mediante la experiencia directa, la actividad, la concepción por sí sola a través de los sentidos, de las cosas y de las operaciones sobre las cosas, es como le nacerá el concepto, primero vago y apenas esbozado, después más preciso, consistente, claro, universal."* (pag.18)

Con esta filosofía los alumnos han realizado los instrumentos que a continuación se describen, relatando el proceso que ha llevado hasta su utilización práctica.

CUADRANTE:

En el aula-taller de Tecnología recortan en madera o cartón un sector circular de 90º, lo cual les aclara definitivamente la denominación *cuadrante* para este instrumento (se hacen cuadrantes de unos 25 cm de radio). A continuación se les presenta el problema de graduar una escala que permitirá medir ángulos verticales o de elevación sobre el horizonte, de cualquier punto u objeto del cual sea necesario conocer esta medida angular.

En un principio les cuesta deducir que un transportador de ángulos de radio menor que el del cuadrante les puede ser de utilidad (superponiéndolo a la base del cuadrante) y prolongando por medio de rectas las cantidades angulares del transportador hacia la escala del cuadrante. Pero una vez hecho se les asienta definitivamente el concepto de ángulo.

La plantilla en que se basan para el diseño es la siguiente:

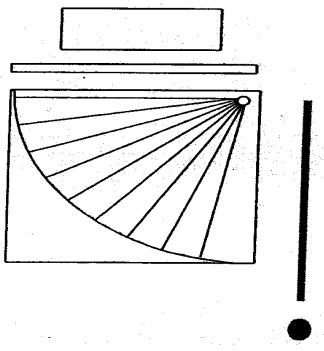


Figura 1

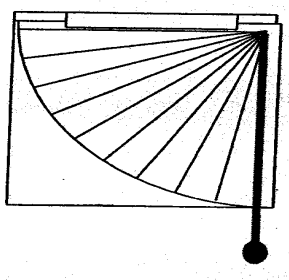


Figura2

El problema de adaptar una plomada que tenga su extremo superior atado de algún modos en el centro del sector circular lo resuelven de diversas maneras con tal de lograr el efecto plomada buscado. Este hilo que apunta perpendicularmente al suelo les indicará el ángulo de elevación de cualquier punto sobre el horizonte hacia el cual apunten con una visual,

que logran con una carcasa de bolígrafo, por ejemplo. El aspecto definitivo es el de la figura siguiente:

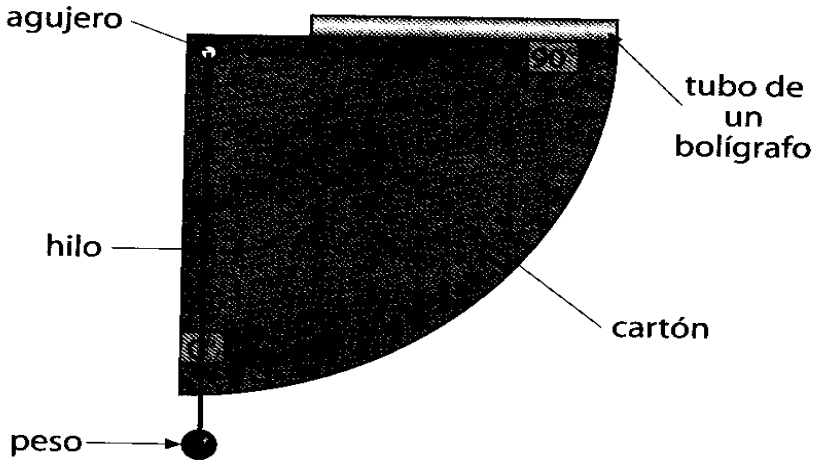


Figura 3

Una vez construido el cuadrante comprueban que con la visual apuntando al horizonte se obtiene una medida de 0º en la escala, y con la visual apuntando al cenit, 90º, y que para ángulos intermedios se obtiene una cantidad angular sobre la escala que coincide con el ángulo de elevación de un punto sobre el horizonte. Prueban por ejemplo enfocando hacia la parte más alta de un edificio, o apuntando hacia el sol -interponiendo un filtro en la parte delantera del tubo que actúa como ocular del instrumento, por ejemplo una placa de película fotográfica facilitada por el profesor-, como se ve en las figuras siguientes:

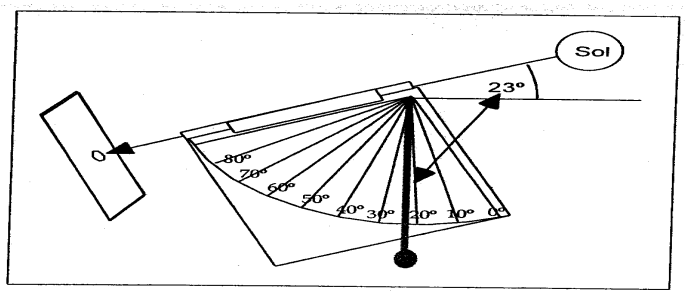


Figura 4

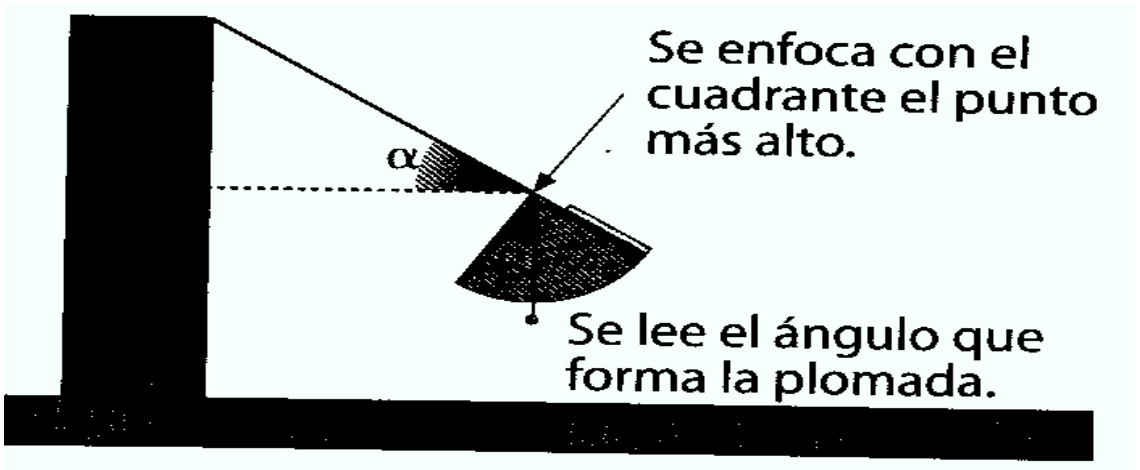


Figura 5

En este momento, tras estas comprobaciones es cuando es útil, y no antes, deducir la igualdad entre ese ángulo de elevación y el ángulo que mide la escala. Es una deducción geométrica sencilla, pero necesaria para que el alumno se convenza por sí mismo de que

ese ángulo es válido, y se deriva de un razonamiento geométrico. En las figuras 4 y 5 se incluyen los esquemas de donde es fácil deducir tal igualdad de ángulos. En la figura 4 se observa que el ángulo de 23º de elevación del sol sobre el horizonte coincide con el ángulo que se lee en la escala debido a la perpendicularidad que forma la plomada sobre el plano del horizonte y la perpendicularidad de la línea de 0º del cuadrante sobre la visual que se enfoca hacia el objeto. Usando el concepto de ángulos complementarios se deriva la igualdad angular entre la lectura de la escala y la altura del sol sobre el horizonte.

Una vez construido y comprendido su fundamento de medida, salimos al patio una sesión (que causalmente coincide con las semanas en que se imparten los temas de trigonometría), y provistos también de una cinta métrica se realizan dos medidas clásicas de aplicación de este aparato:

1) Altura del instituto. (Practican el concepto de tangente de un ángulo).
2) Altura de un objeto lejano, como la iglesia del pueblo, cuyo pie es inaccesible desde el instituto. Se toman dos medidas angulares desde dos puntos separados una distancia que miden con la cinta métrica. Resuelven el problema usando un algoritmo que han practicado en clase.

A continuación se propone a los alumnos del TMI que apliquen el instrumento a situaciones náuticas reales, y que investiguen la utilidad de las mismas medidas para la orientación en el mar:

1) Con un filtro solar aplicado sobre el ocular, al mediodía solar, se toma la altura angular del sol sobre el horizonte. A partir de esa medida, y facilitada por el profesor el valor de la declinación del sol en esa fecha, los alumnos deducen el valor de la latitud. Previamente el profesor ha explicado el concepto de declinación y la relación entre declinación, latitud del lugar y altura del sol sobre el horizonte al mediodía solar. De este modo reproducen uno de los antiguos usos náuticos del cuadrante.
2) Altura angular sobre el horizonte de la estrella polar por la noche: desde la azotea de su casa, comprueban que esta medida angular coincide con la latitud del lugar de observación, e investigan el fundamento geométrico de esta igualdad de ángulos: latitud = altura de la polar sobre el horizonte, que es una de las más remotas aplicaciones de la astronomía a la navegación, que además contribuyó a demostrar definitiva y racionalmente la redondez de la Tierra. De este modo reproducen otro de los antiguos usos náuticos de este instrumento, comprendiendo la necesidad vital que para los navegantes tenía conocer la latitud en que se encontraban, a efectos de orientación y elección del rumbo.

Finalmente, el profesor les facilita un fragmento del libro de Jerónimo Muñoz *Introducción a la Astronomía y la Geografía*, publicado a mediados del siglo XVI, donde se describe este instrumento y su utilidad práctica. Al mismo tiempo incluirán en un *dossier* información sobre este ilustre astrónomo valenciano, y sobre su importancia en los prolegómenos de la revolución científica.

Lo importante en este punto es fomentar la aproximación a fuentes histórico-científicas como una actividad que muestra que los conceptos científicos no aparecen de la nada, sino que tienen un importante y significativo desenvolvimiento histórico, que es útil trabajarlo de cara al aprendizaje y adquisición de conceptos.

El texto ofrecido a los alumnos es el siguiente:

43v *Libro IV* (43v)

SOBRE LAS ALTURAS DE LOS ASTROS, LOS CÍRCULOS DE ALTURAS Y LAS VERTICALES Y SOBRE LA MANERA DE ENCONTRAR LA ALTURA SOBRE EL HORIZONTE

CAPÍTULO 1

Sobre las alturas de los astros

Las alturas de los astros se refieren al horizonte y su polo y tienen sus círculos peculiares, que las delimitan y en los que se evalúan. Comienzan desde el horizonte y se dirigen hacia el polo del horizonte o cenit, por lo que cada astro está tanto más alto cuanto más cercano está al polo del horizonte y tanto más bajo cuanto menos dista del horizonte; pero como el cenit o el polo del horizonte dista 90° del horizonte, la máxima altura sobre el horizonte es de 90°. Se calcula esta altura por medio de círculos verticales, es decir, los que se dirigen desde el horizonte hasta el vértice, pero está delimitada por círculos paralelos al mismo horizonte, que se llaman en árabe círculos almicantarat, y los latinos los llaman de las alturas, y delimitan, pues, las alturas de los astros sobre el horizonte, mientras que los círculos "azimut" o "azimith" son llamados verticales por los latinos.

El presente diagrama (Fig. 7) mostrará muy claramente todas estas cosas: sea el horizonte **ab**, que representa una superficie plana perpendicular (al plano del dibujo). Sea **c** el cenit o el polo del horizonte, **d** por otro lado, el nadir. Sea el cuadrante del círculo **efg**, cuyo perímetro **fg** está dividido en 90 partes desde **f** hasta **g** En este cuadrante
44r se encontrarán las alturas de los astros **(44r)** sobre el horizonte. Pues la plomada **f** caerá necesariamente perpendicular y, por tanto, la línea que cortará el eje del cenit que atraviesa la superficie plana de la Tierra será el horizonte, y la plomada señalará el nadir. Si se cortan los cuadrantes **ac** y **bc** en 90 partes y se trazan los paralelos hasta el horizonte, los círculos que en este dibujo se representan con líneas rectas se llamarán círculos de alturas, y en árabe almicantarat; pero los que van desde el cenit (perpendicularmente) al horizonte se llaman verticales. En cualquier parte del primer círculo paralelo al horizonte en que esté el astro, la altura será de 10 g y en el segundo paralelo se elevará 20 g; por lo tanto, la altura sobre el horizonte será el arco del círculo vertical comprendido entre el horizonte y el círculo paralelo que pasa por el centro del astro. La altura sobre el horizonte se hallará en el cuadrante efg. Todos los astros

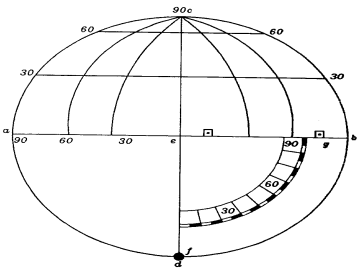


Fig. 7

BALLESTILLA I:

Con la anterior construcción y uso del cuadrante los alumnos toman conciencia de la importancia de contar con un instrumento que mida ángulos verticales en el proceso de cálculos prácticos de tipo tanto astronómico y náutico como geográfico (determinación de las coordenadas de un punto sobre la Tierra). Pero el profesor les hace meditar sobre la gran limitación de este instrumento, en el sentido de que si ya sabemos trigonometría por qué razón hemos de limitarnos a los cálculos que nos permiten la medición únicamente de ángulos verticales. ¿No seríamos capaces de resolver un sinnúmero de problemas si contáramos con aparatos que midieran también ángulos entre dos puntos en sentido horizontal, o en cualquier otro sentido? Se les propone que busquen información sobre la Ballestilla y expliquen por qué este instrumento supera esa limitación del cuadrante.

Tras ello, conocen dos modelos de ballestilla: una de tipo arco de circunferencia, y la segunda con travesaño deslizante, que fue la genuina ballestilla de uso náutico. Los alumnos, divididos en grupos, elaborarán los dos tipos de ballestilla.

El primer modelo de ballestilla construida consiste básicamente en realizar una arco de circunferencia con un listón de madera suficientemente flexible para que se pueda curvar y mantener sujeto por dos cordeles atados a sus extremos, como vemos en la figura:

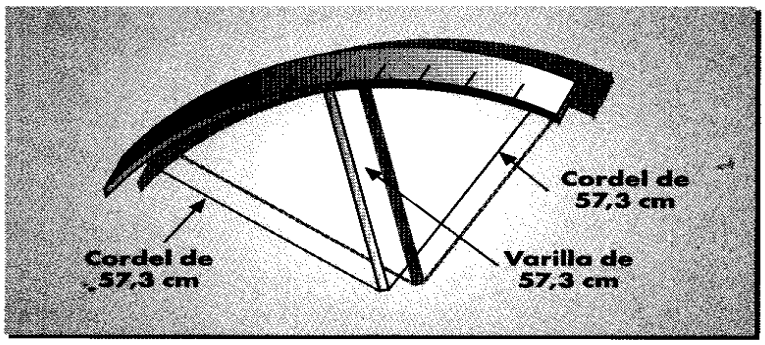


Figura 6

En clase se ha deducido con un adecuado esquema geométrico la medida del radio del arco de circunferencia para que cada centímetro dela escala represente 1º, que es, como en la figura, de 53,7cm. De este modo cuando se lancen visuales a puntos lejanos desde un punto en el centro del instrumento, se podrá obtener directamente sobre la escala su *separación angular.*

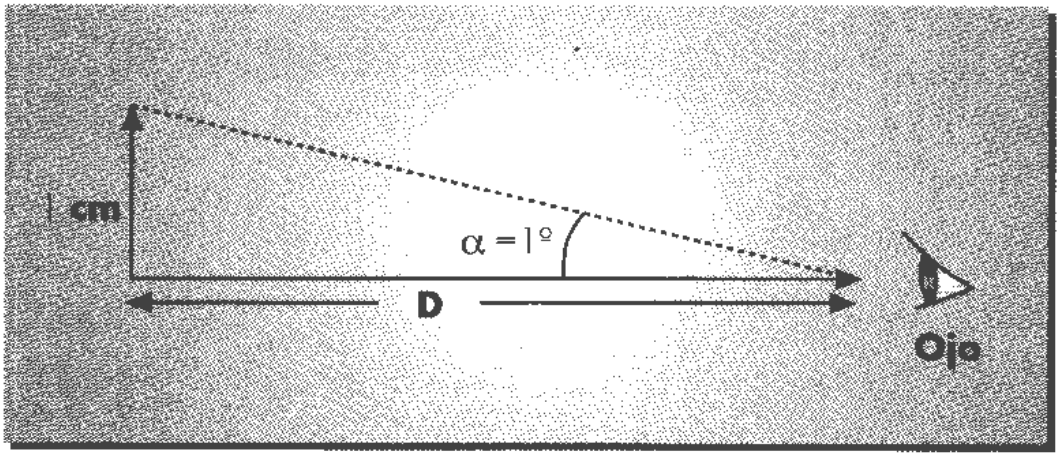


Figura 7 : 1 cm. De la escala es 1º de separación angular si D = 57.3 cm.

Se practica en el patio, midiendo ángulos entre los extremos del campo de basket, por ejemplo... Por la noche, desde la azotea de su casa miden ángulos entre estrellas, o entre la luna y una estrella, o la altura sobre el horizonte de la estrella polar, que fueron los usos primigenios de este instrumento destinado a la navegación, como veremos en el apartado siguiente, que incluye un texto del siglo XVI facilitado a los alumnos.

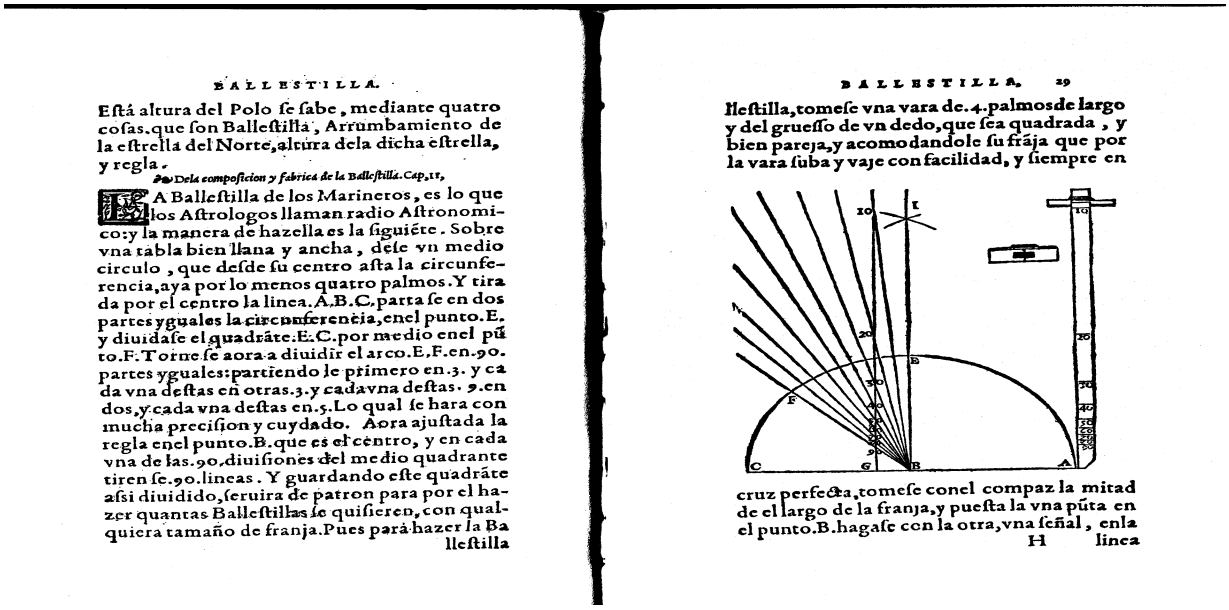
BALLESTILLA II:

Se trata ahora de realizar el modelo clásico de ballestilla, procedente del ámbito náutico. Para ello se les ha facilitado copia de las hojas que vemos a continuación del libro de Rodrigo Zamorano *Compendio del Arte de Navegar*, publicado en 1581. Los alumnos investigan sobre la figura de Zamorano, piloto Mayor de la Casa de la Contratación de Sevilla, cuyo *Compendio* fue traducido en Europa a numerosos idiomas.

De este modo pueden ir adquiriendo la idea de que el siglo XVI español, tras el descubrimiento de América, promovió en España la necesidad de organizar y planificar el tráfico marítimo con América para que fuera lo más eficaz y seguro posible, ya que de ese tráfico dependía la preponderancia del Imperio Hispano. Ello hizo que el monarca creara

instituciones y cargos (como el de Piloto Mayor) que potenciaban el estudio de los métodos de navegación y trataban de perfeccionar los instrumentos, ya que de ello dependía minimizar los riesgos de naufragio.

Del Compendio de Zamorano los alumnos leen el siguiente fragmento, del que tomarán parte de su diseño:



BALLESTILLA.

Eſtá altura del Polo ſe ſabe, mediante quatro coſas, que ſon Balleſtilla, Arrumbamiento de la eſtrella del Norte, altura dela dicha eſtrella, y regla.

Dela compoſicion y fabrica de la Balleſtilla. Cap. 11.

LA Balleſtilla de los Marineros, es lo que los Aſtrologos llaman radio Aſtronomico: y la manera de hazella es la ſiguiéte. Sobre vna tabla bien llana y ancha, deſe vn medio circulo, que deſde ſu centro aſta la circunferencia, aya por lo menos quatro palmos. Y tirada por el centro la linea. A.B.C. parta ſe en dos partes yguales la circunferencia, enel punto. E. y diuidaſe el quadrãte. E. C. por medio enel pũto. F. Torne ſe aora a diuidir el arco. E. F. en. 90. partes yguales: partiendo le primero en. 3. y cada vna deſtas en otras. 3. y cada vna deſtas. 9. en dos, y cada vna deſtas en. 5. Lo qual ſe hara con mucha preciſion y cuydado. Aora ajuſtada la regla enel punto. B. que es el centro, y en cada vna de las. 90. diuiſiones del medio quadrante tiren ſe. 90. lineas. Y guardando eſte quadrãte aſsi diuidido, ſeruira de patron para por el hazer quantas Balleſtillas ſe quiſieren, con qualquiera tamaño de franja. Pues para hazer la Balleſtilla

BALLESTILLA. 29

lleſtilla, tomeſe vna vara de. 4. palmos de largo y del grueſſo de vn dedo, que ſea quadrada, y bien pareja, y acomodandole ſu frãja que por la vara ſuba y vaje con facilidad, y ſiempre en

cruz perfecta, tomeſe conel compaz la mitad de el largo de la franja, y pueſta la vna pũta en el punto. B. hagaſe con la otra, vna ſeñal, enla

H linea

En el aula taller recortan el travesaño que desliza sobre el listón y lleva señalados los ángulos de objetos que están alineados con los extremos del travesaño, siguiendo el modelo de la figura:

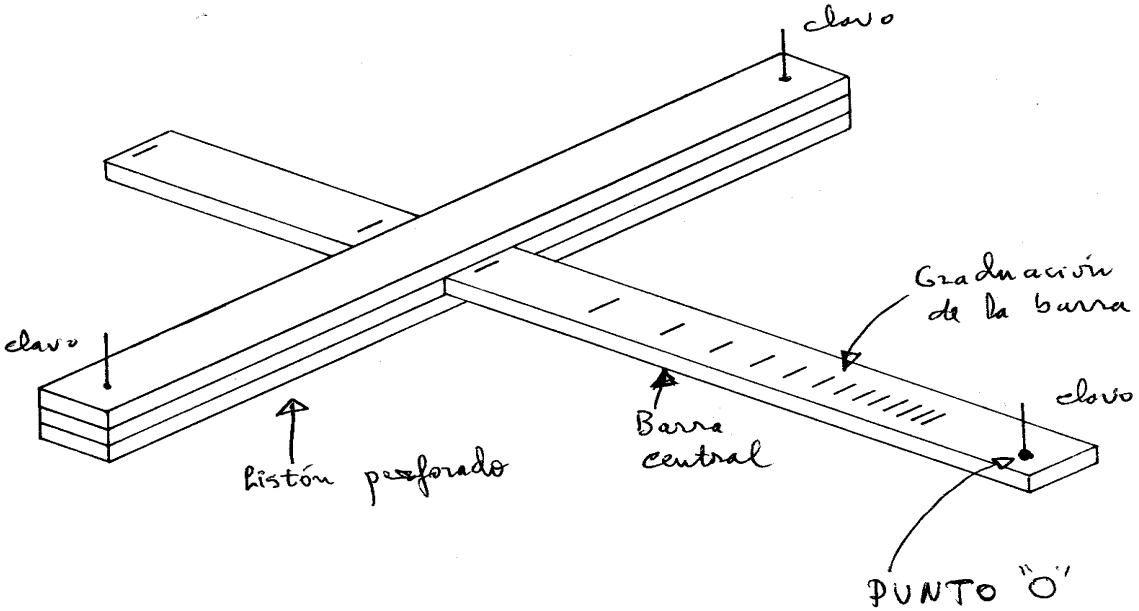


Figura 8: Cada señal de la barra central corresponde a una medida angular, la que forman los tres clavos, con centro en el clavo de la barra central. Deslizando el travesaño se obtienen diferentes ángulos.

Para la graduación del listón, utilizan la descripción de Zamorano que se encuentra en el fragmento anterior. Concretamente realizan en una cartulina el esquema geométrico basado

en una semicircunferencia, como se ve en el texto de Zamorano adjunto, que divide medio cuadrante del segundo cuadrante en 90 partes iguales.

A partir de esa división, colocando el travesaño adecuadamente sobre el centro de la semicircunferencia, y aplicando las instrucciones del texto se gradúa el listón de la ballestilla. Un resultado, si la anchura del travesaño es de 30 cm. Sería el siguiente:

Distancia desde el clavo (en cm)	Ángulo que debe marcarse
12	90°
13,2	85°
14,5	80°
15,9	75°
17,6	70°
19,4	65°
21,5	60°
24	55°
26,9	50°
30,4	45°
34,7	40°
40,2	35°
47,5	30°
57,6	25°
72,7	20°
81,1	18°
91,5	16°

Figura 9

El profesor les presenta una graduación alternativa al texto, consistente en determinar sucesivos triángulos rectángulos en los que la altura se corresponde con la señal a colocar en la escala, calculando los ángulos correspondientes utilizando la definición de tangente de un ángulo. Pero se ha creído importante que utilicen la propuesta por Zamorano para que se den cuenta del hecho de que en épocas pasadas, al no contar con formas rápidas de calcular el valor de las razones trigonométricas, era necesario recurrir a esquemas geométricos que obviaran este procedimiento, como es el propuesto por Zamorano en el *Compendio*.

Posteriormente, en el patio del instituto se pone a prueba la exactitud de la graduación realizada por este procedimiento.

SEXTANTE**:**

Se llega en la elaboración de este instrumento a dos modelos, que son de diseño propio (de los alumnos del TMI dirigidos por el profesor), inspirados en algunos de los que se encuentran al uso, pero con el mérito de que cuentan con una elaboración exclusiva en cuanto a materiales, llegando de un modo casero a medidas angulares que comparadas con un sextante de calidad, producen errores de +/-5 minutos.

Se basan en el siguiente modelo facilitado por el profesor:

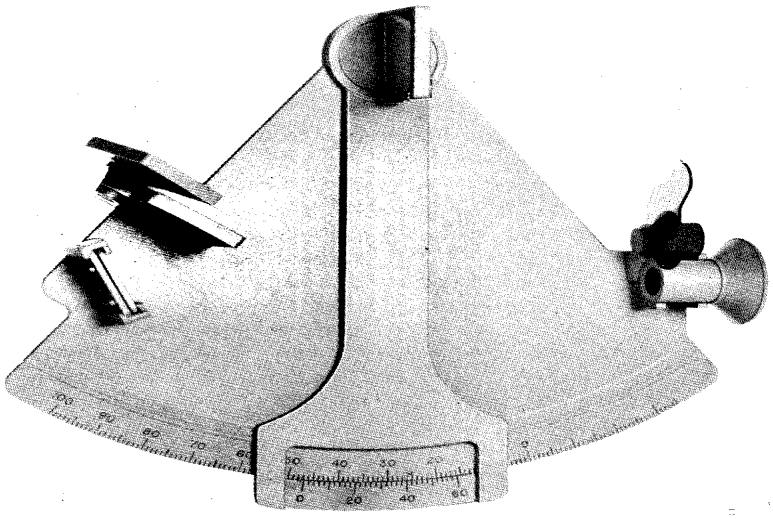


Figura 10

Antes de explicar su funcionamiento, el profesor ha creído conveniente que los alumnos realicen el instrumento. Es decir, van trabajando en la construcción de "algo" que saben que medirá ángulos horizontales y verticales a partir de los dos espejos que contiene el aparato, y basándose en las leyes de la reflexión de la luz.

Esto tiene el fundamento de que para un alumno de 4º ESO es algo compleja la explicación, por lo que un modo de que vayan "haciéndose" al instrumento es su elaboración manual. Así, luego será más fácil su comprensión. La nomenclatura o vocabulario de los elementos del sextante que van incorporando a su lenguaje son los del esquema:

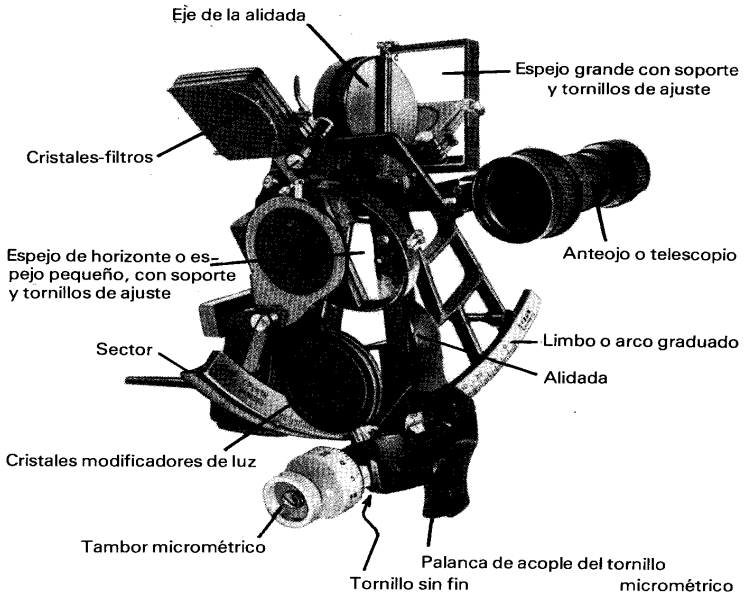


Figura 11

Es importante que cuenten con un esquema que despieza los componentes:

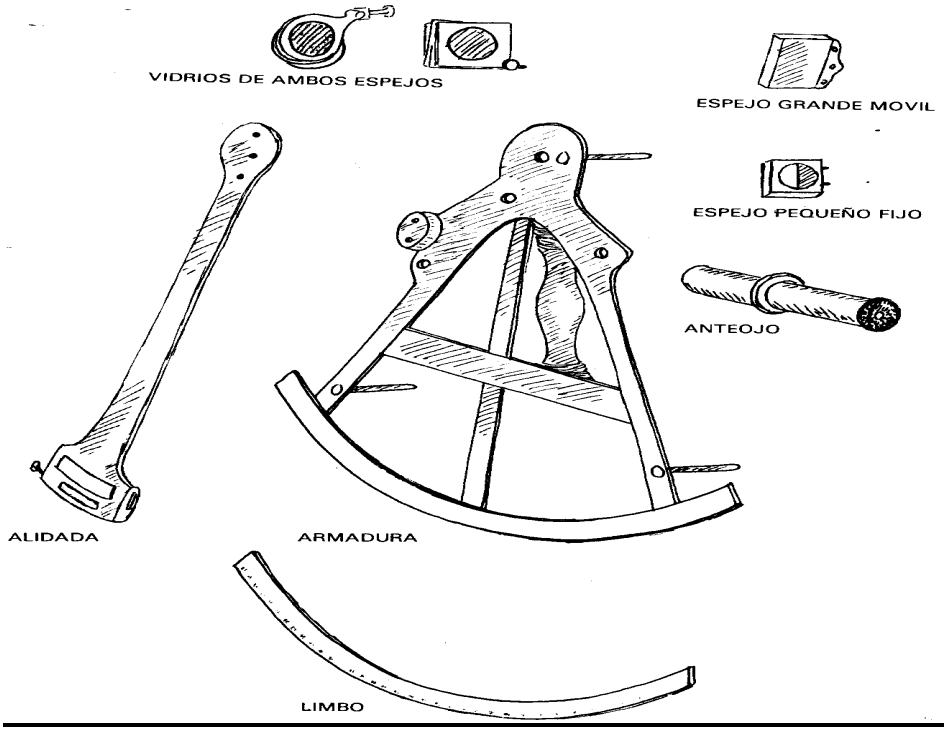


Figura 12

Como dijimos, se realizan dos sextantes: el modelo más sencillo usa una plataforma o armadura de cartón-pluma, los soportes usados para los dos espejos son elementos de bricolaje adaptados a esta función. Para la alidada se usa una regla, el limbo o escala graduada sobre la que se tomarán las medidas angulares se realiza con AUTOCAD. Los espejos se encargan a una tienda de vidrios, y como anteojo se usa también un sencillo elemento de bricolaje.

La otra construcción, mucho más sólida, usa como armadura una placa de metacrilato gruesa, se elabora la alidada en el mismo material, la graduación del limbo se hace con el programa AUTOCAD, y el conjunto el instrumento construido tiene el aspecto de la siguiente imagen:

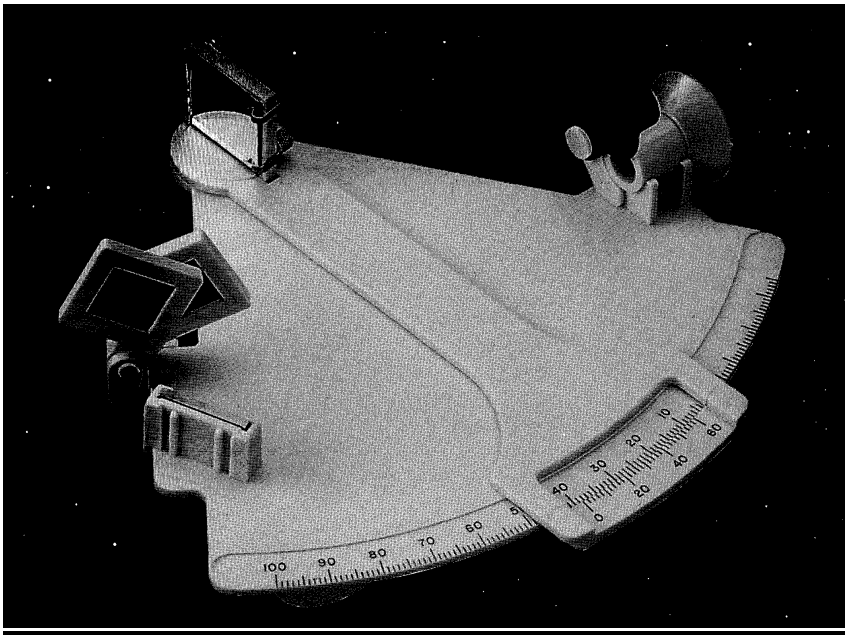


Figura 13

Como hemos dicho, en principio se recomienda la construcción y posteriormente la explicación y comprensión del fundamento por el cual el sextante mide ángulos sobre el horizonte basándose en la reflexión de los rayos de luz que provienen del objeto sobre dos espejos.

Es decir, una vez construido el instrumento es cuando el alumno puede comprender el fundamento de su funcionamiento. Para ello se usan los siguientes esquemas. En el que sigue, se comprende que si los dos espejos del aparato están perfectamente paralelos, el rayo HH tras reflejarse en el espejo móvil y luego en el espejo fijo produce una imagen hh con igual ángulo. Ello significa que la imagen reflejada y la real que se observa por el ocular están a la misma altura.

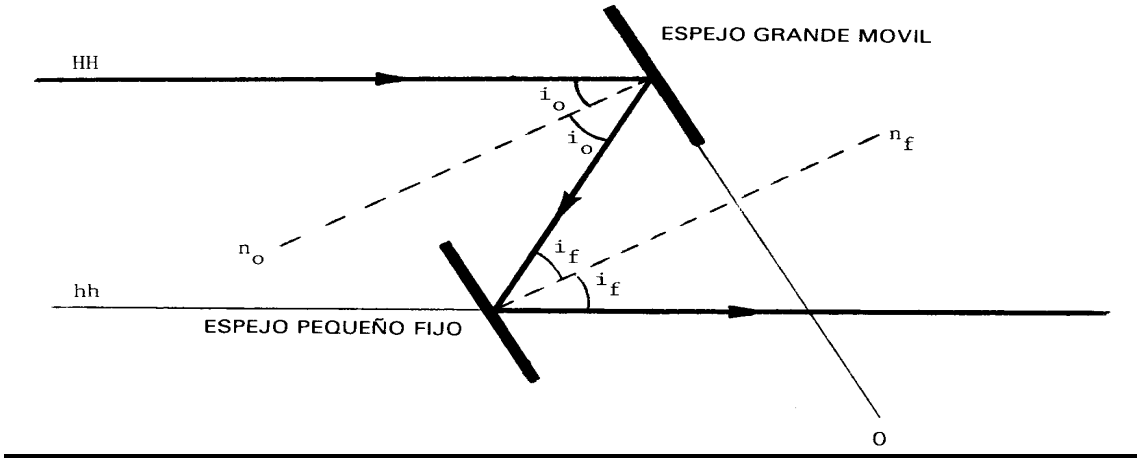


Figura 14

En el siguiente esquema se observa que el ángulo que marca la alidada es la mitad del ángulo de elevación del astro sobre el horizonte.

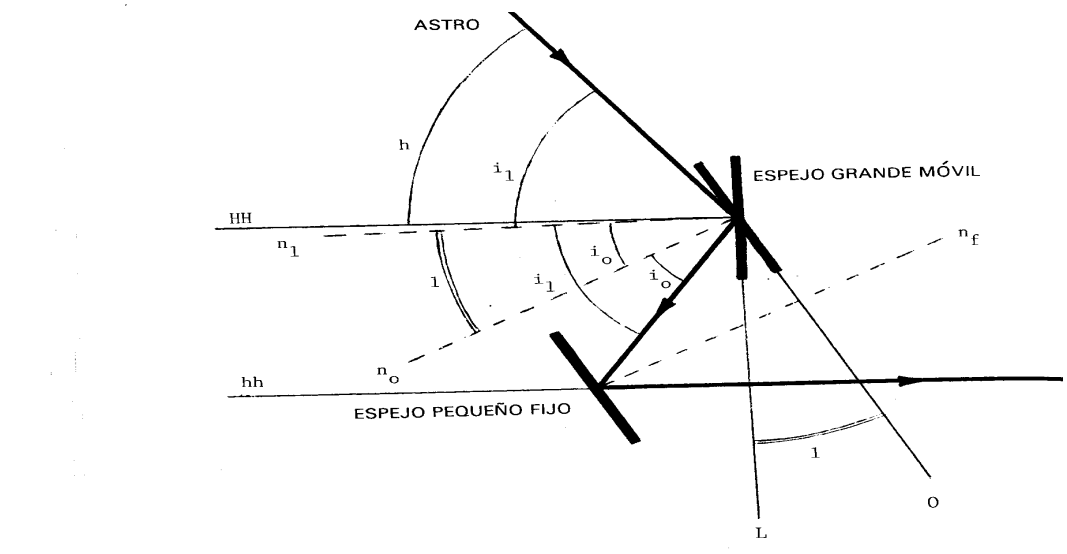


Figura 15

La imagen siguiente, en la que se superponen los rayos de luz y el sextante es más completa:

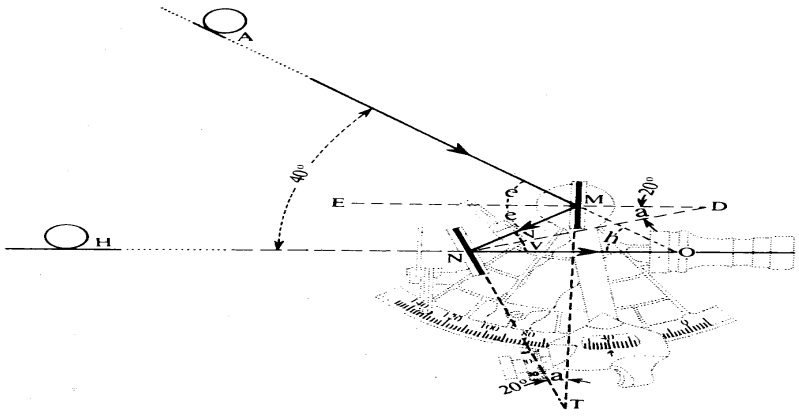


Figura 16

Una vez comprendido el fundamento geométrico se pueden tomar medidas angulares en el patio y comprobar la exactitud de las mismas respecto a las ofrecidas por el cuadrante y la ballestilla. Es fácil legar a la conclusión de que con el sextante se llega a precisiones en el cálculo de la latitud de alrededor de 1/2minuto, y teniendo en cuenta que 1 minuto representa una milla náutica (1.8 Km.), comprenden la importancia que en la náutica tenía el diseño de instrumentos más exactos, lo que potenció y estimuló la aplicación de la trigonometría a la náutica.

Ello motiva la reflexión histórica sobre la época en que se diseñó: siglo XVII, cuando se sientan las leyes de la óptica de Newton..., y el papel que jugó este avance de la física, combinado con las matemáticas, en conseguir una mayor exactitud de la orientación en el mar. Se ofrece a los alumnos un fragmento del libro de Jorge Juan *Compendio Marítimo(*1760), con el que se introduce en España toda la teoría y práctica de los instrumentos de reflexión: el octante, precursor del sextante; lo cual motivó al mismo tiempo la introducción en España de los métodos de la navegación científica que se estaban desarrollando fuera de España, en un momento en que la Ciencia Española ya iba quedándose rezagada. Los alumnos pueden investigar la importancia que la precisión de este instrumento tuvo en la determinación del grado de meridiano terrestre, y en la comprobación de que la tierra es una esfera achatada, campaña promovida y organizada por la Academia de Ciencias de París, y en la que participó Jorge Juan tomando medidas en la zona ecuatorial. A continuación se incluyen unas páginas del texto de Jorge Juan.

exactamente ſobre la linea, que termina el canto ſuperior de la hendidura de la pinola *C*, que paſſa por el centro del Inſtrumento, y por conſiguiente que ſe tome la altura del centro del Sol.

249 Eſta pinola ſe inventò para quando el Sol no eſtuviere muy claro; pero por el motivo arriba dado, conviene ſervirſe de eſſa en todos tiempos. Si ſe quiere usàr de la otra ſin vidrio, es preciſo notàr, que la altura que ſe tomarà, ſerà proximamente la del limbo ſuperior del Sol, cuya diferencia con la del centro es cerca de un quarto de grado ò ceſſa de un quinto, y es preciſo tenèr cuenta con eſſo; pero para evitàr eſſa correccion, ſe eſtila ponèr en el arco *LK* dos diviſiones, una en el frente de èl, y otra en la eſpalda ò canto; eſta, para que ſirva à la pinola, que no tiene vidrio; y la otra à la que le tiene. No obſtante, parece que ſerà mas prudente usàr ſolo de la que tiene el vidrio; pues, como ſe dixo antes, nunca ſe ſabe muy bien, que punto del Sol termina la otra.

250 Sin embargo de ſer eſſe Inſtrumento baſtantemente juſtificado para las obſervaciones maritimas, inventò modernamente el año 1731 *Juan Hadley*, Vice-Preſidente de la Real Sociedàd de Londres, un Octante de reflexion, que lleva ventajas à quantos haſta ahora han ſalido à luz.

Conſiſte en un Octante ù octava parte de un circulo *ABC*, cuyo arco *BC* eſtà dividido en 90 partes ò mèdios grados, cada uno de los quales correſponde à un grado entero en la obſervacion. Sobre ſu centro *M*, rueda una alidada *MH*, que baxa haſta el arco graduado, donde ſeñala el àngulo obſervado. Sobre eſta y proximamente al F.ª 43

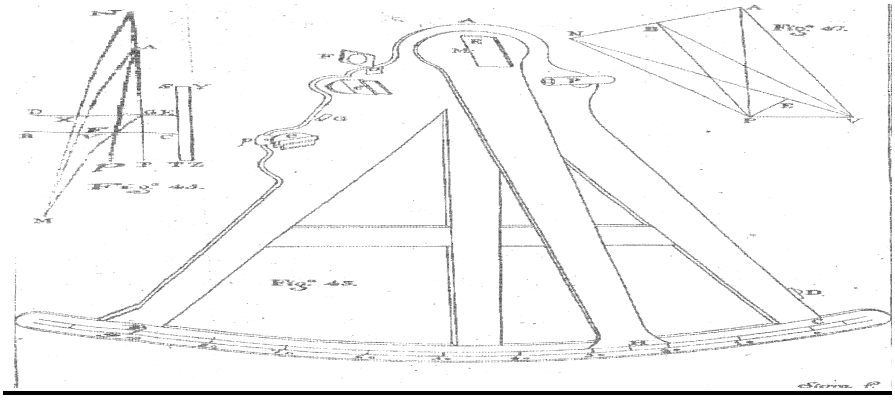


Figura 17

Finalmente, para que mantengan un cierto estímulo y entusiasmo por el trabajo empleado en la construcción del sextante, se les anima con la posibilidad de que durante el curso siguiente, los alumnos que cursen el bachiller científico-tecnológico tendrán la posibilidad de poner en práctica algunas aplicaciones náuticas del sextante, se les ofrece la siguiente representación de un marino disponiéndose a medir la distancia a la costa de su embarcación, conociendo el ángulo que obtiene con el sextante y la altura del faro, que consta en los Libros de Faros que llevan la embarcaciones en su bitácora. Esta experiencia didáctica, llevada a cabo con alumnos del IES Vilamarxant en el curso 2004-2005, se expone en otro comunicado también enviado al CEFIRE de Godella.

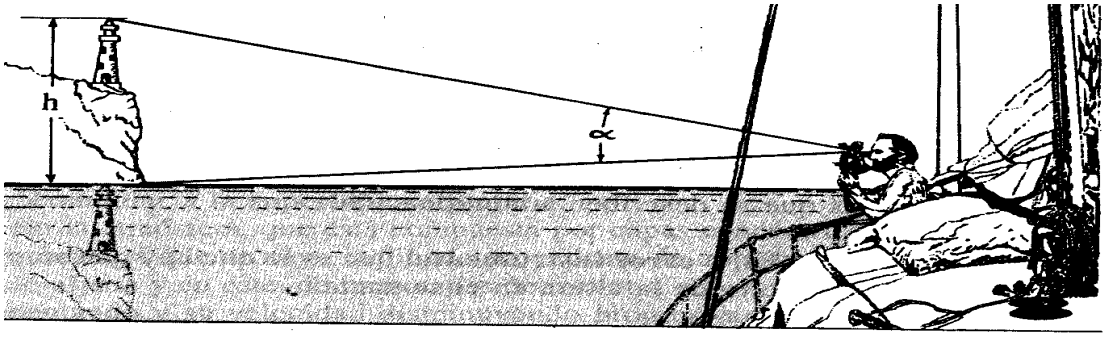


Figura 18

BRÚJULA MARINA O COMPÁS MAGNETICO:

El grupo de TMI de 4º de la ESO tiene el mérito de haber elaborado una brújula marina, de la cual no hay diseño en los manuales didácticos sobre electromagnetismo. En dichos manuales encontramos la clásica experiencia escolar que consiste en imantar una aguja, clavarla en un corcho que se sitúa sobre la superficie del agua de un plato, lo que hace que el corcho se mueva hasta que la aguja marque con mayor o menor aproximación el norte magnético del lugar.

En este caso se ha elaborado una auténtica brújula marina, capaz de señalar el rumbo de un navío. El esquema introductorio facilitado por el profesor para basar el diseño fue el siguiente:

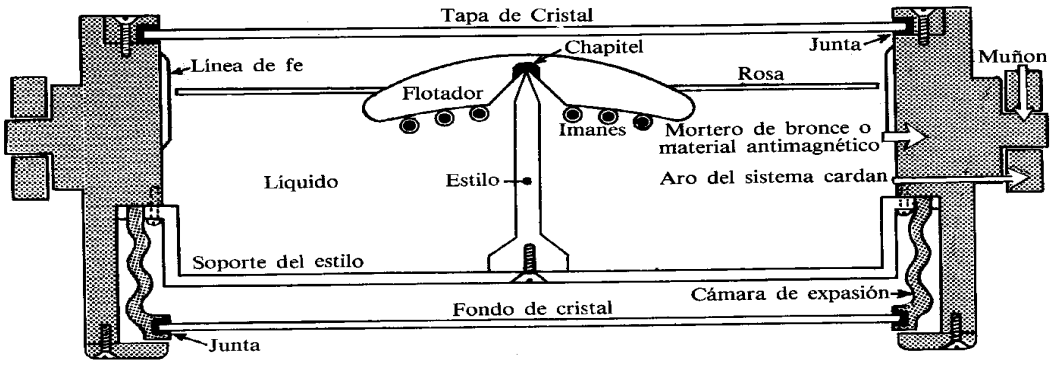


Figura 19

En él se encuentra la nomenclatura y vocabulario básico que el alumno debe ir incorporando a su lenguaje para ser capaz de construir y manejar un compás magnético: Estilo, chapitel, sistema cardán, lugar de los imanes, lugar de la Rosa... Los materiales a los que han recurrido son recipientes de plásticos que se adapten lo más posible a la forma requerida (que se aproximan lo más posible a la forma semiesférica). Bajo una rosa de los vientos han colocado un imán. Es importante que manejen la Rosa que tenemos a continuación, no solo por el disfrute estético que provoca, sino por la conexión entre geometría-trigonometría y náutica que encierra. Han usado la siguiente rosa:

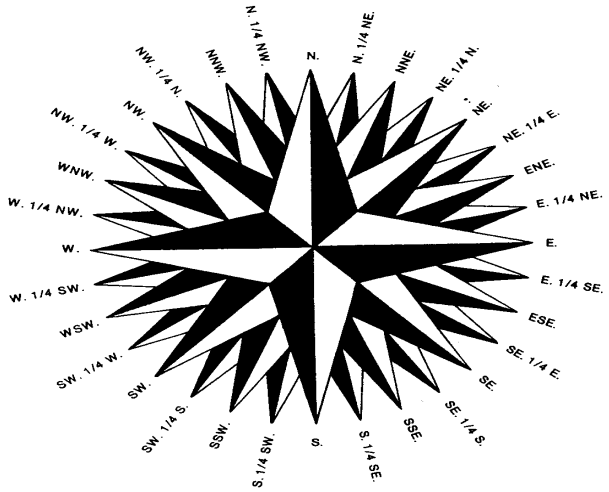
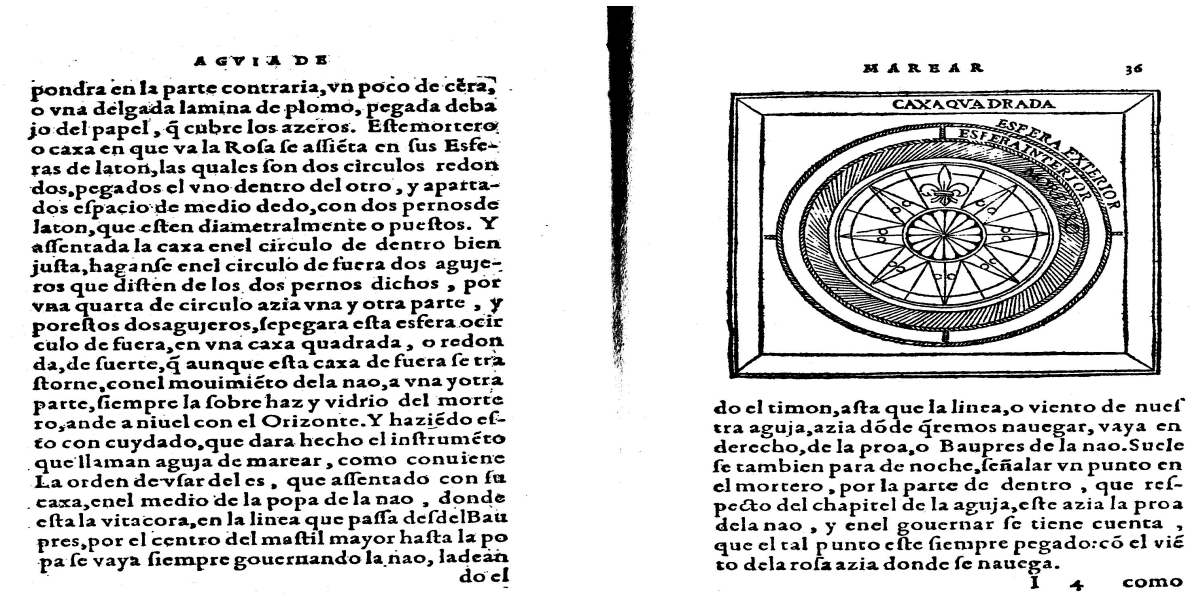


Figura 20

Llegan a comprender durante la construcción la necesidad de que la plataforma sobre la que flota la Rosa debe permanecer lo más estable posible frente a los movimientos del barco, para que se pueda conocer lo más rápido posible el rumbo de la embarcación a pesar del movimiento del mismo. Ello motiva la comprensión del diseño de un rudimentario sistema cardan de suspensión, que se elabora con dos piezas perpendiculares de metal que permiten movimientos transversales del conjunto del compás magnético. Ello se deduce de la lectura del texto siguiente, extraído del *Compendio* de Rodrigo Zamorano, en el capítulo *La aguja de marear* (como era llamada la brújula en la época):



AGVIA DE

pondra en la parte contraria, vn poco de cera, o vna delgada lamina de plomo, pegada deba jo del papel, q̃ cubre los azeros. Eſte mortero o caxa en que va la Roſa ſe aſſiéta en ſus Eſfe- ras de laton, las quales ſon dos circulos redon dos, pegados el vno dentro del otro, y aparta- dos eſpacio de medio dedo, con dos pernos de laton, que eſten diametralmente o pueſtos. Y aſſentada la caxa enel circulo de dentro bien juſta, haganſe enel circulo de fuera dos aguje- ros que diſten de los dos pernos dichos, por vna quarta de circulo azia vna y otra parte, y poreſtos dos agujeros, ſe pegara eſta eſfera o cir culo de fuera, en vna caxa quadrada, o redon da, de fuerte, q̃ aunque eſta caxa de fuera ſe tra ſtorne, conel mouimiẽto dela nao, a vna y otra parte, ſiempre la ſobre haz y vidrio del morte ro, ande a niuel con el Orizonte. Y haziẽdo eſ- to con cuydado, que dara hecho el inſtrumẽto que llaman aguja de marear, como conuiene La orden de vſar del es, que aſſentado con ſu caxa, enel medio de la popa de la nao, donde eſta la vitacora, en la linea que paſſa deſdel Bau pres, por el centro del maſtil mayor haſta la po pa ſe vaya ſiempre gouernando la nao, ladeãn do el

MAREAR 36

CAXA QVADRADA

ESFERA EXTERIOR

ESFERA INTERIOR

do el timon, aſta que la linea, o viento de nueſ tra aguja, azia dõde q̃remos nauegar, vaya en derecho, de la proa, o Baupres de la nao. Suele ſe tambien para de noche, ſeñalar vn punto en el mortero, por la parte de dentro, que reſ- pecto del chapitel de la aguja, eſte azia la proa dela nao, y enel gouernar ſe tiene cuenta, que el tal punto eſte ſiempre pegado: cõ el viẽ to dela roſa azia donde ſe nauega.

I 4 como

TEODOLITO:

Este instrumento hace comprender la necesidad de contar con un medio de medir simultáneamente ángulos horizontales y verticales, integrados en un solo aparato. Aunque no se trata de un instrumento puramente náutico, ya que la necesidad de que el teodolito repose sobre un plano horizontal estable para tomar medidas angulares no lo hace apto a bordo de una embarcación. No obstante, se trata de un instrumento muy ligado a la náutica y navegación de los siglos XVI-XVII, cuando se proyectaban expediciones dedicadas casi exclusivamente a cartografiar regiones desconocidas hasta el momento.

La monarquía hispana del siglo XVI-XVII requirió los servicios de cosmógrafos con formación náutica para que participaran en estas misiones, en las cuales era básico el uso del teodolito. Por ejemplo, el autor de esta comunicación centra su tesis doctoral en el estudio del manuscrito de 1621 de un valenciano, Diego Ramírez de Arellano, que fue incluido en una misión para cartografiar el Estrecho de Magallanes, en un momento en que las posesiones españolas estaban siendo devastadas por la piratería holandesa e inglesa. Se necesitaba una exacta cartografía del paso del Estrecho para controlar el asedio inglés y holandés, y así preservar las riquezas que la monarquía ibérica expoliaba en el continente americano.

Diego Ramírez, con una de las mejores formaciones en matemáticas del momento, que se había formado en el Academia de Matemáticas de Madrid (fundada por Felipe II en 1562 para optimizar los métodos de navegación), describe en su manuscrito con absoluto detalle toda la instrumentación (alguna de su propio diseño) necesaria para resolver problemas de navegación (situación exacta del barco y cálculo del rumbo para desplazarse hasta el lugar deseado), e incluye un teodolito que utiliza en las escalas que se hacen en tierra con fines cartográficos. El teodolito permite medir ángulos verticales y horizontales, por lo que es útil para determinar el perfil de un terreno (topografía y cartografía). En astronomía y náutica es útil para conocer las coordenadas horizontales de un astro: altura del astro sobre el horizonte, y azimut, que es el ángulo que forma el círculo vertical del astro con el meridiano del lugar; y también para conocer el ángulo horario de un astro. A partir de estas mediciones, y con un almanaque náutico es posible determinar las dos coordenadas de un punto sobre la superficie de la Tierra: latitud y longitud.

El manuscrito de Diego Ramírez, que contiene un diario de navegación de la expedición al Estrecho de Magallanes con fines cartográficos, incluye la matemática más avanzada de la época para tratar estos instrumentos y resolver los problemas de náutica y elaboración de mapas. En esta tarea el Teodolito jugó un papel crucial.

Acercar estos hechos a los alumnos permiten que perciban que el desarrollo histórico de los conceptos es algo vivo, y que palpar esos procesos, además de estimulante, incide en un aprendizaje significativo de conceptos matemáticos. Por otro lado, esto hace ver a los alumnos la participación cercana que tuvieron científicos españoles o valencianos en el desarrollo de la Ciencia.

Una vez sentadas estas cuestiones, los alumnos realizan el instrumento siguiendo el modelo siguiente:

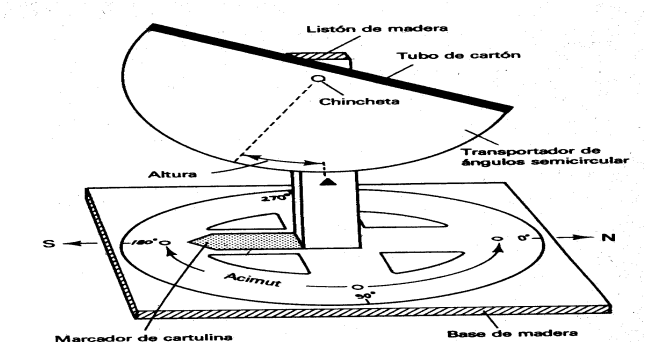


Figura 22

Una vez construido, se realizan mediciones en el patio del instituto. Por ejemplo: las coordenadas horizontales del sol en un instante, y su variación hasta que se produce el mediodía solar (se aplica naturalmente un filtro para la observación). Por la noche puede ser usado para medir coordenadas horizontales de estrellas, y su ángulo horario.

A continuación se incluye el mapa que Diego Ramírez elaboró con los datos registrados en la expedición de cartografía del Estrecho de Magallanes, en cuya elaboración se puede apreciar toda la matemática de la época para asociar coordenadas a cada punto. Se observa la escala de latitudes y de longitudes en los márgenes izquierdo e inferior. Hasta ese momento la navegación por este Estrecho era azarosa, pues no existía una cartografía que permitiera elegir rumbos seguros. Durante todo el siglo XVII las expediciones españolas que pasaban por Estrecho de Magallanes: mercantiles, militares, científicas... se realizaban con este mapa de Diego Ramírez de Arellano.

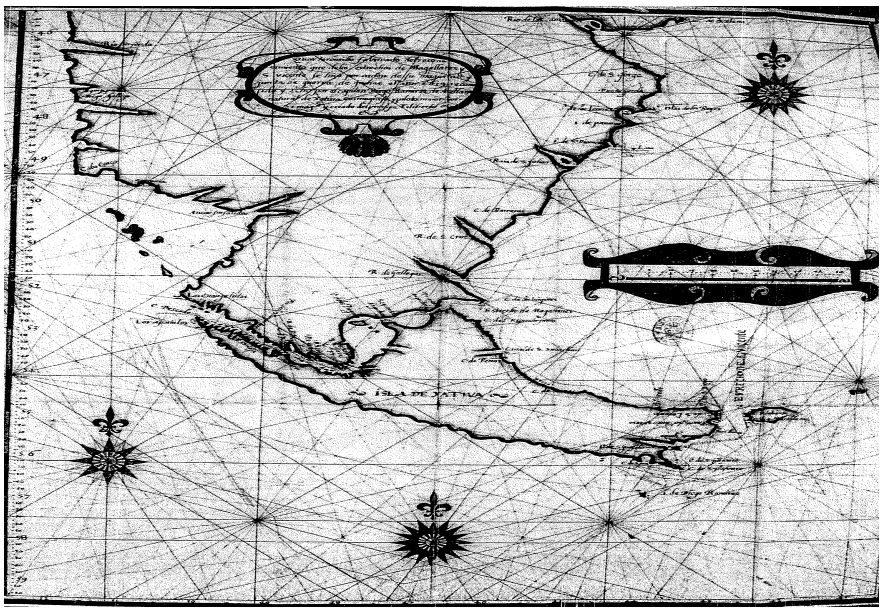


Figura 23: Mapa del Estrecho de Magallanes elaborado por Diego Ramírez de Arellano a principios del siglo XVII

CONCLUSIONES FINALES Y PROPUESTA DE PROYECTO:

Aunque durante este curso 2008-2009, en el cual se ha llevado a cabo la experiencia educativa que se comunica, los alumnos pertenecían al taller de TMI de 4º de ESO, el autor de esta comunicación propone a continuación un proyecto sobre el uso de instrumentos por niveles, incluyendo la posible interdisciplinariedad en cada uno de ellos. Al mismo tiempo se sugiere la utilización de otros instrumentos, que el autor tratará de poner en funcionamiento a partir del curso que viene: nocturlabio, astrolabio, reloj de arena, corredera, sonda..., procedentes del ámbito de la náutica y conectados con conceptos matemáticos de la ESO y Bachiller.

Por otro lado, seria necesario y conveniente discutir, y proponer o sugerir, el modo en que se podría llevar a cabo este proyecto, en el caso de que un profesor o departamento estuviera interesado en ello. Está claro que en un TMI de 4º ESO, dada la libertad del profesor para proponer y dirigir temas para que los alumnos realicen su trabajo de investigación, es relativamente fácil llevar a cabo la experiencia comunicada, pero a costa de concentrar en un solo nivel: 4º ESO, todos los instrumentos, habiendo algunos, como el sextante, que requieren conocimientos algo más elevados (reflexión e la luz) para su completa comprensión.

Pero si no es en el desarrollo de un TMI, ¿cómo se podría llevar a cabo este proyecto? El autor cree que las sesiones destinadas en cada curso -como se propone en la siguiente tabla-, no serían más de tres o cuatro. Serían en el aula-taller de Tecnología, y una o dos para la puesta en práctica de los instrumentos elaborados.

De modo voluntario, entre el alumnado, se podría proponer la realización de estos instrumentos, con un incentivo, como puede ser una valoración positiva a tener en cuenta en la nota final. Otro incentivo sería, como el mismo autor puso en práctica en otra experiencia educativa –que se comunica en otro texto, y se comentó anteriormente- la puesta en práctica en un velero de las aplicaciones náuticas. Esto supone un buen estímulo para el alumno, ya que siempre es atractivo el hecho de emplear en el mar los instrumentos que han salido de sus propias manos. De este modo se cerraría el ciclo de un proceso que persigue un aprendizaje significativo de la geometría y la trigonometría, en el sentido de la

geometría intuitiva, manipulativa y sensorial de la que habla Emma Castelnuovo, que conviene experimentar antes de adentrarse en los vericuetos de la geometría abstracta.

A continuación se incluye la tabla con los contenidos proyectados que abarcan la ESO y el Bachiller Científico-tecnológico. (Se advierte que aunque el gnomon no se ha tratado en esta comunicación, y no es un instrumento puramente náutico, conviene comenzar por él, ya que ofrece intuitivamente la base del resto de instrumentos. No obstante el autor de esta comunicación también ha presentado otra en la cual se expone todo el rendimiento por niveles de este instrumento. En esta tabla podemos apreciar también que la interdisciplinariedad que entraña la náutica es difícilmente igualada por otra materia. Ello es así porque la náutica presentó problemas históricos muy urgentes para los hombres y los pueblos (problemas que podemos catalogar como de vida o muerte) que requerían soluciones de diferentes ámbitos de la ciencia: meteorología, astronomía, trigonometría y matemática en general; e incluso abrió la puerta de diferentes ramas del saber científico: magnetismo, electromagnetismo, cartografía...)

Nivel	**Instrumento**	**Contenidos de matemáticas del currículum usados en cada nivel**	**Contenidos de otras asignaturas (interdisciplinariedad)**
1ºESO	Gnomon I: ángulos Rosa de los vientos	-Concepto de ángulo y su medida. -Ángulos en la circunferencia. -Noción de dependencia de magnitudes o variables: la inclinación de los rayos de sol o la longitud de la sombra en función del tiempo.	-Experiencia de Eratóstenes, Representación de la Tierra, coordenadas geográficas, la Ciencia en el mundo griego (Ciencias Sociales). -Movimiento del sol, relación de las estaciones con la altura del sol sobre el horizonte (Ciencias naturales). -Uso de la madera y de las diferentes herramientas para trabajarla (Tecnología) -Orientación en el espacio(Educación física)
2ºESO	Gnomon II: semejanza Rosa de los vientos	-Proporcionalidad Geométrica. -Teorema de Tales, Semejanza. -Escalas e interpretación de mapas. -Medida del tiempo y de los ángulos. -Triángulos rectángulos.	-Consecuencias de la inclinación del eje de la Tierra (Ciencias Naturales) -Instrumentos náuticos y astronómicos desarrollados por el Islam durante la Edad Media (Ciencias Sociales). -Orientación para realizar un itinerario entre dos puntos de un mapa (Educación física)

3ºESO	Cuadrante, ballestilla I	-Movimientos: traslación, giro, simetría. -Semejanza, Teorema de Tales y de Pitágoras. -Variación de una variable en función de otra (longitud de la sombra proyectada en función del tiempo): máximo y mínimo de una función, intervalos de crecimiento y decrecimiento. -Geometría de la esfera: latitud y longitud.	-Variación de la altura máxima del sol durante el año: estaciones (Ciencias Naturales-Física y Química). -Separación del polo geográfico y magnético (Física y Química). -Elaboración de un sector circular (Plástica).
4ºESO	Ballestilla II Teodolito	-Semejanza, -Ángulos horizontales y verticales -Ángulos mayores que 90º. -Tangente de un ángulo. -Distinción de sistemas de coordenadas: cartesianas y astronómicas	-Navegación en la era del descubrimiento de América (Historia). -Evolución de la cartografía en el siglo XVI (Historia). -Construcción de un mecanismo que gire de modo adecuado sobre una plataforma (Tecnología)
1ºBAC	Compás magnético	-Trigonometría: ángulos mayores que 90º. -Geometría Analítica: representaciones de la circunferencia y su giro respecto a un centro. -Geometría de la Esfera. -Diferentes Sistemas de referencia para medir distintos sistemas de coordenadas.	-Campo electromagnético, Magnetismo, Variación magnética (Física) -Invenciones procedentes de la civilización Oriental, Navegación en la Edad Media (Historia). -Mecanismos de estabilidad, el sistema Cardan (Tecnología) -Ciencias para el Mundo Contemporáneo.
2ºBAC	Sextante	-Geometría: Paralelismo de rectas. -Geometría de la Esfera: triangulo de posición.	-Leyes de la reflexión de la luz (Física). -Evolución de la Ciencia (Historia de España). -Uso del metacrilato(Tecno)

L'HERÈNCIA D'EULER: COORDENADES CARTESIANES I TRAÇAT DE CORBES AL VOLUM II DE LA *INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM*

Mª Teresa Navarro
IES Veles e Vents, Torrent
Luis Puig
Universitat de València Estudi General

0. INTRODUCCIÓ.

El que presentem ací és part d'un treball en el qual pretenem examinar de quina manera es fa la representació gràfica de funcions en alguns textos històrics corresponents al moment en què la forma actual de representar les funcions en el pla cartesià s'està constituint, i al moment en que s'incorpora com a matèria que cal ensenyar en els llibres dedicats a l'ensenyament de les matemàtiques.

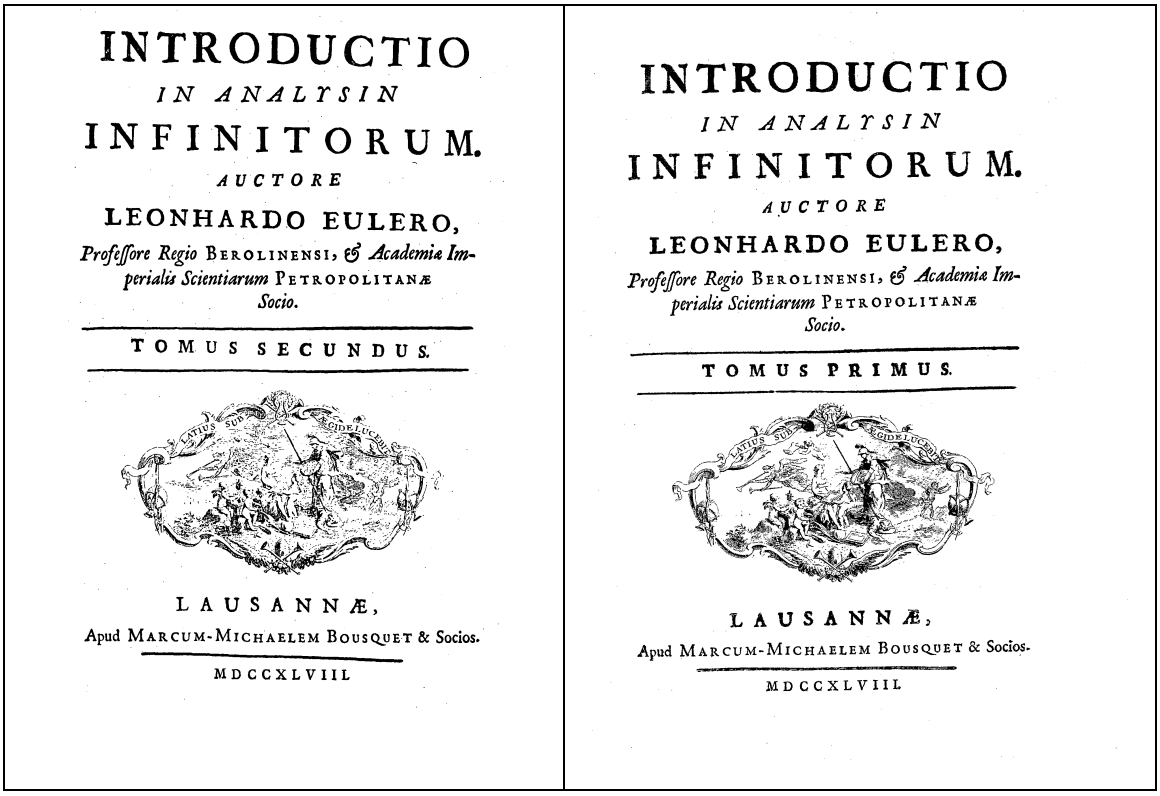
L'aplicació de l'àlgebra a la geometria i la constitució de la geometria analítica és un moment fonamental, els protagonistes principals són Descartes i Fermat, però també ho és l'elaboració del concepte de funció i el començament del càlcul infinitesimal.

En el llibre d'Euler *Introductio in Analysin Infinitorum* ens trobem desenvolupat un concepte de funció com a expressió analítica, i una classificació d'aquestes funcions, que es reflecteix en una classificació de les corbes, classificació feta considerant si la corba està expressada mitjançant una o més expressions analítiques, i pel tipus de funció. La classificació de les corbes a partir de les funcions que les expressen és possible gràcies a una justificació precisa de la representació d'aquestes funcions com corbes. Euler justifica que aquesta representació es pot fer gràcies a que la natura de les quantitats variables i la de la recta, en l'aspecte pertinent per a la relació funcional, és la mateixa: tant una quantitat variable com una recta són magnituds.

En aquest text examinem com Euler organitza la representació de funcions traçant únicament un eix, el d'abscisses, sobre el qual s'eleva el que ell anomena les "aplicades", comparant aquesta representació amb la representació actual mitjançant els dos eixos de coordenades. Examinem també alguns conceptes eulerians relacionats amb la representació gràfica de funcions, en particular els d'abscissa, aplicada, funció, corba contínua, corba discontínua i equació general d'una corba determinada (en concret, equació general de la recta).

1. LA *INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM*.

Es publica en 1748 en dos volums.



INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSI, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ Socio.
TOMUS SECUNDUS.
LAUSANNÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLVIII.

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSI, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ Socio.
TOMUS PRIMUS.
LAUSANNÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLVIII.

Euler escriu la *Introductio* amb una finalitat pedagògica, la concep com un llibre de text, que inclou des d'allò més elemental al més sofisticat, necessari per a la construcció posterior del càlcul diferencial i integral.

En el prefaci de la *Introductio*, Euler fa un resum bastant detallat del contingut dels dos libres que la formen. En el primer volum exposa la teoria de funcions; per a la qual cosa desenvolupa la teoria de sèries infinites i d'altres processos infinits des d'un punt de vista algebraic, encara que sense el rigor modern. En el segon desenvolupa una teoria general de corbes basada en el concepte de funció utilitzat en el primer volum. Per aquest motiu cal que analitzem el concepte de funció del primer volum.

> He dividido esta obra en dos libros, el primero de los cuales comprende las que atañen al mero análisis; en cuanto al segundo, he dado en él explicación de las cuestiones de geometría que es necesario conocer, ya que el análisis de infinitos también se suele enseñar de modo que se haga ver al mismo tiempo su aplicación a la geometría (Euler, 2000, p. 4).[10]

2. QUANTITATS CONSTANTS I VARIABLES

El primer capítol del primer volum "De les funcions en general" està dividit en 26 articles.

En els dos primers, Euler defineix les quantitats constants i variables com a nombres de qualsevol gènere. Les primeres han de conservar sempre el mateix valor constant i les segones abasten tots els valors.

---

[10] Hem conservat la traducció al castellà de José Luis Arantegi Tamayo d'aquest llibre d'Euler. En el cas de la resta de cites d'Euler, fetes a partir de textos originals, la traducció al català és nostra.

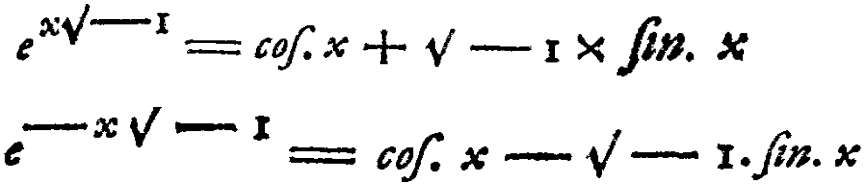
Per designar-les utilitza les lletres (tal com establí Descartes en *La Géométrie*) *a*, *b*, *c*…, per a les constants i *z*, *y*, *x*…, per a les variables, l'ús de les quals ja era habitual al segle XVIII.

> *1. Es **cantidad constante** la cantidad determinada que conserva siempre el mismo valor.*
>
> Son cantidades tales los números de cualquier género, con que conserven siempre el mismo valor constante que en su momento obtuvieron: y si conviene indicar tales cantidades constantes mediante caracteres, se les asigna las letras iniciales del alfabeto *a*, *b*, *c*, &c. Cierto es que en el análisis común, donde tantas cantidades determinadas se consideran, estas letras primeras del alfabeto suelen denotar cantidades conocidas, y las posteriores, en cambio, incógnitas; esta distinción, empero, no es de esperar en tal grado en el análisis superior, por cuanto aquí se atiende principalmente a aquella otra distinción que establece a unas como constantes y a otras como variables.
>
> *2. Es **cantidad variable** la cantidad indeterminada o universal que comprende absolutamente todo valor determinado.*
>
> Así, como todo valor determinado puede expresarse en número, una cantidad variable abarca absolutamente todos los números de cualquier género. Fácil es ver que de igual modo que las ideas de género y especie se forman a partir de las ideas de individuos, así la cantidad variable es el género en que quedan comprendidas todas las cantidades determinadas. Tales cantidades variables se suelen representar mediante las últimas letras del alfabeto, z, *y*, *x*, &c. (Euler, 2000, pp.13-14).

Al tercer, aclareix a què es refereix quan parla de nombres de qualsevol gènere:

- afirmatius (referint-se a qualsevol nombre positiu, natural o no),
- negatius (enters o no),
- enters,
- racionals,
- irracionals,
- transcendents,
- fins i tot el zero (la xifra, Euler utilitza la paraula àrab del zero).
- i els imaginaris.

Encara que al segle XVIII no estava clar el concepte de nombre imaginari, Euler reconeix la seua importància en la teoria de funcions. En cas contrari, no podria entre altres coses, establir la relació fonamental que existeix entre les funcions analítiques elementals sinz, cosz i e^z, coneguda com la Fórmula d'Euler, que apareix de forma generalitzada en l'article 183 del primer volum:



> *3. Queda determinada una cantidad variable cuando se le atribuye un valor cualquiera.*
>
> Una cantidad variable puede así quedar determinada de innumerables modos, por cuanto admite ser substituida en su lugar por todo número. Y no quedaría agotado el significado de la cantidad variable si no hubiere sido substituida por todos los valores determinados. Así es que la cantidad variable comprende absolutamente todo número, tanto afirmativo como negativo, entero como fraccionario, racional como irracional o trascendente. Sin que queden excluidos tampoco del significado de la cantidad variable la cifra y los números imaginarios (Euler, 2000, p. 14).

3. CONCEPTE DE FUNCIÓ AL PRIMER VOLUM

> *4. Es función de una cantidad variable cualquier expresión analítica compuesta comoquiera que sea por esa cantidad y números o cantidades constantes.*
>
> Será pues función de z toda expresión analítica en que sean constantes todas las cantidades que componen su expresión, salvo la misma z; así, $a + 3z$; $az - 4zz$; $az + b\sqrt{(aa - zz)}$; cz; &c. son funciones de z (Euler, 2000, pp. 15-16).

Als articles precedents Euler defineix quantitat variable i quantitat constant per poder donar aquesta definició de funció, però no explica que és això d'una "expressió analítica" i als exemples que ens presenta tampoc aclareix el seu significat. Aquest és el motiu pel que Boyer (2007, p. 558) afirma que en l'actualitat aquesta definició és inacceptable.

Malgrat tot a partir de la *Introductio* la idea de funció passà a ser la idea fonamental de l'anàlisi.

Però la idea de funció no era nova, s'havia enunciat ja d'una manera vaga en la latitud de les formes medieval (Oresme), i estava implícita en la geometria analítica de Descartes i sobretot de Fermat, així com en el càlcul de Newton i Leibniz.

Youschkevitch diu que la primera definició explícita d'una funció com a expressió analítica apareix en un article de J. Bernoulli publicat en 1718 en les memòries de l'Académie Royale des sciences de Paris:

> Definició. S'anomena funció d'una magnitud variable a una quantitat composta d'alguna manera per aquesta magnitud variable i constants (Youschkevitch, 1976, pp. 30-35).

Segons Youschkevitch en la seua definició de funció, Euler segueix, una vegada més, el seu mestre J. Bernoulli, reemplaçant tanmateix la paraula "quantitat" per "expressió analítica", ara bé encara que Youschkevitch només presta atenció al canvi de quantitat per expressió analítica, hi ha altre canvi que també mereix una atenció especial, el canvi en la definició de "magnitud" per "quantitat".

Al primer volum de la *Introductio*, que segons el propi Euler només conté les qüestions que concerneixen al mer anàlisi, sempre utilitza el terme quantitat, *quantitas,* ja que l'anàlisi dels infinits versa sobre quantitats variables i les seues funcions. En canvi reserva el terme magnitud, *magnitudo*, per al segon volum, en què aplica l'àlgebra a la geometria.

Per representar quantitats veurem que Euler parla de magnituds en el sentit que magnitud té en els *Elements* d'Euclides, en els quals magnitud s'oposa a número: els números estan compostos d'unitats indivisibles, i les magnituds són divisibles i poden ser commensurables o incommensurables entre si.

4. CLASSIFICACIÓ DE FUNCIONS

Euler presenta dues classificacions de funcions:

- Segons les operacions que componen l'expressió analítica.

<table>
<tr><td rowspan="4">Funcions de z</td><td rowspan="3">Algebraiques</td><td rowspan="2">Racionals</td><td>Enteres</td><td>$a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+f\overset{5}{z}+\&c$</td></tr>
<tr><td>Fraccionàries</td><td>$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+f\overset{5}{z}+\&c.}{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+\zeta z^5+\&c}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Irracionals</td><td>Explícites</td><td>$a+\sqrt{\ }(aa-zz)$</td></tr>
<tr><td>Implícites</td><td>$Z^7=azZ^2-bz^5$</td></tr>
<tr><td>Transcendents</td><td colspan="3">No proposa cap exemple concret de funció transcendent, però insisteix en què només ho serà si les operacions transcendents afecten a la quantitat variable. Per tant les funcions del tipus: $c + z$, cz^2, $4z^c$; on c és la circumferència de radi 1 (2π), així com les potències de z en què l'exponent és irracional, com $z^{\sqrt{2}}$,són funcions algebraiques.</td></tr>
</table>

- Segons el nombre de valors determinats que obté la funció per a cadascun dels valors determinats de *z*.

Divideix les funcions en uniformes (que obtenen un únic valor determinat si s'atribueix un valor determinat qualsevol a la quantitat variable *z*) i multiformes (que presenten diversos valors determinats per a qualsevol valor determinat que substituïsca en el seu lloc a la variable *z*).

Són uniformes les funcions algebraiques racionals, les irracionals són totes multiformes i surten de la resolució d'equacions de grau dos (biformes), tres (triformes), quatre (quadriformes), etc., els coeficients de les quals són alhora funcions uniformes de z, que designa amb les lletres P, Q, R, S, T, …

Les funcions transcendents poden ser uniformes i multiformes i fins i tot infinitiformes com l'arc de cercle corresponent al sinus de z.

En la forma general de les diferents funcions multiformes, Euler fa referència a les relacions de Cardano-Viète.

A més a més, no només li interessa saber quants valors diferents s'obtenen per a cada valor determinat de z, sinó saber quants en poden ser reals i quants imaginaris. Ja que açò serà molt important a l'hora d'estudiar la natura de la corba que descriu la funció.

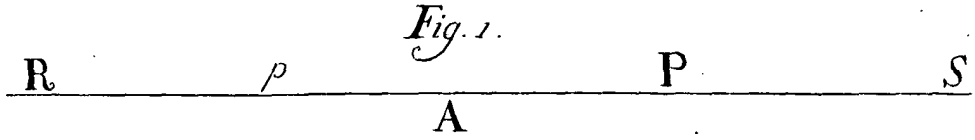
Funció *Z* de *z*	Uniforme	P, Q, R, S,…	
	Multiforme	Biforme	$\sqrt{(2z + zz)}$
			$Z^2 - PZ + Q = 0$ o $Z = \frac{1}{2}P \pm \sqrt{(\frac{1}{4}P^2 - Q)}$
		Triforme	$Z^3 - PZ^2 + QZ - R = 0$
		Quadriforme	$Z^4 - PZ^3 + QZ^2 - RZ + S = 0$
		Multiforme en general	$Z^n - PZ^{n-1} + QZ^{n-2} - RZ^{n-3} + SZ^{n-4} - \&c. = 0$
	Infinitiforme	Arc sinus z	

5. COORDENADES AL SEGON VOLUM

Al primer capítol del volum II, Euler introdueix les coordenades amb la finalitat d'utilitzar-les per associar a cada funció d'*x*, definida al primer volum, una línia recta o corba que dependrà de la natura de la funció.

> 6. […]. Així, cada funció d'*x*, referida d'aquesta manera a la geometria, donarà una línia recta o corba, la natura de la qual dependrà de la funció *y* (Euler, 1797, p. 3).

De la mateixa manera que al primer llibre, Euler comença en el primer article per la quantitat variable. Per representar la quantitat variable recorre a les magnituds, de forma que cada magnitud determinada representa un valor determinat comprés en la quantitat variable.



> 1. Com una quantitat variable és una quantitat que es considera en general, que conté tots els valors determinats, una recta indefinida, com *RS*, serà molt adequada per representar en geometria una quantitat d'aquesta natura. En efecte, ja que es pot prendre sobre una recta indefinida, una part qualsevol, que tinga un valor determinat, aquesta línia presenta a l'esperit la mateixa idea de magnitud, que la quantitat variable. Per tant, en primer lloc cal fixar sobre una línia indefinida *RS* un punt *A*, que serà considerat l'origen de les magnituds determinades, que se'n separaran; així una porció determinada *AP* representarà un valor determinat comprés en la quantitat variable (Euler, 1797, p. 1).

Les magnituds es representen mitjançant segments, coherentment amb la seua natura en els *Elements* d'Euclides. La funció *y* és funció d'*x*, que és una magnitud. Una recta "indefinida" *RS* representa de forma adequada una quantitat "variable" per què conté una infinitat de segments que es poden "separar d'ella", de la mateixa manera que la quantitat variable conté tots els valors determinats. Així, els segments separats de la recta representen adequadament valors determinats. Per què la correspondència siga biunívoca

cal fixar un punt, el punt *A*,i considerar només els segments que tenen aquest punt com un dels seus extrems.

Per a nomenar els punts situats a la dreta utilitza la lletra P (en majúscules) en canvi per a nomenar els de la seua esquerra ho fa en minúscules.

Utilitza també la lletra P en majúscules per nomenar un punt qualsevol de la recta.

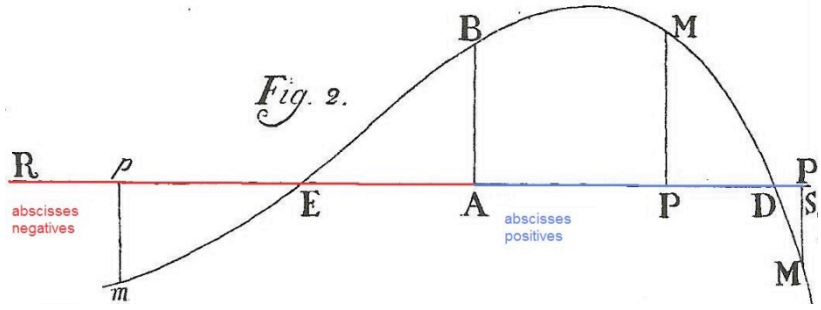
6. DEFINICIÓ D'ABSCISSA

Defineix abscissa com un interval de la recta *RS* que representa un valor determinat de la quantitat variable. Per tant les abscisses representen els valors de la variable.

Cal subratllar que l'abscissa no és el punt en l'eix d'abscisses, ni la longitud de l'interval, sinó que l'abscissa és l'interval, el segment *AP*.

Fixa a la dreta de l'origen els valors reals positius de la variable *x*, a l'esquerra els negatius i el valor zero en l'origen.

> 2. Siga doncs *x* una quantitat variable, representada per la recta indefinida *RS*, és clar que tots els valors determinats d'*x*, sempre que siguen reals, poden ser expressats per porcions preses sobre la línia *RS*. Per exemple, si el punto *P* cau sobre el punt *A*, l'interval *AP*, esdevenint nul, representarà el valor de *x* = 0; però com més s'allunye el punt *P* del punt *A*, més gran es farà el valor determinat d'*x* representat per l'interval *AP*.
>
> S'anomena a aquestos intervals *AP*, ABSCISSES.
>
> Així, les abscisses representen els valors determinats de la variable *x* (Euler, 1797, pp. 1-2).



7. FUNCIÓ – CORBA – EQUACIÓ

Al volum I defineix funció d'una quantitat variable, *z*, mentre que al II, explica com representar geomètricament una funció qualsevol d'*x* (real) que anomena *y*. Per a cada valor determinat d'*x*, la funció *y* prendrà un valor determinat que representarà elevant una perpendicular la longitud de la qual és igual al valor de *y* sobre la recta indefinida, els valors positius, per sobre de la recta; i els negatius, per sota.

Així per representar les abscisses fa servir una única recta que anomena EIX D'ABSCISSES, en canvi per representar els valors de la funció no utilitza cap eix, eleva una perpendicular per a cada valor de la funció que es vol representar. I tal com ocorre amb les abscisses aquest valor de la funció està representat per una magnitud, que en aquest cas és el segment perpendicular *PM*, al qual anomena APLICADA.

> 6. Doncs si, per a cada valor donat d'*x*, es determina d'aquesta manera els valors corresponents de *y*; s'elevarà en cada punt *P* de la recta *RS* perpendiculars *PM*, que expressen els valors de la funció *y*: un dels extrems *P* caurà sobre la recta *RS*, i l'altre *M* per sobre de *RS*, si els valors de *y* són positius; o per sota, si són negatius; o sobre la pròpia línia *RS*, si són iguals a zero; com ocorre amb els punts *D* i *E*. Els extrems *M* de cadascuna de les perpendiculars representaran una certa línia recta o corba, que per

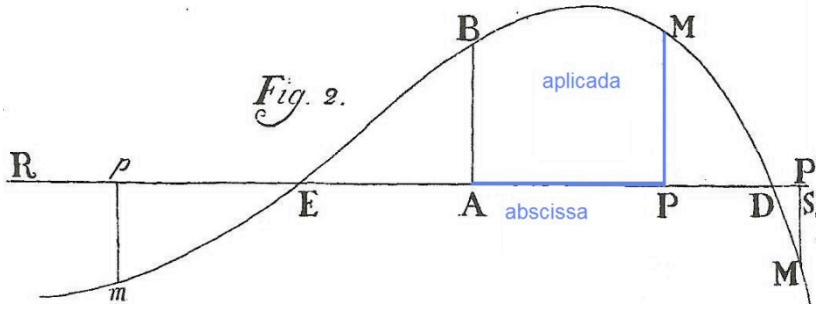
tant es trobarà determinada per la funció *y*. Així cada funció d'*x* representada d'aquesta manera en la geometria, donarà una línia recta o corba, la natura de la qual dependrà de la funció.

11. […] I s'ha donat el nom d'APLICADES a les perpendiculars *PM*, elevades des dels extrems de les abscisses a la corba.

Les aplicades s'anomenen en aquest cas *perpendiculars* o *ortogonals*, per què formen amb l'eix un angle recte; i com les aplicades *PM* poden igualment formar amb l'eix un angle oblic, se les anomenarà aleshores *aplicades obliqües* (Euler, 1797, pp. 3-5).

D'aquesta forma associa funció amb corba. A partir de la funció *y* (de la seua expressió analítica) es determinen els seus "infinits valors" en prendre *x* tots els valors determinats continguts en la quantitat variable. Podríem dir que el que fa Euler és construir una taula "infinita" de valors i unir els infinits extrems de les aplicades obtenint així la gràfica (corba) de la funció. Però, no hi ha punts en el que fa Euler, són els extrems de les aplicades els que tracen la corba de la funció.

Aquesta manera de traçar la corba ens permet reconèixer la funció de la qual esdevé, però a més a més una vegada traçada podem comprovar que cada punt de la corba queda determinat per la funció. Només cal seguir el procés invers: traçar la perpendicular, que representa el valor de la funció, des de cadascun dels seus punts a la recta *RS* obtenint així els intervals que expressen els valors de l'abscissa. Amb la qual cosa no hi haurà cap punt de la corba que no estiga determinat d'aquesta manera per la funció.



14. Ja que *y* és una funció d'*x*, es dedueix que *y* serà igual a una funció explícita d'*x*, o que es tindrà una equació entre *x* i *y*, que determinarà el valor de *y* en *x*. En ambdós casos es diu que aquesta equació expressa la natura de la corba. Per tant la natura d'una línia corba es donada per una equació entre dues variables *x* i *y*, en què la primera *x* representa les abscisses comptades en l'eix des del seu origen *A*, i la segona les aplicades perpendiculars a l'eix. Aquestes abscisses i aplicades considerades conjuntament s'anomenen COORDENADES *perpendiculars*.

Així es diu que la natura d'una línia s'expressa per una equació entre les coordenades perpendiculars, quan hi ha entre *x* i *y* una equació, que expressa la natura de la funció *y* (Euler, 1797, p. 6).

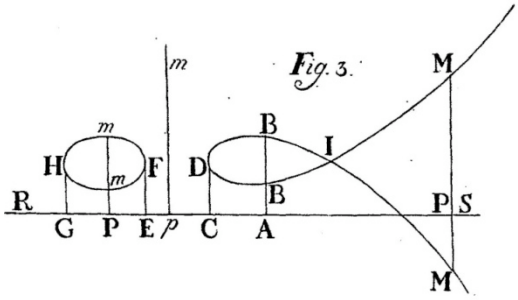
8. CORBA CONTINUA. CORBA DISCONTINUA

Després de l'associació entre funció, corba i equació, classifica les corbes en continues i discontinues o mixtes o irregulars.

9. D'aquesta idea de línies corbes resulta naturalment la seua divisió en continues i en discontinues o mixtes. La línia corba continua és aquella que la seua natura està expressada per una sola funció determinada d'*x*. Però, si la línia corba està composta de diferents porcions *BM*, *MD*, *DM*, etc. determinades per diverses funcions d'*x*, de manera que una part *BM* és el resultat d'una funció, una altra *MD* el d'una segona funció, anomenen a aquestes espècies de línies corbes discontinues, o mixtes i irregulars, per què no estan formades segons una única llei constant, i estan compostes de porcions de diferents corbes continues (Euler, 1797, p. 4).

Al parlar de corba continua Euler es refereix a la invariabilitat de l'equació o expressió analítica que defineix a la funció i en conseqüència una corba discontinua serà la que està

composta per porcions de corbes continues. Per a Euler la figura 3 correspon, com veurem més endavant, a una corba continua.

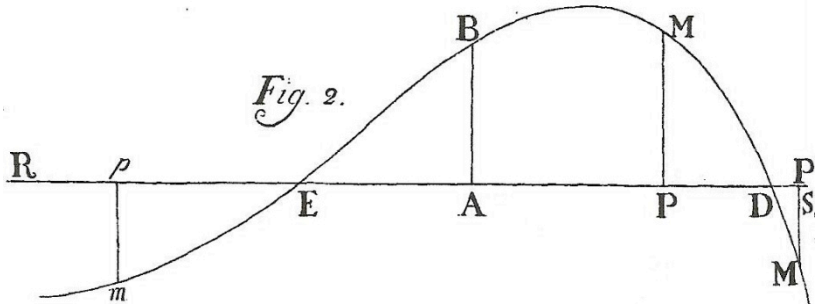


Euler parla de corbes continues i en cap moment de funcions continues.

9. FUNCIÓ UNIFORME

Per descriure la corba que resulta d'una funció caldrà saber si la funció és uniforme o multiforme, ja que d'açò depén que per a cada abscissa determinada s'obtinga o no una única aplicada determinada, fet que provocarà que a cada abscissa se li assigne o no un únic punt de la corba. I poder obtenir d'aquesta manera una corba els curs de la qual siga continu o no.

Tal com fa amb las funcions comença estudiant la corba que descriu una funció uniforme. La figura 2 descriu la natura d'una funció uniforme: per a cadascun dels infinits valors (reals) de la quantitat variable s'obté un únic valor de la funció que talla a la corba en un únic punt. I com que l'eix s'estén fins l'infinit, la corba també ho fa de dreta a esquerra sense interrupció. La podem dibuixar d'un sol traç.



La corba s'obté unint tots els punts M, els extrems de les aplicades.

> 16. Per descriure una línia corba resultant d'una funció d'x, que dona el valor de l'aplicada y, caldrà prestar atenció a la natura d'aquesta funció, per saber si és uniforme o multiforme. Suposem en primer lloc que y siga una funció uniforme d'x, o que $y = P$, sent P una funció uniforme d'x qualsevol, com en donar a x un valor determinat qualsevol, s'obté també per a y un valor determinat; es dedueix que a cada abscissa li correspondrà una aplicada, i que per tant la corba serà de tal forma, que si elevem en un punt qualsevol P de l'eix RS una perpendicular PM, aquesta perpendicular tallarà sempre la corba, i en un sol punt M. Així a cada punt de l'eix correspondrà un punt de la corba; i com l'eix s'estén fins l'infinit d'ambdós costats, la corba s'estendrà també fins l'infinit d'una i altra part; o la corba que naix de tal funció, s'estendrà fins l'infinit d'una part a l'altra amb l'eix per un curs continu, com mostra la figura 2, en què la línia corba *mEBMDM* s'estén fins l'infinit sense interrupció a dreta i a esquerra (Euler, 1797, p. 7).

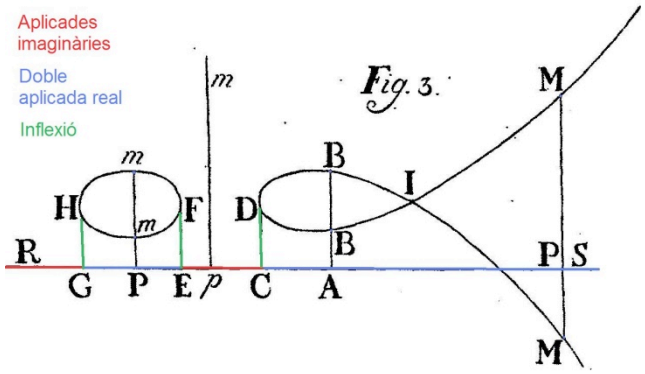
En parlar ara de continu, sembla que Euler es refereix a poder dibuixar la corba d'un sol traç.

10. FUNCIÓ BIFORME

Al primer volum, Z és una funció biforme si està determinada per una equació quadràtica expressada de la forma: $Z^2 - PZ + Q = 0$; i aleshores $Z = \frac{1}{2}P \pm \sqrt{(\frac{1}{4}P^2 - Q)}$

En canvi al segon, una funció biforme y presenta la següent forma: $yy=2Py - Q$ o $y = P\sqrt{(PP-Q)}$. On a més del canvi de nom de la variable ha canviat la forma general de l'equació quadràtica i en conseqüència la manera d'expressar els valors de l'aplicada, facilitant d'aquesta manera la classificació dels valors de les aplicades segons els valors de P i de Q.

- Si $PP > Q$ els dos valors de y són reals, per a cada abscissa AP hi ha dues aplicades que tallen a la corba en dos punts.
- Si $PP < Q$ els dos valors de y són imaginaris aleshores no hi ha cap aplicada que corresponga a l'abscissa o la perpendicular elevada per aquest punt no troba la corba per cap lloc. Com ocorre amb el punt p.
- Però com $PP > Q$ per a esdevenir $< Q$ ha de passar pel cas $PP = Q$, límit entre les aplicades reals e imaginàries, aleshores $y = P \pm 0$ i les dues aplicades són iguals i la corba forma en aquest punt una inflexió. Com ocorre en C i en G. I també en E.



Si recorrem dinàmicament la corba observem que en passar d'augmentar a disminuir el valor de les abscisses o viceversa sorgeixen els punts d'inflexió. En el punt I no hi ha cap inflexió, simplement les dues aplicades reals són iguals.

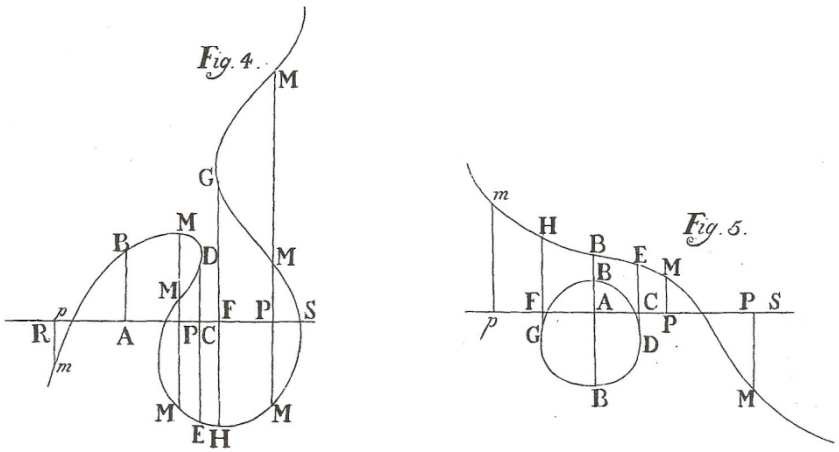
En Euler "inflexió" no és canvi de curvatura, sinó canvi de sentit en el recorregut de la corba.

Cal anotar que la corba de la figura 3 és continua ja que està determinada per una única equació.

11. FUNCIÓ TRIFORME

En les funcions triformes, per a cada valor de l'abscissa, l'aplicada tindrà tres valores, que seran els tres reals o un real i els altres dos imaginaris. Com a cada abscissa li correspon almenys una aplicada real en aquest cas la corba s'estén a l'infinit.

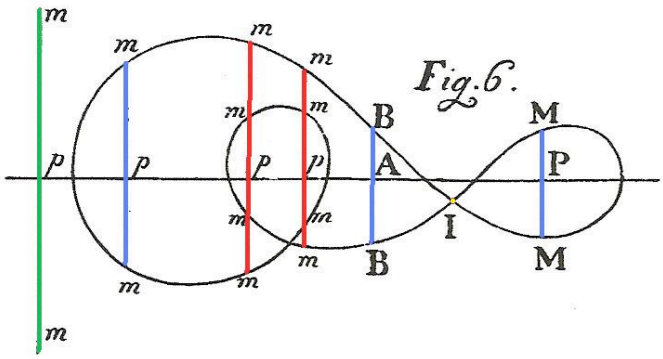
Aquesta corba podrà estar formada per un sol traç continu, com en la figura 4. O per dues o més parts separades, com en la figura 5.



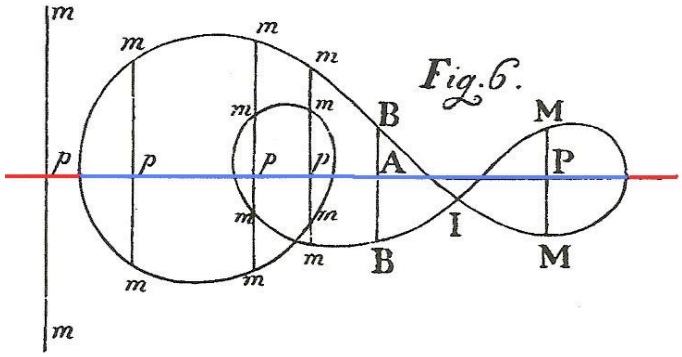
Però en els dos casos serà una corba continua doncs resulta d'una sola funció.

12. FUNCIÓ QUADRIFORME

En les funcions quadriformes per a cada valor d'x, l'aplicada obté quatre valors que podran ser els quatre reals, o solament dos o cap real. Per tant les aplicades tallaran a la corba o en quatre punts (roig), o solament en dos (blau), o en cap lloc (verd) o inclús quan els punts d'intersecció es reuneixen en només un(groc).



En la següent figura s'observa per a quins valors d'x les aplicades són totes imaginàries (roig) o quan presenta almenys dos valors reals encara que es reunisquen en un sol (blau) com ocorre en el punt I.



La corba d'una funció quadriforme presentarà quatre branques que s'estenen a l'infinit o dues o cap, en aquest darrer cas la corba estarà tancada per tot arreu i la seua forma serà del tipus que mostra la figura 6.

13. CORBA - EQUACIÓ

En els articles 23 i 24 exposa la necessitat d'estudiar el canvi de coordenades:

- Corbes diferents donen origen a equacions diferents.
- Però equacions diferents no tenen per què donar origen a corbes diferents. Ja que, donada una corba qualsevol, l'arbitrarietat tant de l'eix com de l'origen de les abscisses provoca que el nombre d'equacions que poden expressar la seua natura siga innumerable.

Així doncs, caldrà trobar un mètode que permeta passar d'una equació a altra (canvi de coordenades), facilitant d'aquesta manera l'estudi de la diversitat de les corbes per mitjà de les seues equacions.

14. CANVI DE COORDENADES

Aquest mètode consisteix en trobar les equacions del canvi de coordenades, que en aplicar-lo sobre una equació donada proporciona una nova equació en altres coordenades de la mateixa corba.

Euler estudia de forma exhaustiva les diferents possibilitats i en totes elles segueix el mateix esquema de treball:

1. Parteix d'una figura en què està descrita una corba associada a una equació entre x i y qualsevol donada. L'eix d'abscisses és la recta RS i l'origen el punt A. De manera que x representa l'abscissa AP i y l'aplicada PM, que són les coordenades d'un punt genèric de la corba, M, respecte de l'eix i l'origen elegits.
2. Fa un canvi d'origen o d'eix o de tots dos.
3. Expressa les noves coordenades del punt M, a la nova abscissa l'anomena t i a la nova aplicada u.
4. Cerca una relació entre les distintes coordenades.
5. Obté les equacions del canvi de coordenades, que permeten en substituir-les en l'equació donada expressar la corba a partir d'una nova equació entre t i u.

En total estudia 5 casos:

CAS 1. Canvia origen d'abscisses i manté l'eix.

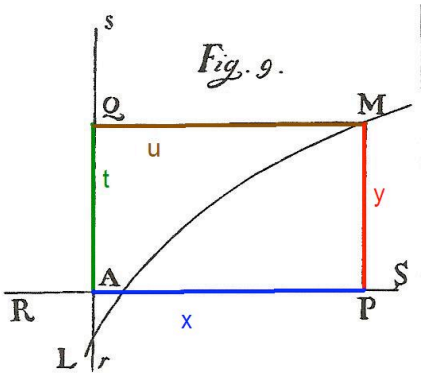
CAS 2. Canvia l'eix i l'origen: eix PARAL·LEL a l'eix RS.

CAS 3. Canvia l'eix i manté l'origen: eix PERPENDICULAR a l'eix RS pel punt A.

CAS 4. Canvia l'eix i manté l'origen: el nou eix talla a l'eix RS pel punt A formant un angle qualsevol.

CAS 5. CAS GENERAL: Canvia l'eix a una posició qualsevol i l'origen.

15. CAS 3: EIX PERPENDICULAR



1. En la figura 9 està traçada la corba *LM*. Les coordenades del punt *M* respecte de l'eix *RS* són: l'abscissa, $x = AP$ i l'aplicada, $y = PM$.

2. Pren un eix perpendicular, la recta *rs*, al primer, la recta *RS*, que el talla per l'origen d'abscisses, el punt *A*. Després manté fix l'origen.

3. En traçar la perpendicular, *MQ*, des del punt *M* a l'eix *rs* s'obtenen les noves coordenades del punt *M* a l'eix *rs*, la nova abscissa $AQ = t$ i la nova aplicada $QM = u$.

4. I com *APMQ* és un paral·lelogram rectangle,

   S'obté que

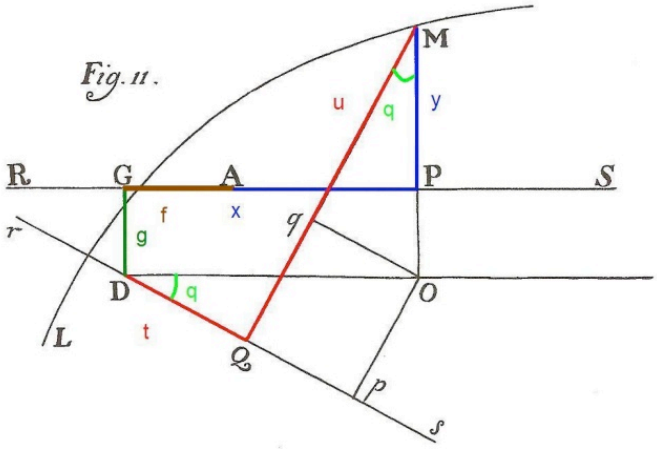
   $x = u \quad y = t$

   són les equacions del canvi de coordenades, quan es tria un nou eix perpendicular al primer per l'origen d'abscisses.

A la vista dels resultats d'aquest canvi, Euler conclou que:

> […] no hi haurà per a aquest nou eix cap altre canvi en l'equació, excepte que les coordenades *x* i *y* s'intercanvien: per açò, s'anomena ordinàriament les coordenades a l'abscissa i l'aplicada, sent indiferent quina de les dues quantitats es prenga com abscissa o com aplicada, per què donada una equació entre dues coordenades *x* i *y*, resulta la mateixa corba, si es pren *x* o *y* per representar l'abscissa (Euler, 1797, p. 13).

16. CAS 5: CANVI GENERAL



1. Les coordenades de *M* respecte l'eix *RS* i l'origen *A* són: $x = AP$ i $y = PM$.

2. Pren un eix *rs* situat en una posició qualsevol i fixa en ell un punt D com a origen d'abscisses.

3. Traça la perpendicular *MQ* des del punt *M* a la recta *rs* i anomena a la nova abscissa $DQ = t$ i a la nova aplicada $QM = u$.

4. Per trobar la relació buscada traça des del punt *D* (el nou origen) dues línies:

   1r. La perpendicular a l'eix *RS* i obté el punt *G*.

   Anomena a $AG = f$ i a $DG = g$.

   2n. La paral·lela a l'eix *RS* que talla a la prolongació de l'aplicada *PM* en el punt *O*.

   I obté: $MO = y + g$, $DO = GP = x + f$

   Anomena *q* a l'angle *ODQ*, *m* al seu sinus i *n* al seu cosinus.

   Traça sobre l'aplicada *MQ* i el nou eix *DQ* dues perpendiculars, *Oq* i *Op*

   i com l'angle *OMQ* = *ODQ*, de $DO = x + f$, i de $MO = y + g$, s'obté que:

   $$Op = Qq = (x + f)\,\text{sin}q = mx + mf$$

   $$Dp = (x + f)\,\text{cos}q = nx + nf$$

   Aleshores, $Oq = Qp = (y + g)\,\text{sin}q = my + mg$

   $$Mq = (\text{y} + \text{g})\,\text{cos}q = ny + ng$$

   I per tant, $DQ = t = [Dp\text{-}Qp] = nx + nf - my - mg$

   y $QM = u = [Qq + Mq] = mx + mf + ny + ng$

   És a dir, $t = nx + nf - my - mg$

   $u = mx + mf + ny + ng$

   Per obtenir les equacions del canvi de coordenades hi ha prou en trobar:

   $nt + mu = [nnx + nnf - nmy - nmg + mmx + mmf + mny + mng] = x + f$

   $nu - mt = [nmx + nmf + nny + nng - mnx - mnf + mmy + mmg] = y + g$

   ja que mm + nn = 1

   I per tant les equacions generals del canvi de coordenades,

   al canviar l'eix i l'origen d'abscisses són:

   $x = mu + nt - f$

   $y = nu - mt - g$

   Que podem escriure:
   $$\left.\begin{aligned} x &= u \cdot \sin q + t \cdot \cos q - f \\ y &= u \cdot \cos q - t \cdot \sin q - g \end{aligned}\right\}$$

Donada l'arbitrarietat de les magnituds f i g , així com l'angle q a l'equació que s'obté entre t i u l'anomena equació general de la corba LM.

> 35. Ja que no podem imaginar un eix rs, sempre que estiga en el mateix pla que la corba, que no estiga inclòs en aquesta darrera solució, no existirà per a la mateixa corba LM, entre les coordenades perpendiculars, cap equació, que no estiga continguda en la que s'ha trobat entre t i u; i, com es pot variar d'una infinitat de maneres les quantitats f i g, així com l'angle q que determina m i n, es dedueix que totes les equacions, que estan incloses en la que acabem d'obtenir d'aquesta manera entre t i u, expressen la natura de la mateixa corba. Per açò, se sol anomenar a aquesta equació entre t i u l'equació general de la corba LM, per què conté generalment totes les que pertanyen a la mateixa corba (Euler, 1797, p. 15-16).

Finalment per saber si dues equacions expressades una entre x i y, i l'altra entre t i u, representen o no la mateixa corba caldrà trobar els valors de les quantitats f, g, m i n que proporcionen les equacions del canvi de coordenades

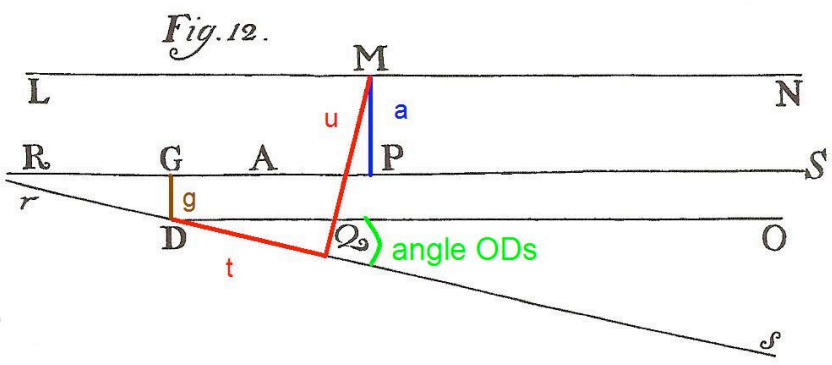
17. EQUACIÓ GENERAL DE LA RECTA

Obté l'equació general de la recta a partir del canvi de coordenades:

- Comença considerant una línia recta LM paral·lela a l'eix RS.
- L'aplicada PM sempre és una magnitud constant, independentment d'on se situe l'origen d'abscisses.
- Anomena a dita magnitud a i per tant l'equació de la recta paral·lela a l'eix RS és $y = a$.

Per obtenir l'equació general de la recta canvia l'eix RS per l'eix rs i anomena:

$DG = g$,
Sinus de l'angle $ODs = m$,
Cosinus de l'angle $ODs = n$,
L'abscissa $DQ = t$, i
L'aplicada $MQ = u$



Com segons les equacions de canvi de coordenades $y = nu - mt - g$ i d'altra banda $y = a$, s'obté que l'equació general de la recta és: $nu - mt - g - a = 0$

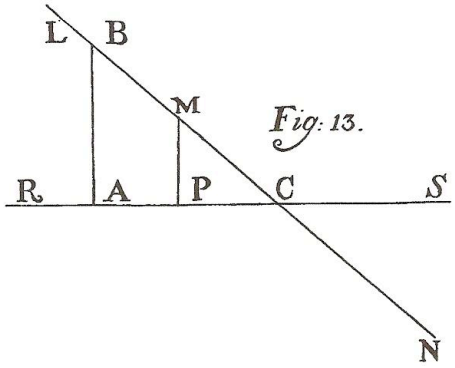
Multiplica aquesta equació per una constant, k, i suposa: $nk = \alpha$

$$mk = -\beta$$
$$(g + a)\,k = -b$$

Aleshores obté l'equació $\alpha u + \beta t + b = 0$ per a la línia recta.

Tot seguit dóna l'equació general d'una recta qualsevol LN respecte de l'eix RS

$$ax + by - a = 0$$



Com és l'equació general de primer orde entre *u* i *t*, queda provat que cap equació de primer orde entre les seus dues coordenades representa una línia corba, sinó una recta. Llavors l'equació general de la recta és $\alpha u + \beta t + b = 0$.

Troba les coordenades dels punts *C* i *B*, allò que per a nosaltres serien els punts de tall amb els eixos.

Primer fa $y = 0$, aleshores l'abscissa *AC* esdevé = $\frac{a}{\alpha}$

Després $x = 0$, aleshores $y = \frac{a}{\beta}$, que és el valor de l'aplicada *AB* en l'origen d'abscisses; que per a nosaltres és l'ordenada en l'origen.

Finalment comprova, per semblança de triangles, que qualsevol punt de la recta *BC* satisfà l'equació donada.

Tria el punt M, les coordenades del qual són $x = AP$ i $y = MP$; i els triangles semblants *CPM* i *CAB,* la raó de semblança dels quals és $CP : PM :: CA : AB$

Com $CP = AC - AP = \frac{a}{\alpha} - x$ $PM = y$ $CA = \frac{a}{\alpha}$ $AB = \frac{a}{\beta}$

Aleshores $\frac{a}{\alpha} - x : y :: \frac{a}{\alpha} : \frac{a}{\beta}$ o $\frac{\frac{a}{\alpha} - x}{y} = \frac{\frac{a}{\alpha}}{\frac{a}{\beta}}$

D'on es dedueix: $\frac{ay}{\alpha} = \frac{a^2}{\alpha\beta} - \frac{ax}{\beta}$

Multiplicant per $\frac{\alpha\beta}{a}$ s'obté: $\beta y = a - \alpha x$ o $\alpha x + \beta y = a$ que és l'equació proposada.

Per finalitzar estudia els següents casos particulars:

1º. Si $\alpha = 0$ i $\beta = 0$, la construcció no es pot dur a terme.

2º. Si $\alpha = 0$ i $y = a$, la línia és una recta paral·lela a l'eix.

3º. Si $\alpha = a = 0$, la recta paral·lela es confondrà amb l'eix.

4ª. Si $\beta = 0$ i $x = a$, és evident que la línia que satisfà l'equació és una recta perpendicular a l'eix, en aquest cas no hi ha més que una abscissa per a totes les aplicades. L'abscissa deixa de ser una quantitat variable.

El cas $\beta = x = 0$ no el contempla, doncs per a Euler no cal fer distincions entre les diferents rectes perpendiculars que es poden obtenir, cosa que demostra que ell només considera l'eix d'abscisses i no sols teòricament sinó també en la pràctica.

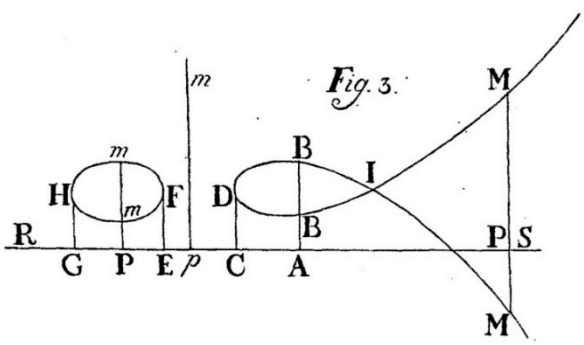
18. CONCLUSIONS

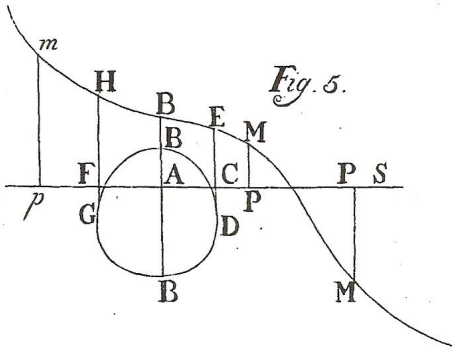
Euler utilitza dues explicacions diferents de la paraula funció:

- La primera defineix com funció *Z* a tota expressió analítica de *z*, és a dir, a tota expressió composta de potències, logaritmes, funcions trigonomètriques i similars, però sense indicar de forma precisa quines combinacions resulten admissibles.
- En la segona, una funció *y* d'*x* (real) queda definida per a Euler sempre que una corba qualsevol siga dibuixada en un sistema de coordenades, en què utilitza un únic eix, l'eix d'abscisses.

El concepte de funció d'Euler és distint a l'actual, doncs la funció, en qualsevol de les seues modalitats, pot prendre més d'un valor i fins i tot infinits valors.

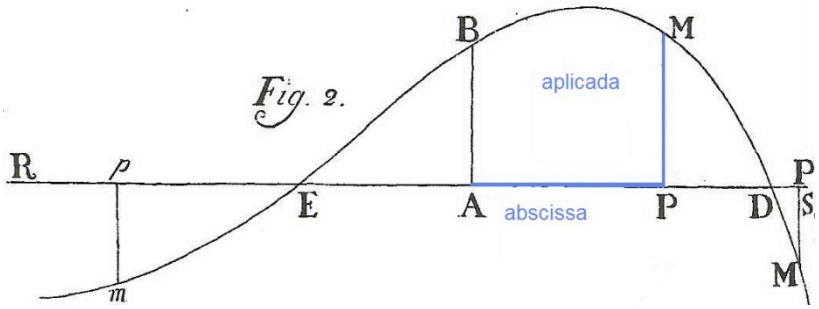
No es troba en Euler el concepte de funció continua. Euler solament parla de corbes continues, en cap moment de funcions continues. El concepte de corba continua fa referència a la invariabilitat de l'equació o expressió analítica que defineix a la funció i com aquesta pot prendre per a alguns valors d'*x* només valors imaginaris (com en la figura 3) o diversos valors (figura 5), sovint no es pot dibuixar la corba continua d'un sol traç. I per tant corba discontinua en Euler no significa de traç discontinu.





Euler utilitza tres termes: funció, corba i equació.

- A partir de la funció *y* (de la seua expressió analítica o d'una equació entre *x* i *y*) es determinen els seus "infinits valors" (les aplicades que es representen elevant un segment perpendicular a l'eix d'abscisses) en variar *x*, que es representa mitjançant un segment, l'abscissa. Podríem dir que allò que fa Euler és construir una taula "infinita" de valors, valors que no són parells de nombres sinó magnituds que es representen mitjançant segments (l'abscissa i l'aplicada) i són els extrems de les aplicades els que tracen la corba de la funció. La corba no es descriu per un punt que es mou, ni és un conjunt de punts.



- Corbes diferents donen origen a equacions diferents, però equacions diferents, donada l'arbitrarietat de l'eix i de l'origen d'abscisses, no tenen per què donar origen a corbes diferents. Per determinar quines equacions estan associades a una mateixa corba cal obtenir les equacions de canvi de coordenades. Equacions que a la fi proporcionaran les equacions generals dels diferents tipus de funcions.

19. REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Boyer, C. G. (2007). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Boyer, C. G. (2004). *History of analytic geometry.* New York: Dover Publications, Inc.

Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum*. (2 vols.). Lausanne: Marcum-Michaelem Bousquets y Socios.

Euler, L. (1796). *Introduction à l'analyse infinitésimale*. (Vol.1). Paris: Chez Barrois.

Euler, L. (1797) *Introduction à l'analyse infinitésimale*. (Vol.2). Paris: Chez Barrois.

Euler, L. (2000). *Introducción al análisis de los infinitos.* Traducción castellana de José Luis Arantegi Tamayo. Sevilla: SAEM "Thales". Real Sociedad Matemática Española.

González Urbaneja, P. M. (2007). La geometría analítica de la Introductio in Analysin Infinitorum de Euler. *Sigma, 31,* pp.169-193.

González Urbaneja, P. M. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la Geometría Analítica. *Sigma, 30,* pp. 205-236.

Klein, F. (2006). *Matemática elemental desde un punto de vista superior. Aritmética. Álgebra. Análisis*. Madrid: Nivola.

Wussing, H. (1998). *Lecciones de Historia de las Matemáticas.* Madrid: Siglo XXI de España Editores, S.A.

Youschkevitch, A.P. (1981). Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXème siècle. Ovaert, J.L. and Reisz, D. (Eds) *Fragments d'histoire des mathématiques, 41*, pp.7-68.

MODELOS SEMÁNTICOS Y SINTÁCTICOS PARA LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA

David Arnau

Universitat de València Estudi General

INTRODUCCIÓN

Podemos identificar (Kieran, 2004, 2007) tres tipos de actividades escolares relacionadas con el álgebra: actividades generacionales (que incluirían la representación de situaciones, modelos, relaciones, etc.); actividades transformacionales (que incluirían la factorización, la sustitución algebraica, la resolución de ecuaciones, etc.); actividades metanivel/global (que incluiría resolver problemas, modelar, generalizar patrones, etc.). Las actividades generacionales y transformacionales implican el uso del lenguaje matemático, mientras que las actividades metanivel/global "podrían llevarse a cabo sin el uso de ninguna letra-símbolo algebraico" (Kieran, 2007, p.714).

Investigaciones (Collis, 1974; Booth, 1988; Kieran, 1981; Matz, 1982), que el tiempo ha convertido en clásicas, describieron y elaboraron listados de dificultades y errores observados en los estudiantes al enfrentarse a transformaciones algebraicas. Estos estudios apuntaron como causa principal a un intento poco afortunado de adaptar el conocimiento previo; ya fuera como consecuencia de mantener formas de actuar propias de la aritmética o de la extrapolación incorrecta de reglas.

Behr, Erlwanger y Nichols (1976) observaron la tendencia de un grupo estudiantes de entre 6 y 12 años a considerar el signo igual como un operador (una señal para hacer algo) más que como una relación (comparación de los dos miembros de una igualdad). Kieran (1981) coincide en que los estudiantes desde preescolar hasta la universidad interpretan el signo igual como una señal para hacer algo; aunque identifica una evolución hacia una interpretación relacional a medida que se aumenta el nivel, junto a la aparición de formas más sofisticadas de usos operacionales (por ejemplo, emplear el signo igual como un mero nexo de unión entre pasos), lo que muestra la falta de conciencia sobre el papel de equivalencia que tiene el signo igual.

Booth (1988) observó la propensión de los estudiantes a obtener una respuesta (un único término), convirtiendo expresiones como $2a + 5b$ en $7ab$ o transformando $a + b$ en ab. "Este problema puede ocurrir como consecuencia de que los estudiantes tengan una dificultad cognitiva en 'aceptar la falta de cierre' (Collis, 1975), o puede que refleje sencillamente las expectativas derivadas de la aritmética respecto a lo que se supone que son 'respuestas bien formadas'" (Booth, 1988, pp. 23-24).

La uniformidad de los errores observados condujo a Matz (1982) a clasificarlos en: a) errores generados por una elección incorrecta de una técnica de extrapolación; b) errores que reflejan un conocimiento base pobre, pero correcto; c) errores que surgen durante la ejecución de un procedimiento. Así, los errores del tipo $(x+y)^n = x^n + y^n$, $\frac{x}{y+z} = \frac{x}{y} + \frac{x}{z}$ o $a^{m+n} = a^m + a^n$ se explicarían como la asunción de un falsa linealidad que se manifiesta en una sobregeneralización de la propiedad distributiva.

Como causa primera del problema (más allá de las tendencias observadas en los estudiantes) se señala una enseñanza (y un aprendizaje) centrada en las definiciones formales (Chalouh y Herscovics, 1988) que produce una falta de comprensión de los conocimientos básicos para su posterior aplicación (Brown et al., 1988) y que conduce a la

memorización de reglas (Kieran, 1992). Kaput (1995) expone las consecuencias de una enseñanza basada en la manipulación de expresiones: "El efecto neto es una trágica alienación de las matemáticas por parte de todos aquéllos que superan este filtro e incluso una pérdida más trágica de oportunidades en la vida para todos aquéllos que no lo hacen" (p. 71). En la misma línea, Booth (1988) indica que la habilidad para manejar símbolos algebraicos (sintaxis) es importante, pero el aspecto fundamental de la manipulación algebraica lo constituye la justificación subyacente (semántica) encarnada en las propiedades estructurales.

Modelos de enseñanza semánticos y sintácticos

A la hora de instruir en la aplicación de las reglas de transformación de expresiones algebraicas, Filloy (1987) separa entre modelos de enseñanza sintácticos, que ponen énfasis en las propias reglas de uso, de los semánticos, que ponen el énfasis en dar significado a las mismas. Los modelos de enseñanza semánticos proponen dotar de significado a las nuevas operaciones dentro de un contexto (por ejemplo, el uso de balanzas o áreas para dar sentido a la manipulación de ecuaciones); mientras que los modelos de enseñanza sintácticos pretenden construir hábitos que permitan aplicar reglas generales en situaciones concretas. En esta comunicación nos centraremos en describir las conclusiones de algunos estudios que analizaron las actuaciones de los estudiantes cuando empleaban el modelo de la balanza.

Modelos de enseñanza semánticos: el caso de la balanza para la resolución de ecuaciones

Se realizaron investigaciones que intentaban poner de manifiesto cómo los modelos semánticos podían proporcionar sentido a las reglas con la finalidad última de disminuir la presencia de los errores. Centrándonos en el caso de la resolución de ecuaciones, Filloy y Rojano (1989) emplearon dos modelos concretos, la balanza y un modelo geométrico basado en la comparación de áreas, para enseñar a operar con la incógnita cuando se resolvían ecuaciones. Con este fin, realizaron entrevistas con enseñanza a estudiantes de entre 12 y 13 años que ya sabían resolver ecuaciones aritméticas y encontraron que estos modelos no necesariamente incrementan la habilidad de los estudiantes cuando resuelven ecuaciones algebraicas de forma simbólica. En concreto, señalan: a) el dominio en el modelo concreto desarrolla una tendencia a permanecer y progresar en dicho modelo, lo que puede retrasar la construcción de una sintaxis algebraica; b) cuando el modelado se desarrolla de forma espontánea tiende a ocultar lo que se pretende enseñar; c) la enseñanza es necesaria en momentos clave para separarse del modelo y poder construir nuevas nociones.

De hecho, como señalan Pirie y Martin (1997), los estudiantes no necesariamente han de estar familiarizados con el funcionamiento de una balanza y por lo tanto preguntarse '¿Cómo es de real la imagen de la balanza?' implicaría preguntarse '¿La realidad de quién?'. Además el hecho de que se trabaje con pesos y no simples números imposibilita dotar de significado a la resolución de ecuaciones que impliquen la aparición de coeficientes negativos o que tengan solución negativa. En una línea más favorable, Vlassis (2002) concluye que el método de la balanza es útil para enseñar el método formal de aplicar la misma operación a los dos términos de una ecuación; pero destaca la necesidad de actividades que sirvan para distanciarse del modelo concreto y superar todos los obstáculos, consecuencia de las limitaciones del modelo, asociados al proceso de separación, como la presencia de números negativos.

La limitaciones apuntadas en éstas y otras investigaciones, junto a las posibilidades que ofrecen los entornos informáticos, han dado lugar a la aparición de nuevas balanzas en las

que los números negativos se representan mediante globos[11] más ligeros que el aire o mediante platos enlazados a los de las balanzas mediante poleas[12]. El caso de la balanza con poleas además permite hacer corresponder las transformaciones viéticas (entendidas como el paso de una subexpresión de un término de la ecuación al otro término para realizar la operación contraria a la que hacía) a la acción de mover pesas de un lado a otro.

MODELOS DE ENSEÑANZA SINTÁCTICOS

También hay espacio para las propuestas (escasas) de una enseñanza del álgebra basada en modelos sintácticos. Kirshner (2001) afirma que los fallos de los errores y dificultades observados no pueden achacarse a un acceso al álgebra basado en la enseñanza de reglas, pues nunca se ha puesto en marcha un currículo exclusivamente centrado en la memorización y aplicación de reglas, sino en la generación y consolidación de lo que llama patrones subcognitivos. En este sentido apunta que en la mayoría de investigaciones se identifican los patrones subcognitivos tomando como referencia la teoría del procesamiento de la información, lo que supone considerar que la mente hace un procesamiento en serie de la información. Sin embargo, Kirshner (1989) sostiene que las decisiones de los estudiantes a la hora de determinar qué regla aplicar depende no sólo de los análisis de las expresiones, sino también de unas señales visuales que observan simultáneamente en las expresiones y que éstas podrían estar detrás de algunos de los errores cometidos por los estudiantes. De hecho, en Kirshner y Awtry (2004) se presenta una propuesta concreta, a la que llaman Sistema de Soporte Léxico, que pretende usar el contenido declarativo de las reglas y procesos algebraicos con el fin de evitar la tendencia a tomar decisiones a partir de las señales visuales que se observan en las expresiones. La base de esta propuesta es dar una descripción estructural de las expresiones algebraicas puestas en juego. A continuación, mostramos un ejemplo de cómo un estudiante utiliza el contenido declarativo de las reglas para poder identificar el error que ha cometido al realizar la transformación $\frac{3x^2+1}{3y-2}=\frac{x^2+1}{y-2}$.

> Profesor: ¿Qué regla has empleado en este paso?
>
> Estudiante: La regla de cancelación para fracciones.
>
> Profesor: ¿Puedes recordarme cuál es esa regla?
>
> Estudiante: Es la regla que permite cancelar factores comunes en numerador y denominador de una expresión fraccionaria.
>
> Profesor: Muy bien, vamos a ver. ¿Qué has cancelado?
>
> Estudiante: Los treses, porque son factores, están multiplicando.
>
> Profesor: Bien, de hecho son factores, pero son factores del numerador y del denominador? Vamos a comprobarlo. ¿Cuál es la principal operación en el numerador?

[11] Un ejemplo lo encontramos en los recursos de la Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales de la University of Utah. El enlace es http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_324_g_4_t_2.html (consultado el 25/08/2010).

[12] Un ejemplo lo encontramos en el *applet* con identificador 2m_b03_t02_s01 de los recursos del proyecto Telesecundaria: SEP-ILCE. Este *applet* tiene licencia Creative Commons y podemos usarlo y descárgalo en la dirección http://132.248.17.86/Vinculos/Secundaria/2_segundo/2_Matematicas/index.html (consultado el 25/08/2010).

> Estudiante: Vamos a ver […] La operación principal es la adición, la de menor prioridad de acuerdo con la jerarquía de operaciones.
>
> Profesor: Bien, ¿cómo se llaman en este caso a las subexpresiones principales?
>
> Estudiante: Se llaman términos… ¡Ah!, vale, para poder cancelarse debe ser un factor de todo el numerador y denominador; no sólo parte de él. (Kirshner y Awtry, 2004, p. 250)

Sin que necesariamente compartamos la fundamentación sobre las que Kirshner apoya sus críticas, coincidimos en la necesidad de articular una propuesta curricular que combine el componente de análisis sintáctico del álgebra con las reglas de transformación algebraicas habituales basada "en una *gramática descriptiva*[13] (Kirshner, 1987) que intenta modelar la práctica real de los usuarios que tienen fluidez en lenguaje algebraico" (Kirshner, 2001, p. 96). Los aspectos clave de la propuesta, que permitirían al usuario la conversión de expresiones bien formadas en otras expresiones bien formadas, serían: 1) explicitación de las convenciones de la notación; 2) análisis sintáctico previo a la transformación; 3) conocimiento de las propias reglas de transformación; y 4) la adecuación de la regla empleada en la situación. Se podría argumentar que los aspectos clave señalados en el párrafo anterior forman parte de cualquier currículo, pero en ningún caso ocupan un papel central y de hecho, como mostraremos a continuación, este conocimiento se da en muchos casos de forma implícita.

NOTACIÓN, ANÁLISIS SINTÁCTICO Y SELECCIÓN Y APLICACIÓN DE LA REGLA

El paso de la aritmética al álgebra tiene como elemento central la posibilidad de operar con lo desconocido. En el mundo de la aritmética las operaciones se producían exclusivamente entre números, lo que permitía realizar una a continuación de otra y no era necesario emplear marcadores que indicaran la modificación de la prioridad de las operaciones. Las formas de proceder algebraicas implican la creación de expresiones en las que se concatenan operaciones que no pueden llevarse a cabo, al menos tal y como se entienden en la aritmética, y que hacen necesario establecer una jerarquía de las operaciones. De manera arbitraria se establece: el primer nivel lo ocupan la adición y la sustracción; el segundo nivel, la multiplicación y la división; y el tercer nivel, la exponenciación y la radicación. La norma no escrita establece que para indicar la prioridad de una operación de menor nivel sobre otra de mayor nivel se recurre a escribirla entre paréntesis. Sin embargo, el lenguaje matemático en su afán de concisión evita la excesiva aparición de paréntesis mediante el recurso a marcas visuales: un ejemplo sería la yuxtaposición vertical en el caso de la división. Así, en la expresión $\frac{x+a}{x+b}$, las operaciones adición (nivel 1) serían prioritarias sobre la operación división (nivel 2) sin que aparezcan paréntesis de manera explícita. La falta de atención a las convenciones implícitas pueden ser una de las causas de errores del tipo $\frac{x}{2}-\frac{1-x}{2}=\frac{x-1-x}{2}=\frac{-1}{2}$ y, posiblemente, se reduciría su incidencia si se hiciera hincapié en el papel de la yuxtaposición vertical[14] como indicador de prioridad de la operación o se utilizara una notación redundante como $\frac{(x)}{(2)}-\frac{(1-x)}{(2)}=\frac{((x)-(1-x))}{(2)}$.

[13] Distingue entre gramática prescriptiva, que dice cómo debe usarse un lenguaje sin atender a las prácticas de los hablantes, y gramática descriptiva, que atiende a cómo usan el lenguaje los hablantes.

[14] La falta de atención al papel que desempeña la yuxtaposición vertical como modificador de la prioridad de las operaciones pudo ser la causa del error que se produjo en las convocatoria de oposiciones de la Agencia Valenciana de Salud cuando publicó

El análisis sintáctico nos permite establecer el orden en que se realizarán las operaciones y el nivel de conexión entre las distintas subexpresiones, lo que nos permitirá identificar qué transformaciones podemos llevar a cabo. La enseñanza de una técnica para llevar a cabo un análisis sintáctico de las expresiones se sustituye, habitualmente, por la confianza en la *capacidad* de los individuos para poder realizarlo de una manera espontánea. En este punto conviene señalar que no parece adecuada la enseñanza de una análisis sintáctico (ver Figura 1) como el que realiza Solares (2007) para la expresión $\frac{\sqrt{-x^2+3}-5}{4y}$, pero sí que podemos ofrecer alternativas que permitan proporcionar la misma información[15].

Conviene llamar la atención sobre un aspecto que ha merecido una escasa atención a nivel curricular, pero que resulta fundamental, y en ocasiones contradictorio, cuando se trabajan con expresiones aritméticas y algebraicas. Nos referimos a que la aplicación de transformaciones algebraicas exigen proceder de manera inversa a la prioridad aritmética de las operaciones. Ante una expresión algebraica debemos atender a la *dominancia* de las operaciones y no a su *prioridad*. Por ejemplo, ante la ecuación $x\cdot(x-1)=-2$ procederíamos considerando el producto del término izquierdo (operación dominante del término), lo que supone centrarnos en la operación que debería realizarse en segundo lugar desde un punto de vista aritmético

Prestar atención a las convenciones de la notación, ser competente en el análisis sintáctico y conocer las reglas de trasformación asegura la conversión correcta de las expresiones. Sin embargo, una transformación correcta puede no ser adecuada en la situación en la que se aplica. Por ejemplo, dada la expresión $8x + x$ la podemos transformar en $2\cdot2\cdot2\cdot x + x$, pero la modificación no resultaría útil en ningún caso. El contexto o la finalidad que se persigue con la transformación marcará la adecuación de la regla aplicada, lo que nos sugiere la importancia de que la enseñanza de la transformaciones algebraicas se lleve a cabo en situaciones con sentido para evitar la correspondencia entre expresión tipo y transformación asociada consecuencia entre otras de la tendencia a la acción, propia de la aritmética, que manifiestan los estudiantes. Por ejemplo, la expresión $x\cdot(x-1)$ invita a aplicar la propiedad distributiva y obtener x^2-x. Esta transformación puede ser adecuada al enfrentarse a $x\cdot(x-1)=-2$; pero puede no serlo ante la expresión algebraica $\frac{x\cdot(x-1)}{x^2-1}$.

(Conselleria de Sanitat de la Generalitat Valenciana, 2009) la fórmula $A-(E/N-1)$, que calcularía la puntuación en los exámenes, cuando la intención era $A-\frac{E}{N-1}$

[15] Por ejemplo, podríamos transformar la expresión algebraica en una expresión aritmética sustituyendo las letras por números ($\frac{\sqrt{-x^2+3}-5}{4y}$ convertirla, por ejemplo, en $\frac{\sqrt{-1^2+3}-5}{4\cdot1}$) y pedir al sujeto que establezca el orden en que se deberían realizar las operaciones aritméticas.

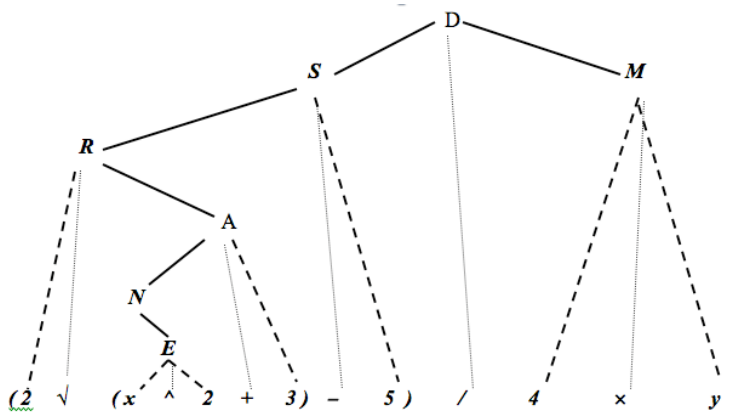


Figura 1.

A MODO DE CONCLUSIÓN

Los modelos semánticos pueden servir de un punto de partida desde el que iniciar el aprendizaje de las transformaciones algebraicas. Sin embargo, las restricciones que impone su uso hace que en ningún caso puedan tener un uso universal que nos permita utilizarlas en todo momento. Es necesario pues buscar nuevos referentes desde los que proporcionar sentido a las transformaciones algebraicas en cualquier situación. Nuestra propuesta pretende ofrecer a los estudiantes herramientas para que puedan organizar un discurso que les permita argumentar sobre la validez y adecuación de las transformaciones algebraicas que llevan a cabo. Con este fin hemos apuntado que cualquier desarrollo curricular que pretenda poner en marcha un modelo de enseñanza sintáctico debería atender a: 1) convenciones de la notación; 2) análisis sintáctico; 3) conocimiento de las reglas de transformación; y 4) adecuación de la regla empleada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Behr, M., Erlwanger, S. y Nichols, E. (1976). *How Children View Equality Sentences* (PMDC Technical Report No. 3). Florida State University, Tallahassee, FL.

Booth, L. R. (1988). Children's Difficulties in Beginning Algebra. En A. F. Coxford y A. P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12* (pp. 20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Brown, A., Carpenter, T. P., Kouba, V. L., Lindquist, M. M., Silver, E. A. y Swafford, J. O. (1988). Secondary School for Fourth NAEP Mathematics Assessment: Algebra, Geometry, Mathematics Methods, and Attitudes. *Mathematics Teacher*, *81*(5), 337-347.

Chalouh, L. y Herscovics N. (1988). Teaching Algebraic Expressions in a Meaningful Way. En A. F. Coxford y A. P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12* (pp. 33-42). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Collis, K. F. (1974). *Cognitive Development y Mathematics Learning*. Centre for Science Education, Chelsea College, London.

Conselleria de Sanitat de la Generalitat Valenciana. (2009). Resolución de 25 de febrero de 2009, del director general de Recursos Humanos, por la que se convoca concurso-oposición para la provisión de vacantes de facultativos especialistas de departamento de distintas especialidades, de instituciones sanitarias de la Agencia Valenciana de Salud. *DOGV*, 5979, pp. 11409-11429.

Filloy, E. (1987). Modelling and the Teaching of Algebra. En J. C. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (pp. 298-300). Montreal, Canada Montreal, Canada: PME.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19-25.

Kaput, J. J. (1995). A Research Base Supporting Long Term Algebra Reform? En D. T. Owens, M. K. Reed, y G. M. Millsaps (Eds.), *Proceedings of 17th PME-NA Annual Meeting*. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 389 539).

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 317-326.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 390-419). New York: MacMillan Publishing Company.

Kieran, C. (2004). The Core of Algebra. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 21-33). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kirshner, D. (1989). The visual syntax of algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(3), 274-287.

Kirshner, D. (2001). The Structural Algebra Option Revisited. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 83-98). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Kirshner, D. y Awtry, T. (2004). Visual Salience of Algebraic Transformations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(4), 224-257.

Matz, M. (1982). Towards a process model for high school algebra errors. En D. Gleeman y J. S. Brown (Eds.), *Intelligent Tutoring Systems* (pp. 25-50). New York: Academic Press.

Pirie, S. y Martin, L. (1997). The Equation, the Whole Equation and Nothing but the Equation! One Approach to the Teaching of Linear Equations. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(2), 159-181.

Solares, A. (2007). *La representación de la incógnita: Significados y sentidos generados para la solución de sistemas de ecuaciones de dos incógnitas*. Tesis doctoral no publicada, CINVESTAV-IPN, México, D.F.

Vlassis, J. (2002). Hindrance or Support for the Solving of Linear Equations with One Unknown. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(3), 341-359.

MATERIALES DIGITALES DE GEOMETRÍA PARA MATEMÁTICAS I

Gregori García
CEFIRE d'Ontinyent,

INTRODUCCIÓN

La idea con la que estamos elaborando estos materiales es para intentar fusionar en un solo recurso la forma tradicional de trabajar las matemáticas, con bolígrafo y papel, y por otra parte la utilización de las TIC con sus nuevas posibilidades didácticas.

En un principio accedíamos al aula de informática esporádicamente para realizar alguna práctica que ilustrase nuestras clases tradicionales. Debido a la buena aceptación por parte del alumnado decidimos emprender un proyecto y crear un libro de texto que integrara dichas prácticas, así como actividades para ser realizadas con el ordenador.

Posteriormente decidimos utilizar sólo el formato digital y empezamos adaptando, solamente la parte de geometría. Los contenidos, los ejemplos, las actividades de aprendizaje, refuerzo, ampliación y evaluación eran las mismas que en los materiales que se presentan en esta comunicación, pero les faltaba la interactividad.

Finalmente con la ayuda del programa eXe Learning fueron adaptadas para ser interactivas, y así el alumnado podía recibir una corrección inmediata de las actividades que realizadas. Esta es la etapa en la que nos encontramos actualmente, y estos son los materiales que vamos a presentar, cuya página inicial se muestra en la Figura 1.



Figura 1. Página inicial y portada de la aplicación

La motivación inicial para empezar todos estos trabajos fue el hecho de la baja matrícula en Matemáticas II por parte del alumnado del bachillerato de la Salud, que en segundo tienen la posibilidad de no elegirla, al no ser obligatoria. Decidimos introducir las TIC en las clases de Matemáticas I y poco a poco ir cambiando la metodología, para motivar al alumnado, pero eso sí, sin despistar la parte curricular, la de preparación para segundo y los criterios de evaluación del selectivo.

Empezamos por primero de bachillerato porque el alumnado se supone que debe mostrar un mayor grado de interés, es un curso donde podemos hacer este tipo de pruebas, ya que

la selectividad todavía está lejos y nos quedaría segundo para volver a la preparación clásica con vistas a la selectividad. Para los contenidos decidimos la geometría por ser la parte de las matemáticas que más se adapta al trabajo con el ordenador, al mismo tiempo que las TIC ayudan a comprender y visualizar mejor los conceptos geométricos.

Los contenidos que tratamos son los relativos a los vectores, la recta, problemas métricos, lugares geométricos, las cónicas y otras curvas. Al inicio de cada tema encontramos los objetivos y el mapa conceptual de cada uno. Las actividades están propuestas de dos formas, una para hacer con la ayuda del ordenador, y otra para trabajarlas con bolígrafo y papel. La aplicación puede corregir de forma automática los dos tipos de actividades.

Tenemos la exposición de conceptos seguidos de los ejemplos que ayudan a comprenderlos, actividades de aprendizaje, refuerzo, ampliación y evaluación. También podemos encontrar un taller por cada tema donde se muestra una aplicación práctica de los conceptos vistos en la unidad.

Para el seguimiento del trabajo diario de nuestro alumnado tenemos las hojas de control de actividades, así como guías de ayuda tanto para el profesorado como el alumnado. Por último destacar que toda la aplicación ha sido realizada con software libre y que la licencia es Creative Commons.

CONTENIDOS

Los contenidos que se trabajan hacen referencia a los temas de geometría plana dentro de la asignatura de Matemáticas I en primero de bachillerato. Hemos dividido la aplicación en cuatro bloques temáticos que hemos denominado:

- Los vectores en el plano
- La recta en el plano
- Problemas métricos
- Lugares geométricos y cónicas

A todos ellos se puede acceder desde la página inicial, desde la página de contenidos propiamente dicha, o bien desde el mapa de la web. De hecho desde el mapa de la web se puede acceder al resto de talleres, actividades de evaluación y documentación como se muestra en la Figura 2.

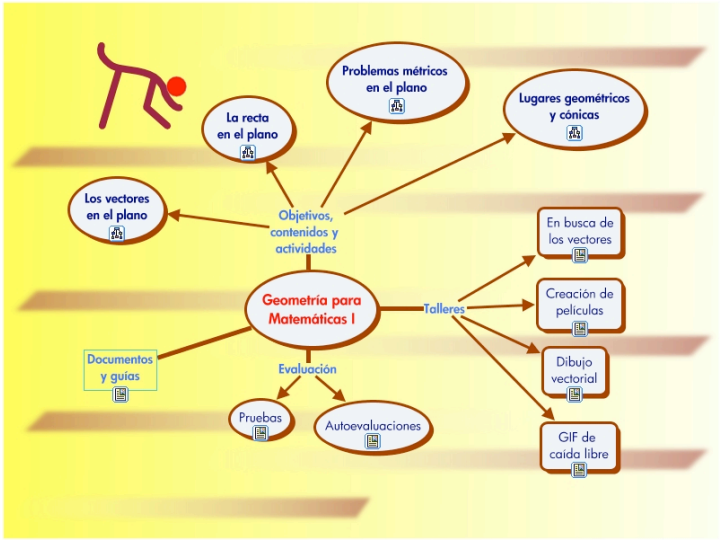


Figura 2. Mapa de la aplicación

Al inicio de cada tema nos encontramos con el mapa conceptual correspondiente. Con él podemos tener una primera visión de todo lo que vamos a trabajar en la unidad, de igual forma también nos sirve para contrastar si nuestros alumnos y alumnas han relacionado bien los conceptos y realmente lo tienen claro.

Encabezando cada tema nos encontramos con la lista de los objetivos que se pretenden trabajar en él. Entre los objetivos más típicamente curriculares, cuya finalidad es la adquisición de conceptos, técnicas de cálculo y preparación para segundo curso, nos encontramos el de utilizar el ordenador para resolver situaciones problemáticas. También se incluye el de relacionar los conceptos del tema con situaciones que dependan de otras materias, como se muestra en la Figura 3.

- Aplicar el producto escalar y todos los recursos necesarios, cuaderno, bolígrafo, ordenador o calculadoras para resolver problemas de geometría plana donde intervengan vectores.
- Utilizar los conceptos y contenidos del tema para comprender y explicar situaciones, experimentos y objetos del mundo que nos rodea, aunque por su naturaleza el estudio de ello corresponda a otras materias.

Figura 3. Ejemplo de objetivos del tema de vectores

Para alcanzar estos objetivos es necesario un cambio de metodología en la asignatura, y la incorporación de las TIC en nuestras clases de Matemáticas.

Todos los temas tienen la misma estructura. Están divididos por páginas donde en cada una de ellas se expone uno o dos conceptos con sus correspondientes ejemplos y actividades de aprendizaje a realizar por el alumnado.

ACTIVIDADES

En la aplicación nos vamos a encontrar una gran cantidad de actividades, muy variadas y de diversos tipos. En un principio las podemos clasificar en dos grandes grupos, las que son para realizar a mano con papel y bolígrafo, y las que son para realizar con la ayuda del ordenador.

Todas las actividades son interactivas, bien las que contienen applets donde el alumno o la alumna tiene que construir algo, y posteriormente se detalla la solución paso a paso, bien

las actividades tipo test o de respuesta múltiple que automáticamente son corregidas, o bien las que tienen que hacer en el cuaderno o con la ayuda del ordenador, donde una vez obtenida la respuesta la aplicación permite validarla.

Actividades de aprendizaje

Son las actividades que se encuentran repartidas por el tema entre las páginas de contenidos. Algunas son ejemplos para ilustrar los conceptos, y el resto son las actividades encaminadas a fijar conocimientos, adquirir destrezas y alcanzar los objetivos propuestos.

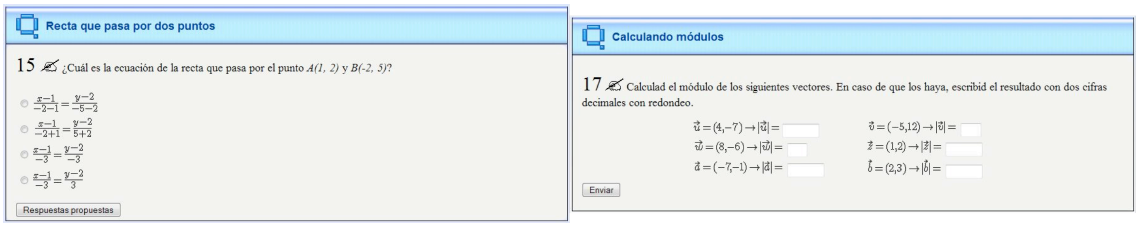


Figura 4. Ejemplo de dos actividades, una tipo test y la otra de comprobación del resultado

La mayoría de estas actividades están basadas en applets de GeoGebra, ejercicios tipo test, de respuesta múltiple, actividades de verdadero y falso, de rellenar huecos y ejercicios para realizar en el cuaderno donde la respuesta final se puede validar incluyéndola en un espacio en blanco. En la Figura 4 podemos observar dos ejemplos de dichas actividades.

Actividades de refuerzo y ampliación

Una vez terminado el tema nos encontramos con dos bloques de actividades, las de refuerzo con la finalidad de que el alumnado pueda alcanzar los objetivos, y las de ampliación cuyo fin es el de profundizar en algunos aspectos del tema o resaltar algunos detalles.

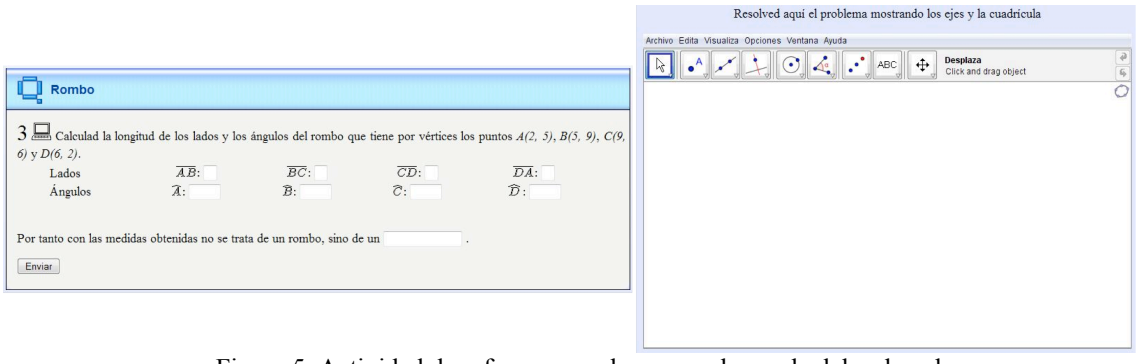


Figura 5. Actividad de refuerzo para hacer con la ayuda del ordenador

Las actividades de refuerzo son muy parecidas a las de aprendizaje, como podemos observar en la Figura 5, incluso a veces se repite el modelo y el tipo de ejercicio. El fin de estas actividades es dotar al profesorado de una cantidad considerable de ejercicios para que pueda escoger según las necesidades de sus alumnos.

Las actividades de ampliación, como la que se muestra en la Figura 6, están pensadas para alumnos y alumnas más avanzadas que hayan superado con éxito las actividades de aprendizaje.

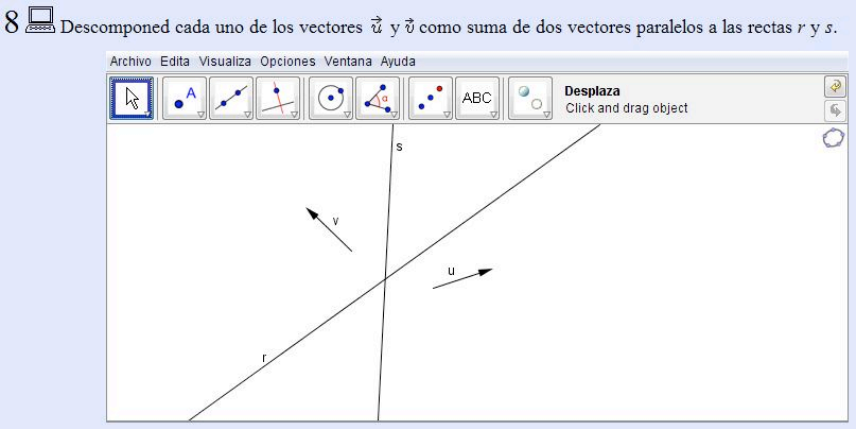


Figura 6. Ejemplo de una actividad de ampliación

Actividades de aplicación. Talleres

Al final de cada tema hemos incluido una actividad de aplicación que hemos denominado taller. Se trata de mostrar al alumnado un uso de los conceptos que acaba de estudiar, y dejar constancia de que en los sitios o fenómenos, que menos se esperan hay contenidos y elementos matemáticos.

Tenemos un taller donde se muestra como los vectores están implícitos en el funcionamiento de un típico ratón de ordenador, para explicar como encontrar el centro de gravedad de una barra, o bien porqué no cae la bolita cuando soplamos desde el extremo de una pajita como se muestra en la Figura 7.

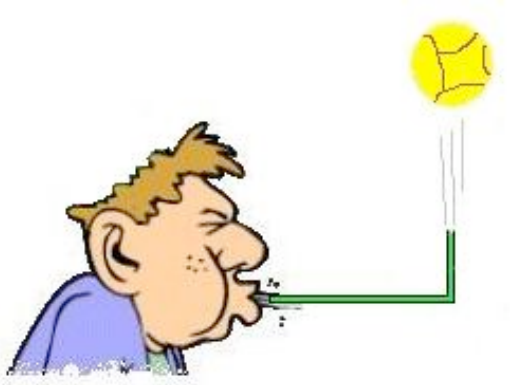


Figura 7. Ilustración del fenómeno de la pajita y la bolita

Actividades de evaluación

Una vez realizadas todas las actividades del tema junto con el taller, el alumnado se encuentra con una autoevaluación. La autoevaluación consiste en siete preguntas tipo test o de respuesta múltiple. En la mayoría de los casos para contestar las preguntas tienen que utilizar cuaderno y bolígrafo.

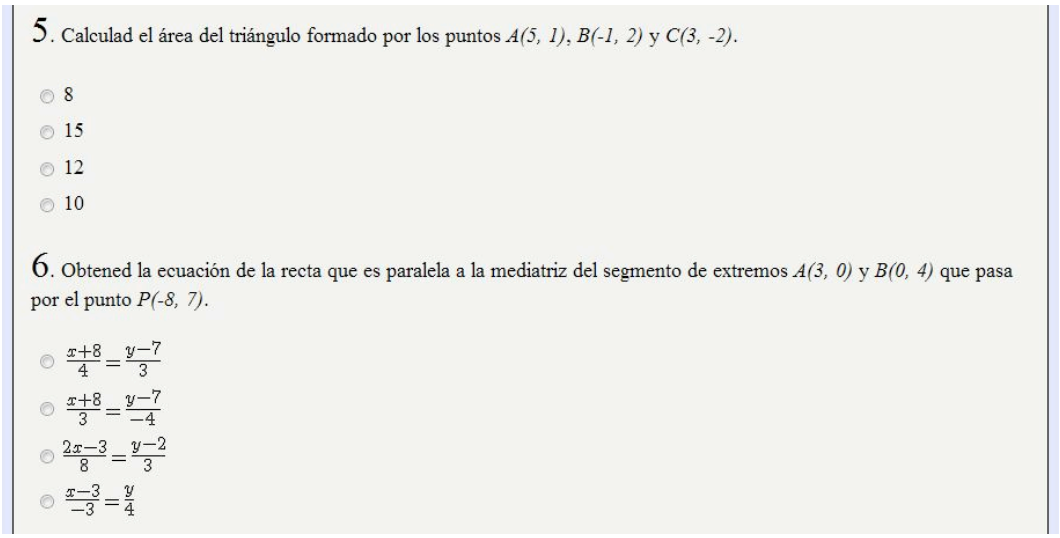


Figura 8. Dos preguntas de la autoevaluación del tema Problemas métricos

Una vez realizadas y superadas todas las autoevaluaciones, junto con todas las actividades de los cuatro temas, el profesorado tiene a su disposición una prueba general de carácter práctico para que el alumnado realice con la ayuda del ordenador, y otra de carácter teórico, del mismo tipo que los exámenes habituales, para hacer por escrito.

DOCUMENTACIÓN

Debido a que la aplicación no permite dejar constancia de las actividades realizadas y en qué grado, hemos incluido las hojas de control de actividades que son una propuesta para llevar un seguimiento diario del trabajo de nuestro alumnado. En la Figura 9 se muestra un ejemplo. Entre el resto de documentación que incluye la aplicación cabe destacar las guías de ayuda tanto para el profesorado como para el alumnado. También se incluye, lo que a nuestro parecer serían los criterios de evaluación.

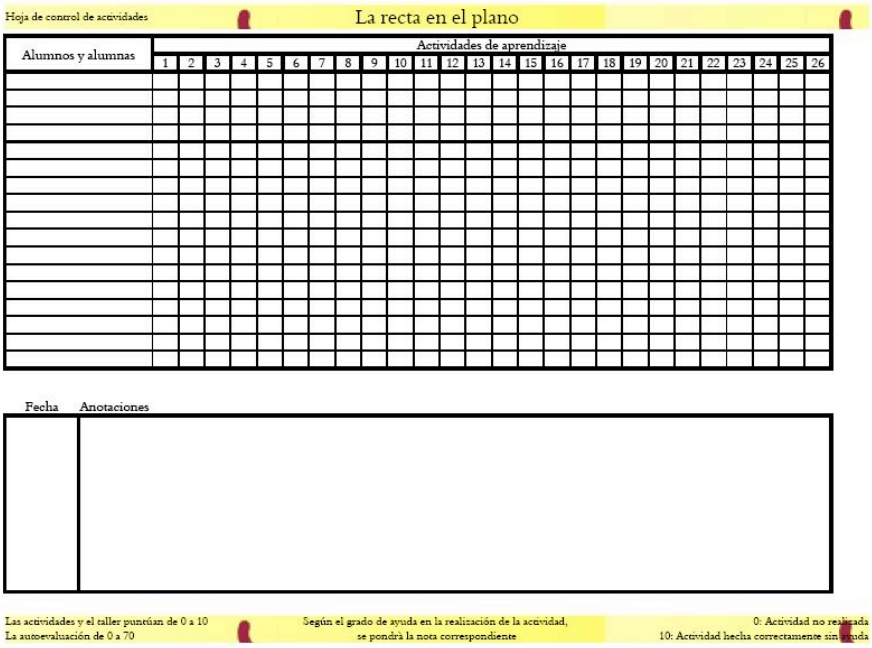


Figura 9. Hoja de seguimiento de las actividades

SOFTWARE UTILIZADO

Cabe destacar que todo el software y todas las aplicaciones utilizadas para la elaboración de estos materiales es libre. Los programas más utilizados han sido eXe Learning, GeoGebra y Cmap Tools.
El programa *eXe Learning* es un entorno de autoría (creación y edición de contenido multimedia) basado en web, diseñado para ayudar al profesorado a diseñar, desarrollar y publicar materiales docentes y educativos, sin necesidad de llegar a ser muy competente en XTML, XML o en complicadas aplicaciones de publicación en web.

El programa posee una serie de actividades prediseñadas que permiten ir construyendo los materiales, cabe destacar la introducción de texto libre, la actividad de espacios en blanco, la selección múltiple y por supuesto la introducción de applets de Java, más concretamente de GeoGebra.

El programa permite exportar los ficheros a carpetas autocontenidas de código HTML, y en realidad el conjunto de todas esas carpetas forman los materiales que les presentamos.

El programa *GeoGebra* es un software matemático para la educación secundaria, que reúne dinámicamente, geometría, álgebra y cálculo.

Por un lado, GeoGebra es un sistema de geometría dinámica. Permite realizar construcciones tanto con puntos, vectores, segmentos, rectas, secciones cónicas como con funciones que a posteriori pueden modificarse dinámicamente. Por otra parte, se pueden implementar ecuaciones y coordenadas directamente. Así, GeoGebra tiene la potencia de poder manejar variables vinculadas a números, vectores y puntos.

Estas dos perspectivas caracterizan a GeoGebra, una expresión en la ventana algebraica se corresponde con un objeto en la ventana geométrica y viceversa. Cabe destacar la posibilidad de crear applets de GeoGebra con actividades para su posterior publicación en páginas web, así como la posibilidad de ejecutarlos sin necesidad de instalar el programa en el ordenador local.

El programa *Cmap Tools* es una aplicación cuya finalidad consiste en diseñar y crear mapas conceptuales. De esta forma podemos interrelacionar todos los conceptos de un mismo tema entre sí, y también el resto de temas de la aplicación. Los mapas conceptuales son dinámicos, es decir, que podemos navegar entre los mapas que estén relacionados, o bien acceder al tema, o a la página concreta que se indique en el gráfico.

En cada nodo podemos enlazar con otros mapas conceptuales, con imágenes, con archivos de texto y con páginas web como elementos más destacados. También permite enlazar a más tipos de archivos. De hecho el mapa de la aplicación ha sido diseñado y construido con este programa.



Figura 10. Programario libre utilizado

También se ha utilizado el software siguiente:

Oppen Office Writer y Calc: Suite de oficina que equivale al Office de Microsoft, el Writer es un editor de texto y el Calc una hoja de cálculo. http://es.openoffice.org/

Jclic: Aplicación para construir actividades didácticas de relacionar y de otros tipos. http://clic.xtec.net/es/jclic/

Gimp: Programa para el tratamiento y creación de imágenes en mapa de bits. http://www.gimp.org.es/

Inkscape: Programa para el tratamiento y creación de imágenes de formato vectorial. http://www.inkscape.org/

Graphmatica: Programa para dibujar gráficas de funciones matemáticas. http://www.graphmatica.com/

Wxmaxima: Programa para el cálculo simbólico y algebraico, el análisis de funciones, las representaciones gráficas y otros conceptos matemáticos. Como el conocido Derive pero en abierto.

http://wxmaxima.sourceforge.net/wiki/index.php/Main_Page

CONCLUSIÓN

La frase que muchos de nuestros compañeros, sobre todo los de más solera, han dicho o pensado alguna vez "*En Matemáticas ya está todo inventado*" personalmente pienso que no les falta razón. Lo que nos cambia y hace que tengamos que inventar nuevas metodologías, para hacer llegar los mismos contenidos, es nuestro alumnado.

Con la realización de estos materiales pretendemos motivar al alumnado de primero, para que así, en segundo de bachillerato, vuelva a elegir las Matemáticas. El uso del ordenador lleva implícito un cambio en la forma de impartir la asignatura. Estos materiales facilitan a nuestros alumnos y nuestras alumnas una mayor autonomía a la hora de alcanzar los objetivos, quitando protagonismo a la figura del docente, dejándole un papel consultivo y de supervisión. Cabe destacar que el uso de estos materiales están en línea con los contenidos curriculares, la preparación del alumnado para segundo y también para la selectividad.

Con este artículo además de mostrar los materiales que hemos creado, también queremos invitar a los compañeros a adaptar o crear materiales digitales para utilizarlos en el aula.

Nos encontraremos con dificultades técnicas, con falta de medios, con una mala organización para acceder a las aulas de informática, con conexiones deficientes a Internet, i con otros inconvenientes que al más valiente le harían desistir de las nuevas tecnologías y volver a la manera clásica de enseñar Matemáticas. De todas formas tenemos que estar preparados, ya que a peor no creemos que vayan las cosas.



Figura 11: Imagen característica de los materiales

La idea es continuar elaborando el resto de temas de la asignatura de Matemáticas I, además nuestra idea es adaptar estos materiales a la plataforma Moodle, ya que además de continuar siendo interactivos, la plataforma hace el seguimiento del trabajo de nuestro alumnado forma automática.

AGRADECIMIENTOS

Agradecer al Ministerio de Educación la concesión del tercer premio en el concurso de materiales educativos curriculares en soporte electrónico edición del 2008.

BIBLIOGRAFÍA

Larson, R. (2006). *Cálculo I y II*. Robert P. Hostetler y Bruce H. Edwards, 8.ª ed., México, McGraw-Hill

Mora Sánchez, José A. (1999). *Matemáticas con Cabri II*. Granada, Proyecto Sur de Ediciones

Vizmanos, J. R. (2002). Ciencias de la naturaleza y de la salud / tecnología. M. Anzola *ALGORITMO. Matemáticas 1*. Madrid, SM

Arriero, C. (2000). *Descubrir la geometria del entorno con Cabri*. I. García. Madrid, Nancea

Dudeney, Henry E. (2007). *Los acertijos de Canterbury*. Biblioteca Desafíos Matemáticos, RBA Coleccionables, S.A.

Páginas web de los programas utilizados:

eXe Learnng: http://www.exe-spain.es/

GeoGebra: http://www.geogebra.org/

CmapTools: http://cmap.ihmc.us/

Oppen Ofice Writer y Calc: http://es.openoffice.org/

JClic: http://clic.xtec.net/es/jclic/

Gimp: http://www.gimp.org.es/

Inkscape: http://www.inkscape.org/

Graphmatica: http://www.graphmatica.com/

wxMaxima: http://wxmaxima.sourceforge.net/wiki/index.php/Main_Page

LA SORPRESA DE LOS NÚMEROS: UN TIEMPO DEDICADO A LA LECTURA

Fátima Capdevila

INTRODUCCIÓN: (BASES DE DERECHO)

- Según la LOE i el DECRETO 112/2007, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana, en su artículo 5, en el punto 2, se dice:

La lectura constituye un factor primordial para el desarrollo de las competencias básicas. Los centros deberán garantizar en la práctica docente de todas las materias un tiempo dedicado a la lectura en todos los cursos de la etapa.

- *RESOLUCIÓN de 30 de junio de 2010,*

... por la que se dictan instrucciones en materia de ordenación académica y de organización de la actividad docente a los centros que impartan Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato para el curso 2010-2011.

... la Comunitat Valenciana ha publicado los decretos de currículo de las distintas enseñanzas introduciendo nuevos elementos para potenciar la calidad educativa, el papel de los proyectos educativos...

ANEXO I

2. PROGRAMACIÓN GENERAL ANUAL

2.3. Programaciones didácticas y memoria

3. En la Educación Secundaria Obligatoria, las programaciones

didácticas deberán incluir aspectos correspondientes a la **comprensión lectora**, la expresión oral y escrita, la comunicación audiovisual, las tecnologías de la información y la comunicación, y la educación en valores, que se trabajarán en todas las materias.

Asimismo, deberán contemplar la contribución de cada materia a la adquisición de las competencias básicas por parte del alumnado.

2.6. Libros de texto y demás materiales curriculares.

Corresponde a los órganos de coordinación didáctica de los centros públicos adoptar los libros de texto y demás materiales que hayan de utilizarse en el desarrollo de las diversas enseñanzas.

2. La edición y adopción de los libros de texto y demás materiales no requerirán la previa autorización de la administración educativa. En todo caso, éstos deberán adaptarse al rigor científico adecuado a las edades de los alumnos y al currículo aprobado por cada Administración educativa. Asimismo, deberán reflejar y fomentar el respeto a los principios, valores, libertades, derechos y deberes constitucionales.

ELECCIÓN DE UN LIBRO DE LECTURA:

Proponer un libro de lectura de matemáticas es una tarea que puede empezar en estas IX Jornadas de Educación Matemática de la Comunitat Valenciana, donde, afortunadamente nos encontramos con la exposición de libros de matemáticas.

La idea hay que llevarla a la práctica. Desde dos puntos de vista paralelos y convergentes:

Ojear muchos de los libros que hay expuestos haciendo una lista de contenidos en una lectura rápida y, por otro lado, comparar los contenidos según las bases de derecho, según los decretos anteriormente citados: la LOE i el DECRETO 112/2007, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana…

La elección del libro atiende al ajuste entre los contenidos de matemáticas del libro elegido y los contenidos del ciclo en el que pretendemos proponer el libro de lectura, a la exposición de los contenidos en el libro y a su presentación.

En este caso el libro elegido es LA SORPRESA DE LOS NÚMEROS. El trabajo realizado es una guía de lectura que consiste en una colección de ejercicios y actividades que inciden en los contenidos leídos que se trabajan y amplían, una visión personal de las competencias que se trabajan y cómo se evalúa.

Nivel educativo: Para 4º de ESO, opción B de Matemáticas.

RESEÑA DEL LIBRO:

Título:

LA SORPRESA DE LOS NÚMEROS.

Un viaje al fascinante universo de las matemáticas.

Autora: Anna Cerasoli.

Editorial: MAEVA.

ISBN-13: 978-84-96748-03-3

Resumen:

Filippo, Filo, tiene nueve años y muchas ganas de aprender. Con lo que aprende en el colegio no le resulta suficiente y en casa no deja de hacer preguntas a su familia. Cuando está el abuelo las preguntas van dirigidas a él. Las respuestas del abuelo son fantasiosas, ricas en anécdotas, apasionantes y sazonadas con un puñadito de matemáticas.

El abuelo fue profesor de instituto, enseñó matemáticas durante cuarenta años.

Grazia, la maestra de Filo, les explica que el reloj puede usarse también para controlar los días de la semana, no solo las horas. Para averiguar qué día de la semana será dentro de x días sólo tenemos que dividir entre siete y nos quedamos con el resto. La aritmética modular la usaban ya los sumerios, según cuenta la profesora.

El número trece trae mala suerte dice la tía Giovanna, pero el trece trae buena suerte en las quinielas. En Italia, la quiniela consta de trece resultados porque se juegan trece partidos por jornada. Se rellena una columna de 13 casillas con los símbolos: 1, 2

o X . Acertar seguro en la quiniela sería posible si se rellenaran tantas como resultados posibles, son más de un millón y medio las quinielas que hay que rellenar. Cada quiniela cuesta medio euro que no se compensa con el premio que corresponde a los ganadores.

Cuando Filo tiene que bañarse siempre busca excusas, ecológicas, y nunca encuentra el momento. El abuelo aprovecha para hablarle de bacterias y del crecimiento exponencial de las poblaciones para convencerle.

El abuelo le explica otras operaciones que ya no son sumar, restar, multiplicar y dividir. Le habla del logaritmo, del factorial y le explica las teclas de la calculadora que hacen estas operaciones. También le explica la construcción del triángulo de Tartaglia o Pascal y más cosas.

Le explica como sacar medias aritméticas de las notas y la desviación típica.

También le explica la relación entre silogismos, conjuntos y tablas de verdad , que las relaciona con circuitos en serie y en paralelo.

El libro es entretenido, cuenta y explica cosas de manera sencilla y se aprende.

¿CÓMO SE LLEVA A LA PRÁCTICA?

Se les da a los alumnos el libro de lectura junto con el listado de libros de texto del curso. Se les entrega la primera semana del curso la guía de lectura de la primera parte del libro con una serie de preguntas, actividades y cuestiones (viene completa en el anexo). Los alumnos leerán un capítulo del libro cada semana. El profesor dedicará 10 minutos a la semana a aclarar dudas del capítulo leído y seguirá guiándoles en la lectura recomendándoles que se fijen, subrayen y memoricen selectivamente los contenidos matemáticos. Se les piden respuestas claras y no muy extensas.

El trabajo será manuscrito.

EVALUACIÓN:

Si después de la guía de lectura hay un control de lectura de esta primera parte, se calcula la media ponderada (60%+40%) que contará como un examen más en la primera evaluación.

También podemos optar por hacer un control basado en la guía de lectura y utilizar la guía para que se centren en los contenidos que deseamos trabajar.

¿CÓMO SE CONFECCIONA LA GUÍA Y EL CONTROL DE LECTURA?

Leemos y subrayamos los contenidos matemáticos, contrastando la información con libros de texto de matemáticas, nos documentamos… y seleccionamos y redactamos las actividades que se consideren más apropiadas para el alumnado.

Observación:

- Hay que prestar atención a **la RESOLUCIÓN de 30 de junio de 2010:**

6. En la elaboración y utilización de materiales curriculares, el profesorado deberá atenerse a lo dispuesto en el artículo 32 de la Ley de Propiedad Intelectual (Texto refundido aprobado por Real Decreto Legislativo 1/1996, de 12 de abril, modificado por la Ley 23/2006, de 7 de julio), referente a la cita e ilustración de la enseñanza.

COMPETENCIAS BÁSICAS QUE AYUDA A DESARROLLAR:

Las competencias señaladas en el Real Decreto 1631/2006 son:

1. Competencia en comunicación lingüística.

En este trabajo, los alumnos tienen que leer, comprender, seleccionar información y expresarse en sus respuestas, es decir, comunicarse.

2. Competencia matemática.

Los alumnos resuelven ejercicios de cálculo, aplican métodos matemáticos y aprenden nuevos conceptos, ven aplicaciones de las potencias, el factorial de un número,…

3. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.

Los alumnos descubren el crecimiento exponencial en la naturaleza,…

4. Tratamiento de la información y competencia digital.

Manejamos la calculadora y navegamos por Internet, usamos hoja de cálculo…

5. Competencia social y ciudadana.

Los alumnos discuten entre ellos la mejor solución o la solución correcta, cooperan diciendo a otros dónde han encontrado la información,…También se dirigen al profesor con sus dudas.

6. Competencia cultural y artística.

Geográfica e históricamente, vemos la procedencia de nuestro calendario, y vemos la biografía de algunos matemáticos,…

7. Competencia para aprender a aprender.

Es un trabajo abierto, el alumno ha dado las respuestas a las preguntas concretas, pero al mismo tiempo le han surgido otras dudas que puede investigar por su cuenta.

8. Autonomía e iniciativa personal.

Cada alumno puede elegir sus fuentes de información: diccionario, enciclopedia, página web,…

EVALUACIÓN POR COMPETENCIAS BÁSICAS:

Podemos asignar a los ejercicios de la guía y del control la competencia que consideremos que le corresponde y evaluarlos por separado.

GUÍA DE LECTURA:

LA SORPRESA DE LOS NÚMEROS.

Capítulo 1: Filo.

- ¿Qué campo de la ciencia estudia la Astronomía? ¿Qué aplicaciones prácticas tiene desde la antigüedad?

- ¿Cuántos días tiene nuestro calendario anual? ¿Cuántos días tiene un año? ¿Cómo se arregla esa pequeña diferencia?

- El ángulo completo de la circunferencia mide 360°, ¿en qué unidades de medida? Existen otras unidades de medida de ángulos, ¿cómo se llaman?, ¿cómo se definen? , ¿a qué equivale la circunferencia completa en estas unidades? Y, ¿a qué equivale un ángulo recto?

- La lavadora o el coche, por ejemplo, ¿tienen algo que ver con las revoluciones? Explícalo. Nombra otras máquinas o aparatos que usen estas unidades de medida.

- Comprueba que la calculadora científica te permite trabajar con distintas unidades de medida de ángulos. Indica cuáles son y qué abreviatura en la pantalla corresponde a cada una de ellas. ¿Cuál es la equivalencia entre ellas?

- ¿Se puede definir una aritmética modular sobre la circunferencia tomando como unidad de medida los grados sexagesimales? ¿Cuál sería el módulo? ¿Qué operación realizamos para calcular, para un ángulo cualquiera, el ángulo equivalente correspondiente a la primera vuelta? ¿Cuántas clases hay?

- ¿Qué sentido de giro consideramos positivo? ¿Qué otro nombre recibe el sentido de giro negativo?

- ¿Qué ciencia estudia la medida de los ángulos y qué aplicaciones tiene?

Capítulo 2: El abuelo.

- Averigua y explica cómo son las operaciones básicas de la aritmética modular y la aritmética del reloj.

(Puedes consultar por ejemplo:

http://www.matematicaparatodos.com/varios/criptografia.pdf a partir de la página 5)

- ¿Cómo se juega a las quinielas en España? ¿Cuántas quinielas tendrías que rellenar para tener todos los resultados posibles? ¿Cuánto tendríamos que pagar? ¿Cuál ha sido el premio máximo entregado en esta temporada?

Capítulo 3: Dobla que te dobla.

- ¿Qué es una potencia? ¿Qué significa crecimiento exponencial?

- ¿Cuáles son las operaciones inversas respecto a la potencia?

Haz los ejercicios siguientes:

- Considerando la base de la potencia un número fijo, 2, construye una tabla de valores asignando los exponentes { -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 } y haz la representación gráfica sobre un sistema de ejes cartesiano. (Puedes emplear programas como geogebra http://www.geogebra.org/cms que encontraras en la red Internet, una hoja de cálculo,…, o bien, la calculadora, regla, lápiz y papel.)

- Sobre la misma gráfica, considerando el exponente fijo, 2, construye una tabla de valores asignando a la base los números { -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 }.

- A partir de qué valor es mayor la función exponencial 2^x que la polinómica x^2 .

- Enuncia las características que deduces de la gráfica de la función exponencial.
- Usando la tecla log de la calculadora (se refiere al logaritmo de base 10) construye una tabla de valores para los siguientes números: 0'001, 0'01, 0'1, 0, 1, 10, 100.
- Representa sobre el mismo sistema de ejes coordenados la gráfica de la función $y = 10^x$. Explica si existe entre estas gráficas alguna relación de simetría.

Capítulo 4: Una mitad, y otra y otra.

- ¿En qué consiste la búsqueda dicotómica?

Mi abuelo me contaba que estuvo trabajando una temporada en Barcelona. Allí había un vagabundo que pedía limosna por las calles como compensación por sus exitosas predicciones del tiempo. Decía mi abuelo que se recorría algunas calles con la predicción de buen tiempo: "Mañana hará sol", gritaba. Paseaba por otras calles gritando que iba a llover al día siguiente. Ahora debes seguir contando tú la historia.

Capítulo 5: Mensajes secretos.

- ¿Qué ciencia estudia los métodos de construir lenguajes cifrados o códigos secretos para enviar mensajes secretos?
- Describe dos técnicas diferentes para enviar mensajes secretos.
- ¿En qué situaciones es importante que una comunicación se mantenga en secreto o la información llegue íntegra?
- En la actualidad, usamos códigos numéricos, alfanuméricos y códigos de barras con el objetivo de identificar de forma inequívoca objetos y también personas:
- ¿De cuántas cifras y letras consta la matrícula de un vehículo? ¿Cuántos vehículos se pueden matricular en España con el código de identificación que se usa actualmente? ¿Podría tener cada español un vehículo con una matrícula diferente?
- Para asegurarse de que un NIF de una persona se ha escrito correctamente ¿qué operaciones hay que hacer para su comprobación? Haz las operaciones para comprobar que tu NIF es correcto.

(Puedes verlo en http://es.wikibooks.org/wiki/Algoritmo_para_obtener_la_letra_del_NIF)

- ¿Qué información contiene el código de barras de un producto?
- Explica el algoritmo del dígito de control del código de barras. Aplica el algoritmo del dígito de control al código de barras del paquete de la leche que tomas habitualmente, por ejemplo. Elige un producto del mismo fabricante (misma marca) anota su código de barras y comprueba que coinciden los dígitos correspondientes.

(Puedes consultar

http://www.monografias.com/trabajos42/codigo-de-barras/codigo-de-barras4.shtml)

Capítulo 6: Anagramas con los Peanuts.

- ¿Qué es el factorial de un número natural?¿Con qué signo se indica esta operación? ¿Cuánto vale factorial de cero?

- ¿Qué es una permutación? ¿Qué son las permutaciones de m elementos?

- Cada vez que empezamos una partida de cartas, primero barajamos las 40 cartas para que no nos vuelvan a salir las mismas cartas, es decir, en el mismo orden. ¿Cuál es el número total de permutaciones que podemos obtener con las 40 cartas? Explica por qué podemos estar seguros de que nunca jugaremos la misma partida.

Capítulo 7: Lotería y pastelitos

- ¿Qué es la lotería genovesa? ¿Cómo se calcula el número de resultados posibles? Comprueba que el número combinatorio $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\cdot(m-n)!}$ nos da el mismo resultado tomando m=90 y n=5.

- Y si jugamos al gordo de la primitiva, ¿cuántos boletos tendríamos que rellenar para tener todas las combinaciones posibles? ¿Cuánto tendríamos que pagar? ¿Cuál ha sido el premio máximo entregado en esta temporada?

- ¿Qué son las combinaciones de m elementos tomados de n en n? ¿Cómo se calculan?

- Si consideramos que el triángulo de Tartaglia empieza en la fila 0 y leemos las columnas inclinadas empezando por el lado izquierdo de unos, comprueba que cada número del triángulo coincide con el valor del número combinatorio m sobre n, donde m es la fila y n es la columna correspondiente a ese número. Escribe algún ejemplo.

- Escribe una breve biografía de Tartaglia.

- Escribe una breve biografía de Pascal.

Capítulo 8: Gafas y rayos X.

- Haz un esquema de los campos de aplicación de la función exponencial y pon un ejemplo de cada uno de ellos.

Capítulo 9: Brindemos, brindemos.

- En el triángulo de Tartaglia, fíjate que cada fila corresponde a los coeficientes del desarrollo del binomio de Newton de exponente igual al número de esa fila. Lo vamos comprobando:

$$(a+b)^1 = 1\cdot a + 1\cdot b$$

$$(a+b)^2 = 1\cdot a^2 + 2\cdot a^1\cdot b^1 + 1\cdot b^2$$

$$(a+b)^3 = 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2\cdot b^1 + 3\cdot a^1\cdot b^2 + 1\cdot b^3$$

Sabiendo que $b^0 = 1, a^0 = 1, b^1 = b, a^1 = a$ y sustituyendo los coeficientes numéricos por los números combinatorios podemos reescribir el binomio:

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} \cdot a^{3-0} \cdot b^0 + \binom{3}{1} \cdot a^{3-1} \cdot b^1 + \binom{3}{2} \cdot a^{3-2} \cdot b^2 + \binom{3}{3} \cdot a^{3-3} \cdot b^3$$

Desarrolla $(x+1)^4 =$

- ¿Cómo se calcula la probabilidad de un suceso? Si tuvieras que apostar a los dados, ¿por qué número apostarías si el juego consiste en lanzar dos dados y sumar los puntos? Puedes empezar usando un diagrama en árbol o una tabla de sumar.

Capítulo 10: Princesas y silogismos.

- ¿Qué operaciones se pueden definir entre conjuntos? ¿Qué propiedades cumplen?
- ¿Qué es un silogismo? ¿Cómo explica Euler los silogismos?
- Haz una breve biografía de Euler.
- Haz una breve biografía de Venn.

Capítulo 11: Objetivo subjetivo.

- ¿Qué es una proposición lógica? ¿Con qué números se indica o se corresponde el valor verdadero y el valor falso?
- Escribe algunos conectores lógicos. ¿Qué función desarrollan los conectores lógicos?
- Usando el conector lógico "o", que es la disyunción, construye y resuelve la tabla de verdad con las proposiciones:

A: Hoy es viernes.

B: Hoy es el último día del mes.

C: Hoy es viernes o es el último día del mes.

- En un diagrama de Euler-Venn colorea el contorno del conjunto C y escribe el operador entre conjuntos que a partir de A y B da como resultado el conjunto C.

(Puedes ir al capítulo 13 para ayudarte en la respuesta.)

Capítulo 12: Cuidado con la prensa.

- El comportamiento del circuito eléctrico en serie corresponde con la tabla de verdad de la conjunción. Dibuja un esquema de circuito eléctrico que se pueda corresponder con la tabla de verdad de la disyunción.
- ¿Cómo se llama la máquina, que consiguió construir Blaire Pascal, capaz de realizar las cuatro operaciones básicas?
- Haz una breve biografía de Goltfried Leibniz.

Capítulo 13: En el autobús con un amigo.

- ¿Cómo funcionan los ordenadores? ¿Qué tipo de operaciones realizan?
- ¿Cómo se llaman los componentes materiales del ordenador?
- ¿Qué es el álgebra booleana?
- ¿Quién fue George Boole?

Capítulo 14: Si falta gasolina.

- ¿Qué es el *modus ponens* y el *modus tollens*?

Capítulo 15: ¡Cuántos somos!

- ¿Qué es la estadística?
- Define las medidas de centralización: la media aritmética, valor modal o moda y valor mediano o mediana.
- Nombra aplicaciones actuales y habituales de la estadística.
- ¿Qué herramienta ha favorecido el desarrollo y aplicación de la estadística?

Capítulo 16: Mario, Roco y Fabio.

- Define las medidas de dispersión: campo de variación, desviación media absoluta y desviación típica.
- Calcula la media aritmética de la clase de la nota obtenida en el último examen, calcula la desviación típica e interpreta los resultados.

Capítulo 17: Ocho de cada diez cocineros.

- ¿Qué es la estadística descriptiva? ¿Cuál es su objetivo?
- ¿Qué es la estadística inductiva, la inferencia estadística?

Capítulo 18: Todos bajo la misma campana.

- Elabora una tabla que represente las medidas de la altura de los alumnos de tu clase con sus frecuencias absolutas, relativas y porcentajes. Toma intervalos de amplitud 5cm comenzando por ejemplo por 150, como en este ejemplo:

Alturas	F. absolutas	F. relativas	Porcentajes
[150, 155)	3	0,12	12%
[155, 160)	7	0,28	28%
[160, 165)	6	0,24	24%
[165, 170)	4	0,16	16%
[170, 175)	5	0,2	20%

Haz un gráfico con estos valores, un histograma, construye el polígono de frecuencias y analiza el grado de concentración que presentan los valores alrededor de la zona central de la distribución, es decir, describe la forma que tiene la curva que se obtiene.

Puedes utilizar una hoja de cálculo para obtener los gráficos.

TEMAS QUE TRATA EL LIBRO:

Aritmética modular.

Trigonometría.

Combinatoria.

Potencias.

Funciones exponencial y logarítmica.

Teoría de grafos.

Criptografía.

Triángulo de Tartaglia.

Probabilidad.

Lógica.

Teoría de conjuntos.

Álgebra de Boole.

Estadística.

COMENTARIOS:

También se puede preparar la lista de preguntas y ejercicios en colaboración con los departamentos de Física, Química, Biología, Plástica, Tecnología, Historia... O con los departamentos de Lengua y literatura.

Otros trabajos sobre la lectura pueden ser un resumen, exponer en viñetas cada capítulo en colaboración con el departamento de plástica, escenificar alguno de los capítulos en una obra de teatro en colaboración con el departamento de lengua y literatura castellana,... En la semana cultural, por ejemplo.

También se puede trabajar el libro en el Taller de matemáticas, en la asignatura de trabajo monográfico, con los grupos de altas capacidades,...

Respecto a la distribución temporal:

Podemos dividir el libro en dos partes y evaluarlo en la primera y tercera evaluación aprovechando que a principio de curso es poca la carga de trabajo acumulada para los alumnos y las vacaciones de Pascua, por ejemplo.

Podemos trabajar los capítulos que sean de interés dentro de cada tema correspondiente de la programación.

También podemos repartir los temas entre las asignaturas implicadas.

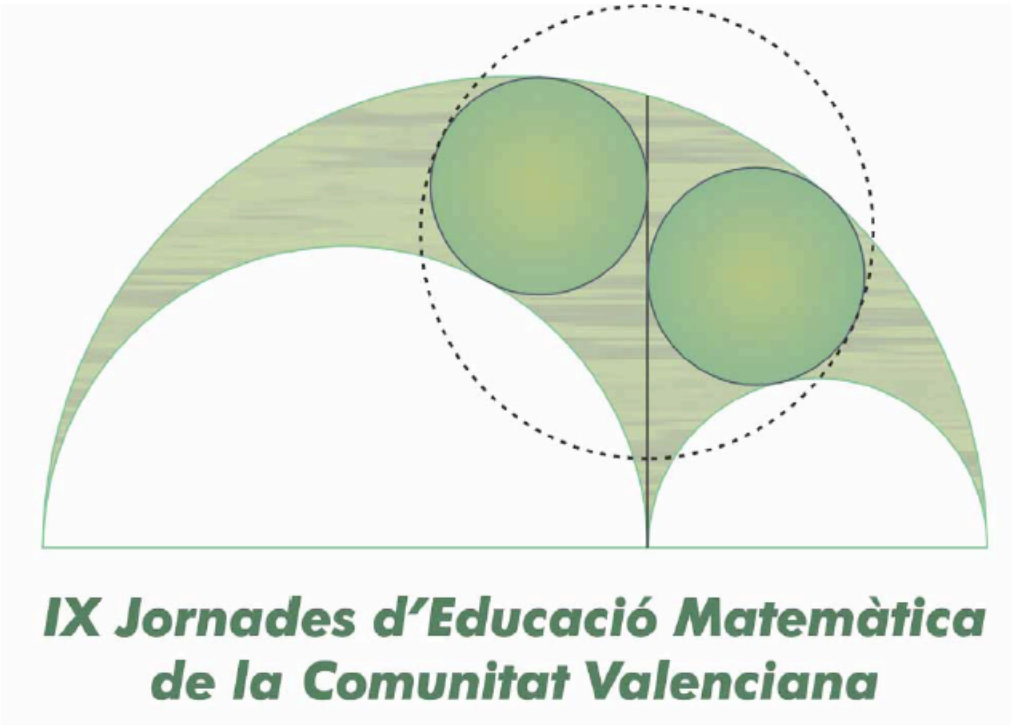
HISTORIA DE UN LOGOTIPO: DE CÓMO LOS OJOS DE ARQUÍMEDES NOS PERMITEN "VER" LAS MATEMÁTICAS CON OTRA MIRADA

Eduardo Llopis

1. INTRODUCCIÓN

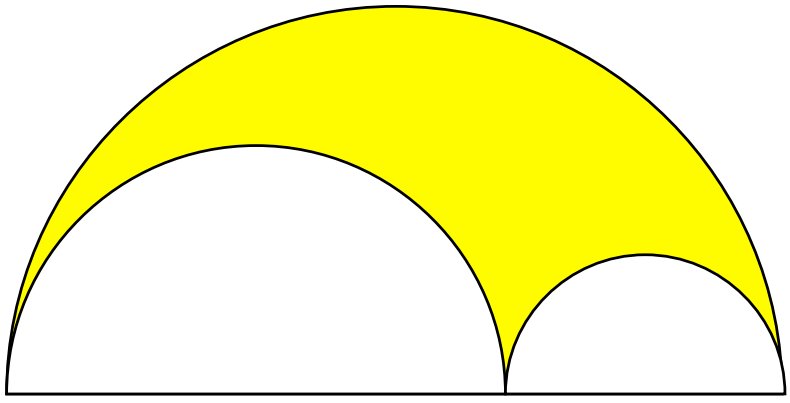
El objeto de esta comunicación es explicar cómo surgió la idea del logotipo.

El título de las jornadas me pareció atractivo (Matemàtiques un altra mirada) y pensé en algo que tuviera que ver con la mirada. Buscando y buscando me encontré casi de forma casual con la imagen siguiente y con un título OJOS DE ARQUÍMEDES.



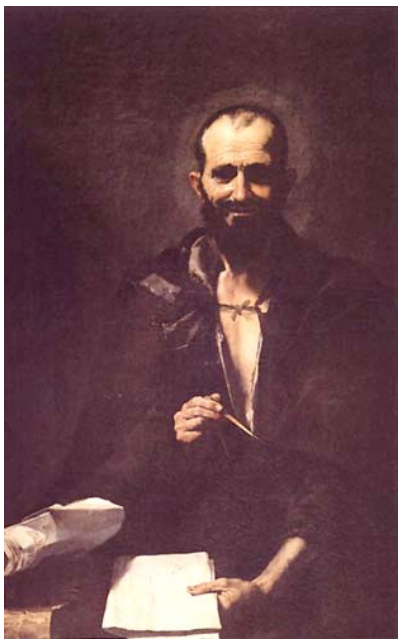
Me pareció interesante por dos motivos, por un lado el que fuera Arquímedes y por otro que fueran los ojos de Arquímedes. ¿Qué mejor manera de sintetizar en una imagen las dos ideas de mirada y matemáticas?

Empecemos por definir lo qué es el arbelos. La siguiente imagen se conoce con el nombre de el arbelos y está formada por 3 semicircunferencias tangentes dos a dos.



La relación entre Arquímedes y el arbelos nos va a permitir que estudiemos tres aspectos que motivaron la elección del logotipo. En las dos siguientes imágenes observamos dos recreaciones sobre Arquímedes.

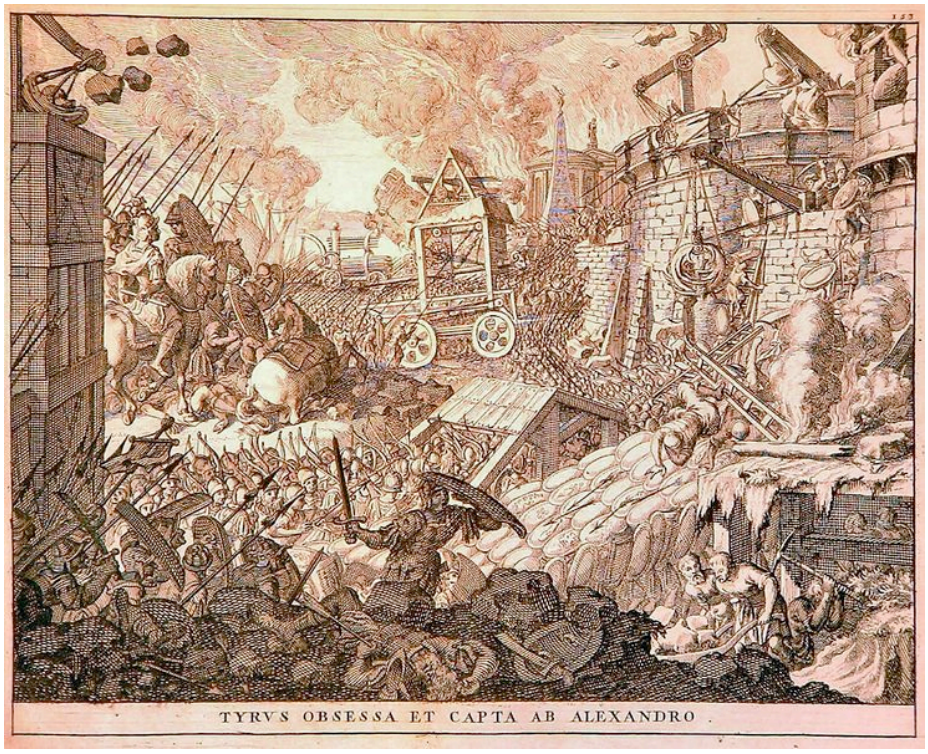


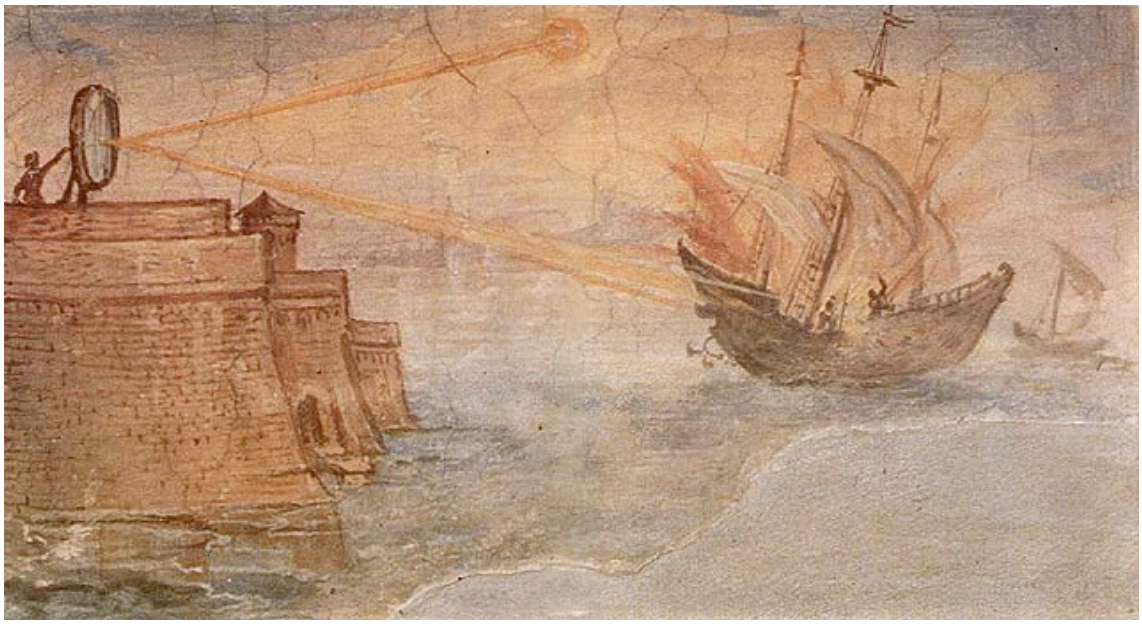


2. EL ASPECTO PRÁCTICO

De Arquímedes de Siracusa se conocen pocos datos sobre su vida, sólo de forma indirecta por la historia de la vida de Marcelo, el general romano, escrita por Plutarco. Se sabe que nació en el año 287 ac y que murió en el año 212 ac. Estudio en Alejandría. Tuvo relación con Eratóstenes y con Conón, un sucesor de Euclides. Fue llamado por su rey Hieron de Siracusa durante el asedio de la ciudad de Siracusa por los romanos y participó activamente en su defensa inventando numerosos ingenios de guerra para mantener alejado al enemigo, tales como catapultas para lanzar piedras, sogas, poleas, lentes para reflejar los rayos solares e incendiar las velas de los barcos, garfios para levantar barcos enemigos y dejarlos caer.

En las dos siguientes imágenes se observa una recreación de los inventos de Arquímedes durante el asedio de Siracusa.





Otro utensilio que inventó Arquímedes, y que se sigue usando actualmente, es lo que se llama el tornillo Arquímedes. Un utensilio que aún se usa para subir agua o para subir grano, basado en una espiral. Come se observa en la siguiente diapositiva.



Sin embargo Siracusa cayó en poder de los romanos y durante el saqueo Marcelo dio órdenes expresas de no matarlo, que se le respetara la vida, pero un soldado romano lo asesinó.

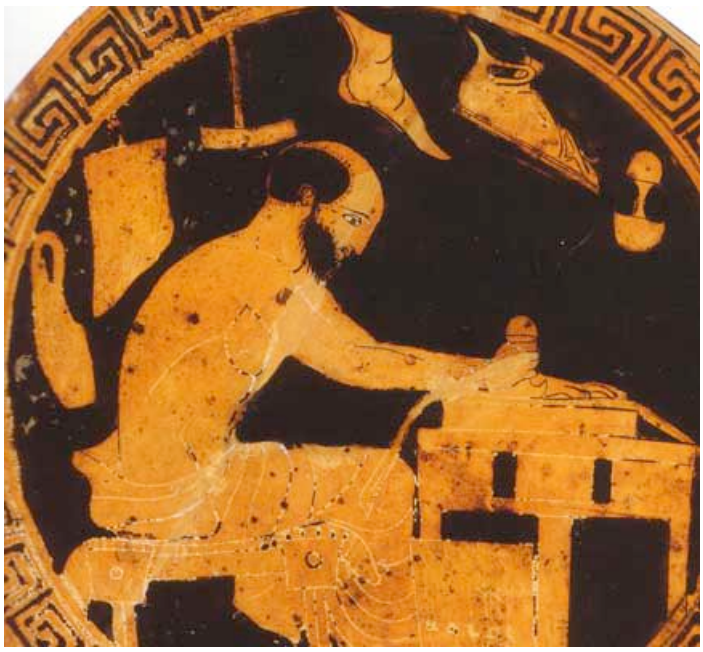


En Arquímedes nos encontramos por este lado, en un creador de inventos mecánicos. Un ingeniero.

Uno de los aspectos más importantes que se da hoy en día a las matemáticas es la de su carácter práctico, la de ser algo que se usa.

Comentemos algunos aspectos respecto del carácter práctico del arbelos.

En la siguiente imagen lo podemos ver una vasija griega, en la que se observa el cuchillo de zapatero o arbelos.



En la siguiente diapositiva podemos ver otra imagen del cuchillo de zapatero.



La siguiente imagen muestra un instrumento de labranza encontrado en Agres, a los pies de la sierra Mariola. Según me contaron, los labradores lo usaban para romper los terrones cuando labraban la tierra. Como veis tiene la forma del arbelos.



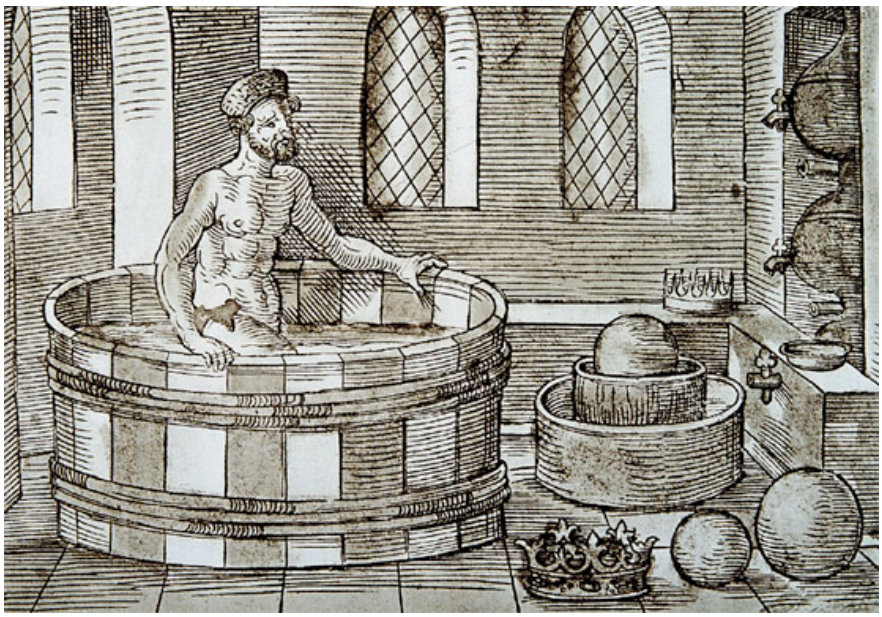
Lo que Arquímedes pensaba sobre sus inventos prácticos y lo que ahora llamaríamos tecnología, lo podemos sintetizar en esta cita de Plutarco:

"estaba en posesión de un espíritu tan alto, un alma tan profunda y una riqueza tal de conocimientos que a pesar de que estos inventos le habrían proporcionado la celebridad de tener más que sabiduría humana, consideraba que dichos trabajos eran innobles y viles como todo trabajo mecánico y todo tipo de arte que se puede usar y aprovechar directamente, y por ello centró su mayor ambición en aquellas especulaciones cuya belleza y sutileza no añaden nada a las necesidades habituales de la vida"

3. EL ASPECTO IMAGINATIVO

El siguiente aspecto que quiero tratar es el aspecto es el imaginativo.

Cuenta la leyenda que el rey Herón sospechando de un orfebre al que le había encargado una corona de oro, sus sospechas eran en el sentido de haber cambiado parte del oro por plata, le pidió a su amigo Arquímedes, que resolviera el problema sin estropear la corona tan bien esculpida. Arquímedes resolvió el problema, dándose cuenta del fraude, y se cuenta que en ese momento pronunció la celebre palabra Eureka, Eureka (lo encontré). La solución imaginativa fue comparando las densidades.



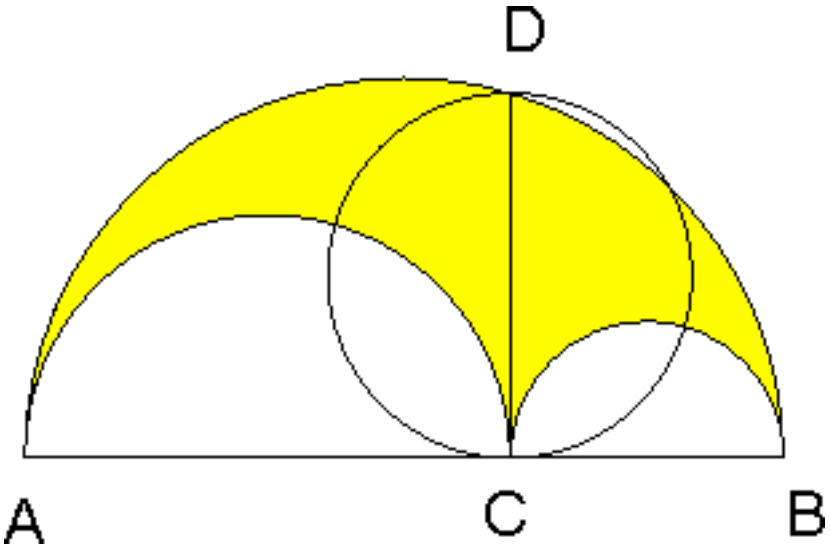
ALGUNAS PROPIEDADES " IMAGINATIVAS" DEL ARBELOS

Para mostrar el carácter imaginativo de las matemáticas veamos algunas de las propiedades curiosas que se nos muestran en el arbelos.

El arbelos aparece en el libro de los lemas de Arquímedes. Este tratado es la reunión de diversas proposiciones de geometría plana, sin mayor conexión entre sí. Es probable que algunas de las proposiciones allí incluidas no sean de Arquímedes, sino de origen árabe.

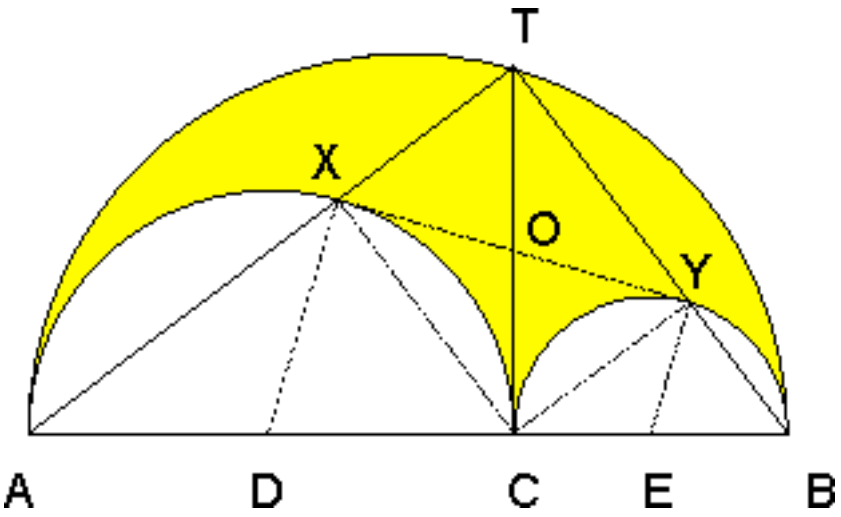
PROPIEDAD 1

El área de la zona sombreada en amarillo coincide con el área del círculo de diámetro CD



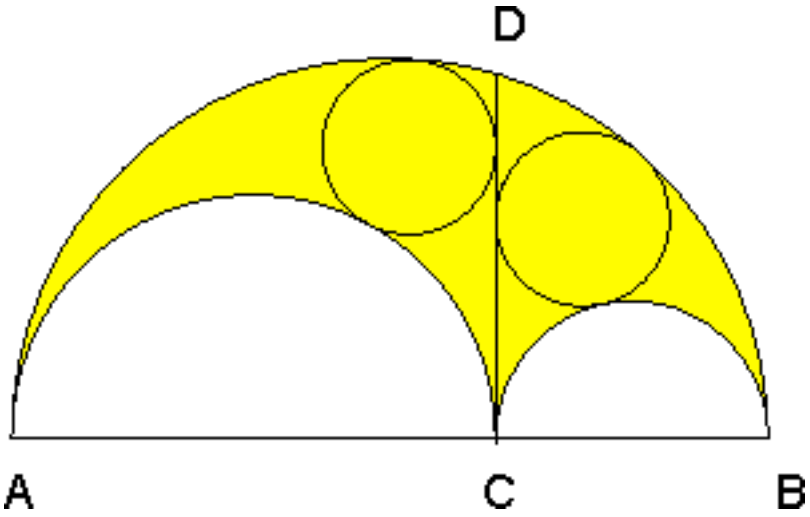
PROPIEDAD 2

1) El cuadrilátero XCYT es un rectángulo
2) XY es tangente a los círculo de diámetro AC y BC



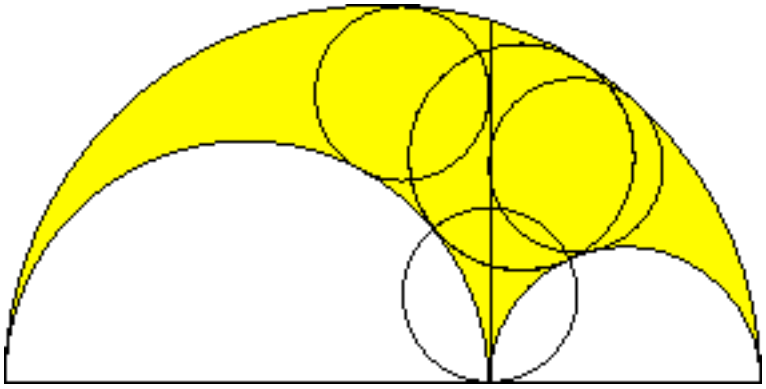
PROPIEDAD 3

Los dos círculos pequeños tienen el mismo radio



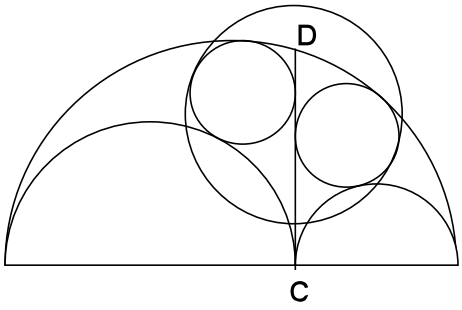
PROPIEDAD 4

En 1974 el dentista y matemático aficionado Leon Bankoff publicó un artículo en el que se demostraba que existía un tercer círculo relacionado con los otros dos, y el radio de ese tercer círculo coincide con los dos primeros.



PROPIEDAD 5

El círculo mínimo que contiene a los dos círculos de Arquímedes tiene por diámetro una longitud igual al segmento CD, y por lo tanto tiene la misma área que el arbelos.



Qué mejor manera de expresar la importancia que tiene la imaginación que mediante las siguientes frases:

"La imaginación es más importante que el conocimiento. Mientras que el conocimiento se limita a todo lo que ahora conocemos y entendemos, la imaginación abarca el mundo entero, todo lo que en el futuro se conocerá y entenderá".

Albert Einstein

No hay modo de entender bien al hombre si no se repara en que la Matemática brota de la misma raíz que la poesía, del don imaginativo.

José Ortega y Gasset

EL ASPECTO ABSTRACTO DE LAS MATEMÁTICAS

Intentemos ahora comentar uno de los descubrimientos más interesantes sobre la obra de Arquímedes.

En 1906 Heiberg tuvo noticia de la aparición en Estambul de un palimpsesto de contenido matemático.



" Un palimpsesto es un manuscrito antiguo que conserva huellas de una escritura anterior que fue borrada, para presentar otra versión de un hecho. "

El palimpsesto de 185 páginas se estudió mediante técnicas fotográficas y se vio que antes habían estado escritas obras de Arquímedes. Obras como "Sobre la esfera y el cilindro", algunas partes de "SOBRE LAS ESPIRALES" y "La medida del circulo", "Sobre el equilibrio de los planos" , y el gran descubrimiento fue la obra de "El Método relativo a los teoremas mecánicos" obra inédita hasta ese momento. Este palimpsesto había sido lavado en el siglo XIII para escribir encima textos religiosos.

En el año 1998 el palimpsesto fue vendido por una casa de subastas americana por 2,2 millones de dólares.

El Método empieza con una carta a Eratóstenes seguida de 10 lemas y 16 proposiciones. En el resto de trabajos de Arquímedes se enuncian y demuestran las proposiciones, pero no indica nada sobre la forma de obtener esos resultados.

Para hacernos una idea de la inquietud sobre el procedimiento por el que había llegado a los resultados Arquímedes, podemos resaltarla con la siguiente frase de Barrow:

«*Al no poder imaginar qué ingenio mortal pueda llegar a tanto mediante la virtud del razonamiento, estoy seguro que Arquímedes se vio ayudado por el Álgebra, a la que conocía en secreto y que ocultaba de forma estudiada*.»

También Wallis, que tuvo a su cuidado una edición de las Obras de Arquímedes, publicada en Oxford en 1676, escribía:

«*Al parecer Arquímedes ocultó adrede las huellas de su investigación, como si hubiera sepultado para la posteridad el secreto de su método de investigación*.»

Sin embargo En el *Método*, Arquímedes describió la forma en que descubrió muchos de sus resultados geométricos:

"... ciertas cosas me quedaron claras por un método mecánico, aunque tenían que ser probadas por la geometría posteriormente porque su investigación por el método dicho no proporcionaba una prueba real. Pero esto es por supuesto más fácil, cuando hemos previamente adquirido, por el método, algún conocimiento de las preguntas, para suministrar la prueba que es encontrarla sin ningún conocimiento previo"

5. FINAL

La elección de este logotipo nos muestra estos tres aspectos a mi entender muy importantes en matemáticas: el aspecto práctico que con el paso del tiempo se ha ido valorando más, el aspecto imaginativo, las matemáticas recurren en muchas ocasiones a soluciones imaginativas de los problemas, ¿qué mayor imaginación que la de Arquímedes a la hora de resolver problemas? , y por último el aspecto abstracto, a partir de la experimentación Arquímedes nos inicia en el proceso de abstracción y demostración de las afirmaciones matemáticas.

Me gustaría terminar con la siguiente cita de Arquímedes

«[...] *Estoy convencido de que* [*EL MÉTODO*] *puede representar una contribución no poco provechosa a la investigación matemática. Pues supongo que algunos estudiosos, contemporáneos o futuros, llegarán a encontrar, por el método expuesto, otros teoremas que a mí no se me han ocurrido todavía*.»

Nota final: Las imágenes de cuadros todas han sido bajadas de Internet, los dibujos son de elaboración propia.

PEL·LÍCULA: 21 BLACK JACK

Teresa Arabí Arabí
Vicent Chorro Cabrera
Loreto Signes Ramos

Basada en la història real de cinc estudiants de l'Institut Tecnològic de Massachusetts que es convertiren en mestres en l'art de comptar cartes i s'emportaren milions de dòlars dels casinos de Las Vegas.

Escena 4:

Professor: Qui pot explicar el mètode de Newton i per a que s'utilitza?

Alumne1: Es pot utilitzar per a resoldre equacions no lineals

Professor: M'impressiona la seua resposta perquè aquesta classe s'anomena equacions no lineals.....

Problema del presentador de concursos:

Professor: Imagina que vas a concursar a un programa de televisió i se t'ofereix escollir entre tres portes distintes, darrere d'una d'aquestes portes hi ha un cotxe nou i darrere de les altres cabres, quina porta escolliries?

Alumne: La porta número 1.

Professor: Ara el presentador, que per cert, sap el que hi ha darrere de totes les portes decideix obrir una altra porta, suposem que escull la número 3, darrere la qual apareix una cabra. I ara el presentador diu: segueixes amb la porta número 1 o canvies a la 2?

TU QUE FARIES ? EXPLICA PERQUÈ.

Introducció a la probabilitat

Per començar, un poquet d'història

En la societat francesa del segle XVII, força aficionada a tot tipus de jocs d'atzar, apareix un noble francés anomenat Antoine Gambaud, cavaller De Meré (1610-1685). El qual, va cridar l'atenció del matemàtic Blaise Pascal (1623-1662) amb alguns problemes aparentment contradictoris.

Un d'eixos problemes consistia en tirar dos daus 24 vegades amb l'aposta d'aconseguir, almenys un sis doble. De Meré pensava guanyar i, malgrat això, perdia.

Un altre. Per què en el joc de tirar tres daus és més freqüent obtenir la suma 10 que la suma 9 si les dues sumes apareixen en sis casos:

Suma 9: 6+2+1, 5+3+1, 5+2+2, 4+4+1, 4+3+2, 3+3+3

Suma 10: 6+3+1, 6+2+2, 5+4+1, 5+3+2, 4+4+2, 4+3+3

Pascal va comunicar per carta, a un altre matemàtic francés Pierre de Fermat(1601-1665) aquests problemes i tots dos els van resoldre separadament i amb demostracions diferents, Pascal va utilitzar el triangle aritmètic, mentre que Fermat va emprar el càlcul combinatori.

La correspondència privada entre aquests dos grans matemàtics, Pascal i Fermat, es considerada com l'origen de la teoria de la probabilitat.

QUE ÉS LA PROBABILITAT?

En quins contextos utilitzem la paraula probabilitat, probable, molt probable... ?

Classifiquem els experiments en deterministes o aleatoris.

COMENCEM ESTUDIANT EL SUCCÉS ALEATORI DEL LLANÇAMENT D'UN DAU CÙBIC:

Llancem el dau 50 vegades i comptem les vegades que apareix l'1, el 2, el 3, el 4, el 5 i el 6.

1 =

2 =

3 =

4 =

5 =

6 =

Definim la probabilitat a posteriori

$$P(n) = \frac{Vegades\ que\ ha\ eixit\ el\ nombre\ n}{Vegades\ que\ hem\ llançant\ el\ dau}$$

Calculem la probabilitat de cada nombre

P(1), P(2), P(3), P(4), P(5) i P(6)

Definim la probabilitat a priori

$$P(n) = \frac{Cassos\ \ favorables}{Cassos\ \ possibles}$$

LA CARRERA DE CAVALLS

A continuació anem a veure un joc que usa la probabilitat. Per començar aquest joc, cada jugador ha de tenir una fitxa de color diferent.

Es juga amb dos daus (de 6 cares, com els de parxís) i amb el taulell que teniu a la següent pàgina.

Per jugar, heu de seguir les següents instruccions, que són molt senzilles:

1. Cada jugador escull un número dels que hi ha a la part de sota del taulell (de l'1 al 12) i hi col·loca la seva fitxa al damunt (no podeu repetir, cada un ha d'escollir un número diferent).

2. Aleshores tireu els daus (tots dos alhora) per torns, una vegada cada un.

3. Cada vegada que tireu els daus, heu de sumar els dos números que us hagin sortit. Si aquesta suma coincideix amb el número on tens la teva fitxa, avances una posició.

4. Guanya qui arriba primer al final del taulell.

Jugueu unes quantes partides i després intenteu respondre aquestes preguntes:

a) Que li passa al jugador que hagi escollit el número 1? Per què?

b) Dels números que hi ha des del 2 fins al 12, és igual quin nombre escolliu per guanyar?

c) Amb les xifres que hi ha als daus, compteu quantes sumes diferents ens poden sortir (us serà més fàcil si les escriviu).

d) Penseu ara estratègies per guanyar; quins són els nombres amb més probabilitats de guanyar? (Penseu amb totes les sumes possibles que poden donar un mateix número)

El joc de l'aigua.

Instruccions del joc: Cada jugador disposa de 15 fitxes (poden ser pedretes o llenties) que ha de posar distribuïdes per les caselles, de la seva banda, que vulgui, Després, per torns, tiren dos daus i al número major han de restar el menor. Una fitxa de la casella del valor resultant anirà a parar a l'aigua. Guanyarà el primer jugador que aconsegueixi tenir totes les seves fitxes a l'aigua.

Abans de jugar i de fer cap càlcul contesta: Creus que hi ha alguna manera de posar les fitxes amb la que sigui més fàcil guanyar?

Juga amb el teu company unes quantes vegades.

Després d'observar amb el joc. Com creus que és millor posar les fitxes?

Construeix una **taula de doble entrada** o bé un diagrama en arbre per saber quins són el possibles resultats. Quants n'hi ha?. Són equiprobables?

Calcula quina és la probabilitat de cada una de les caselles

Després de fer l'estudi analític contesta, ara quina és la millor manera de posar les fitxes.

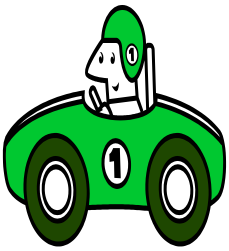
TORNEM A LA PEL·LÍCULA 21 BLACKJACK

Fem una simulació a la classe:

Podem agafar tres cavallets de l'aula de dibuix per simular les portes

Porta 1		Porta 2		Porta 3

Posem darrere d'una de les portes un full amb un cotxe i al darrere de les altres dos un full amb una carabassa a cadascuna





Demanem als alumnes que trien una de les portes i els mostrem una de les altres on hi ha una carabassa, i els oferim si volen o no canviar, i vegem on està el cotxe.

Repetim l'experiència amb tots els alumnes de la classe i comptem les vegades que guanyem si canviem i les que guanyem si ens quedem en la porta primera:

Guanya:

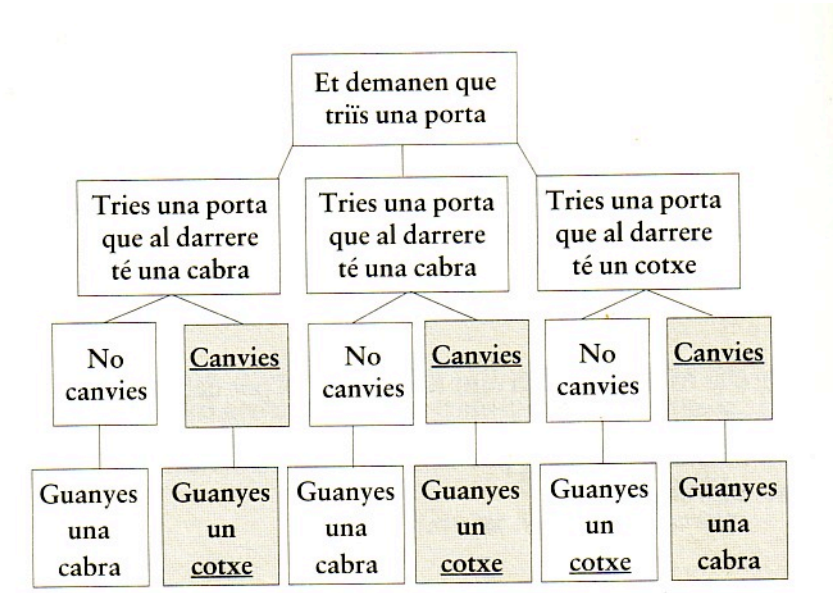
Canvia	
No canvia	

Aquest problema s'anomena el **PROBLEMA DE MONTY HALL** és un problema de probabilitat que està inspirat en un famós concurs de televisió dels Estats Units Let's Make a Deal (Fem un tracte) que es va emetre entre 1963 i 1986. El seu nom prové del presentador Monty Hall.

Què és el que hem de fer per tenir més probabilitats de guanyar el cotxe?

Sempre s'ha de canviar de porta perquè tenim 2 possibilitats d'entre 3 que darrere aquesta porta estiga el cotxe.

Si fem un diagrama de totes les possibilitat tenim:



Vegem doncs, que si canviem 2 de cada 3 vegades guanyes un cotxe. I si no canvies, només aconsegueixes el cotxe 1 de cada tres vegades.

Un altra forma de vore-ho:

CCA	**CAC**	ACC	Açò es el que hi ha en cada porta
T	**T**	T	Triem la 1ª porta
CCA	CAC	**ACC**	
T	T	**T**	Triem la 2ª porta
CCA	**CAC**	**ACC**	
T	**T**	**T**	Triem la 3ª porta

Dels 9 casos possibles, els que hem posat en negreta (6) guanyem si canviem i els en els altres 3 guanyem si no canviem.

P(de guanyar si canviem) = 6/9

P(de guanyar si ens mantenim) = 3/9

Una història famosa sobre el problema de Monty Hall.

En una revista americana anomenada Parade publicaven una columna titulada Pregunteu a la Marilyn. I aquesta columna la escrivia Marilyn vos Savant i a la revista deien que tenia el coeficient intel·lectual més elevat del món i que constava al llibre al Llibre Guinness dels rècords. I a la columna responia a preguntes matemàtiques que li demanaven els lectors. I el mes de setembre de 1990 Craig F. Whitaker de Colúmbia, Maryland li va enviar la següent pregunta:

Ets en un concurs de televisió. En el concurs, l'objectiu és guanyar un cotxe. El presentador t'ensenya tres portes. Diu que hi ha .....

La Marylin von Savant va dir que sempre s'havia de canviar i triar l'altra porta perquè tens 2 possibilitats entre 3 que darrere aquesta porta hi haja un cotxe.

Però si fas servir la intuïció penses que hi ha un 50 % de possibilitats que el cotxe estiga darrere de qualsevol de les dues portes.

Un munt de gent va escriure a la revista per a dir que la Marilyn von Savant s'havia equivocat, malgrat que va explicar molt acuradament per què tenia raó. El 92 % de les cartes que va rebre deien que s'equivocava i un munt d'aquestes cartes eren de matemàtics i científics. Ací teniu algunes de les coses que deien:

Em preocupa molt la manca d'aptituds matemàtiques del públic en general. Sisplau, contribueixi a minvar-la admetent el seu error.

Dr Robert Sachs

George Mason University

Ja hi ha prou analfabetisme matemàtic en aquest país i no cal que la persona amb el coeficient intel·lectual més elevat del món també el predique. Quina vergonya.

Dr. Scott Smith,

Universidad de Florida

Em deixa parat que després que almenys tres matemàtics l'hagen corregida encara no veja el seu error.

Kent Ford

Dickinson State University

Estic segur que rebrà moltes cartes d'alumnes d'instituts i d'universitats. Potser hauria de conservar algunes de les seues adreces perquè l'ajuden a escriure les pròximes columnes.

Dr. W. Robert Smith

Georgia State University

S'equivoca sense cap mena de dubte...Quants matemàtics irats calen per fer-la rectificar?

Dr. E. Ay Bobo,

Universitat de Georgetown

Si tots aquests doctors s'equivocaren, el país tindria un problema molt greu.

Dr. Everett Harman

Institut de recerca de les Forces Armades.

Però la Marilyn vos Savant tenia raó com hem demostrat abans.

Del llibre: " El curiós incident del gos a mitjanit" de Mark Haddon.

MATERIALES Y RECURSOS PARA EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA

Mauricio Contreras del Rincón
I. E. S. Benicalap (València)
Universitat de València

1.- COMPETENCIA MATEMÁTICA

Según la LOE, "los objetivos de la Educación Secundaria pretenden lograr la adquisición de aquellas competencias matemáticas que se consideran básicas para un ciudadano del siglo XXI."

Según el informe PISA 2003 (INECSE, 2005) la "competencia matemática" se refiere a las capacidades individuales de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones.

La denominada "competencia matemática" muestra que un estudiante está matemáticamente alfabetizado si es capaz de enfrentarse con los problemas cotidianos más variados por medio de las matemáticas, si se atreve a pensar con ideas matemáticas.

La vida cotidiana implica multitud de tareas que incluyen conceptos cuantitativos, espaciales, probabilísticos, relacionales u otros. La competencia matemática se ocupa del modo en que los estudiantes actúan cuando hay que resolver problemas de la vida diaria.

Usar e implicarse con las matemáticas significa no sólo utilizar las matemáticas y resolver problemas matemáticos sino también comunicar, relacionarse con, valorar e incluso, apreciar y disfrutar con las matemáticas.

Aprender a matematizar debe ser un objetivo básico para todos los estudiantes. La actividad matemática se concreta en la actividad de matematización, que se identifica con la resolución de problemas.

2.- EL PROYECTO DE INNOVACIÓN DEL IES BENICALAP

La finalidad de este Proyecto es diseñar, elaborar y experimentar un currículo realista que parta de la situación actual de los estudiantes y mejore su nivel en matemáticas, favoreciendo el desarrollo de la competencia matemática mediante el uso de materiales manipulables, juegos y recursos tecnológicos apropiados. En particular se pretende:

- Identificar las matemáticas que conocen los alumnos, las que usan de manera cotidiana en su vida diaria, en y fuera de las aulas.

- Identificar aquellos contenidos matemáticos que se consideran esenciales para el desarrollo de la competencia matemática de losalumnos.

- Investigar qué tipo de materiales (curriculares y manipulables) y recursos (audiovisuales, TIC ...) pueden facilitar el desarrollo de la competencia matemática a partir de la situación personal de cada estudiante.

- Investigar diferentes tipos de metodologías para conseguir el incremento de la competencia matemática de los alumnos y lograr una disminución del fracaso escolar.

- Elaborar materiales curriculares, y experimentar en el aula los materiales elaborados, analizando las interacciones que se producen entre los estudiantes, el material y el profesor, y valorando la utilidad del material para lograr el objetivo propuesto.

Desde el punto de vista de las matemáticas, el objetivo básico de este Proyecto es conseguir incrementar las competencias matemáticas de los estudiantes, especialmente, la competencia de modelización, es decir, la capacidad para traducir un problema real al lenguaje matemático, construir el modelo matemático adecuado a la situación, interpretar de manera adecuada los parámetros del modelo para validarlo y saberlo utilizar para resolver el problema inicial, criticando la solución e intentando su generalización.

2.1. Contenido Matemático

El punto de vista que adoptamos en este Proyecto coincide con el informe PISA en el que se establecen cuatro categorías de contenidos matemáticos:

- Cantidad.
- Espacio y forma
- Cambio y relaciones
- Incertidumbre

2.2. Tipos de Competencias

Las competencias que se consideran en este Proyecto son las mismas que las propuestas en el informe PISA, añadiendo una relativa al uso de la tecnología. Basándonos en los actuales objetivos y criterios de evaluación, en este Proyecto se establecen dos grupos de competencias matemáticas en la ESO: a) competencias de contenidos y b) competencias de procesos. Enumeramos a continuación dichas competencias. Entre paréntesis aparece el número de expectativas relacionadas con cada competencia:

COMPETENCIAS DE PROCESOS	COMPETENCIAS DE CONTENIDOS
Pensar y razonar (4)	Cantidad (3)
Argumentar (2)	Espacio y forma (6)
Comunicar (7)	Cambio y relaciones (4)
Modelizar (3)	Azar e incertidumbre (4)
Plantear y resolver problemas (5)	
Representar (4)	
Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico de las operaciones (2)	
Usar de manera eficaz la tecnología (3)	

2.2.1. COMPETENCIAS DE CONTENIDOS

CANTIDAD

Se refiere a la capacidad de los estudiantes para:

- Comprender los números, las diferentes maneras de representarlos, las relaciones entre ellos y los conjuntos numéricos.
- Comprender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras, aplicando este conocimiento a la resolución de problemas en contexto.
- Calcular con fluidez (mentalmente, por escrito o con calculadora) y hacer estimaciones razonables en función del contexto.

ESPACIO Y FORMA

Se refiere a la capacidad de los estudiantes para:

- Analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas.
- Localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación.
- Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas.
- Utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas.
- Comprender los atributos mensurables de los objetos, y las unidades, sistemas y procesos de medida.
- Aplicar técnicas, instrumentos y fórmulas apropiados para obtener medidas.

CAMBIO Y RELACIONES

Se refiere a la capacidad de los estudiantes para:

- Comprender patrones, relaciones y funciones.
- Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos.
- Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.
- Analizar el cambio en contextos diversos.

AZAR E INCERTIDUMBRE

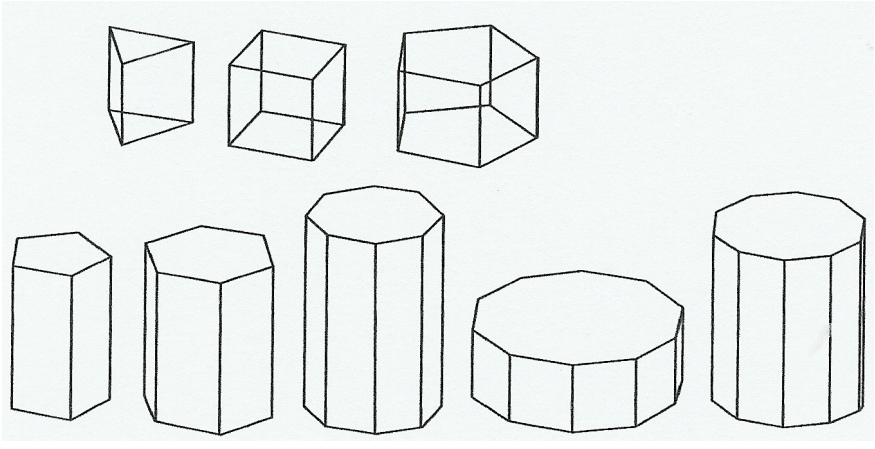
Se refiere a la capacidad de los estudiantes para:

- Formular preguntas que puedan abordarse con datos y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas,
- Seleccionar y utilizar los métodos estadísticos apropiados para analizar los datos,
- Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos,
- Comprender y aplicar conceptos básicos de Probabilidad.

2.3. ACTIVIDADES PARA EL AULA

2.3.1. EJEMPLO DE MODELIZACION EN 1º ESO: PRISMAS

Las figuras que tienes a continuación representan prismas de distinta base:



Construye con palillos y plastilina o dibuja alguna más. Completa la siguiente tabla:

Nº de LADOS en la base	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*... ...*
Nº de ARISTAS							

a) ¿Cómo indicarías el número de aristas de un prisma que tuviera "n" lados en la base?

b) Si un prisma tiene 3 lados en la base podemos escribir que tiene 3 caras. ¿Cuántas caras tiene un prisma con 10 lados en la base? ¿Y otro que tenga "n" lados en la base?

c) ¿Cuántos lados en la base tiene un prisma con 20 vértices?

Para el desarrollo de esta actividad se necesitan prismas reales como modelo y un número suficiente de palillos para poder realizar las construcciones. Se requiere hacer cada figura y efectuar un conteo directo. Una vez completada la tabla, se trata de buscar regularidades, relacionando el número de lados de la base con el número de aristas. La regularidad es fácilmente expresable usando el lenguaje oral, pero el paso más difícil es escribir la fórmula que sintetiza la regularidad observada. Ese paso requiere, primero un nivel de conexión, en el que el estudiante asocia el número de aristas con los múltiplos de 3, es decir, un concepto geométrico (número de aristas) está asociado a un concepto aritmético (múltiplos de tres). También se puede completar la actividad haciendo una representación gráfica de la función obtenida y analizando si se pueden o no unir los puntos de la gráfica, teniendo en cuenta su dominio en el conjunto de los naturales. Otra conexión es con la proporcionalidad: el número de aristas es proporcional al número de lados de la base, siendo 3 la constante de proporcionalidad.

2.3.2. EJEMPLO DE MODELIZACIÓN EN 3º ESO: BUSCA FÓRMULAS

En cada caso, representa gráficamente la tabla y busca una fórmula que relacione las dos variables en estudio:

a) Distancia recorrida por un vehículo que circula a velocidad constante.

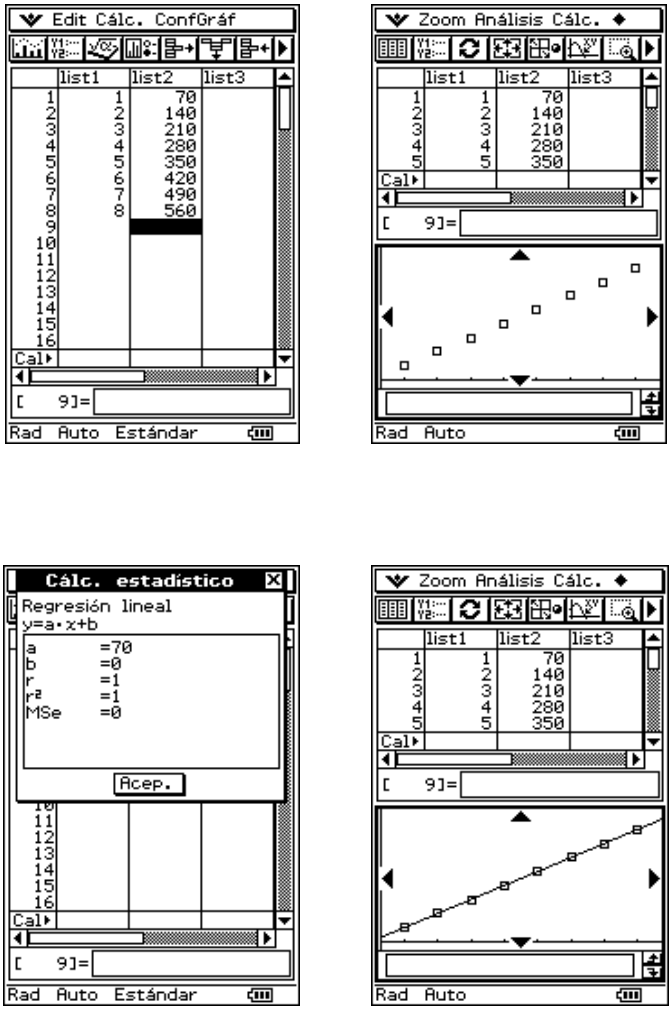
TIEMPO (horas)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
DISTANCIA (km)	*70*	*140*	*210*	*280*	*350*	*420*	*490*	*560*

b) Dinero que le va quedando a Pedro mientras va gastando sus ahorros a razón de 4 euros a la semana.

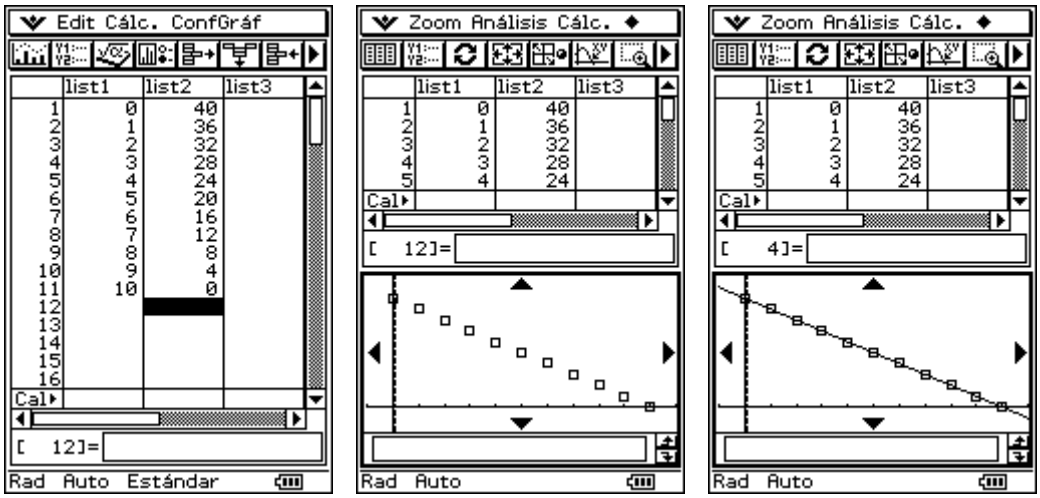
TIEMPO (semanas)	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
DINERO (euros)	*40*	*36*	*32*	*28*	*24*	*20*	*16*	*12*	*8*	*4*	*0*

Para poder hacer esta actividad, los estudiantes han debido tener experiencia previa en: a) la construcción de gráficas a partir de tablas, b) el uso de distintas escalas en los ejes de coordenadas, c) el reconocimiento de modelos lineales y el significado de sus parámetros, d) la diferencia entre un modelo de proporcionalidad directa y un modelo afín (no se puede aplicar una regla de tres para obtener valores de una función afín, a pesar de ser un modelo lineal), e) la obtención de fórmulas a partir de tablas, f) la lectura e interpretación de tablas y gráficos.

En la propuesta a) se puede recurrir a la calculadora gráfica para obtener el gráfico de dispersión y buscar después una recta que se ajuste a los datos.



De forma similar, la propuesta b) se puede hacer con la calculadora gráfica mediante la construcción de la tabla y su representación gráfica.

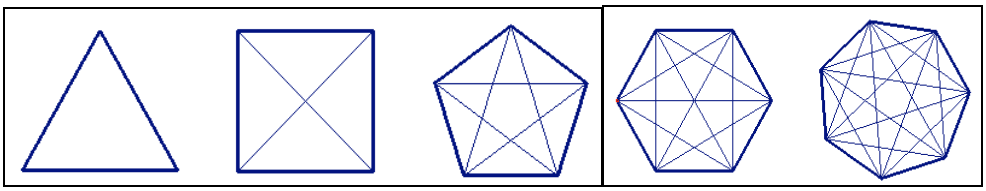


2.3.3. ALGUNAS DIFICULTADES

La tarea de los profesores consistente en diseñar o buscar actividades que encajen en cada una de las "cajas" que llamamos competencias, resulta especialmente compleja. La razón es que un buen número de actividades interconectan varias competencias, de la misma forma que interrelacionan contenidos diferentes (de las propias matemáticas o, a veces, de las matemáticas con otras áreas). Esto hace que sea difícil decidir cuál es la competencia predominante en la actividad y es fuente de discusiones.

Por ejemplo, la siguiente tarea es fácilmente identificable con la competencia "comprender patrones, relaciones y funciones"

¿Cuál es el número de diagonales de un polígono de n lados?.



ya que la propia tarea da pistas sobre la estrategia a seguir, consistente en analizar casos particulares y tratar de formular una conjetura a partir del análisis de dichos casos. En definitiva, lo esencial en la actividad es "buscar un patrón".

Sin embargo, ya no está claro que la siguiente tarea corresponda a la misma caja.

A un vendedor de juegos para ordenadores le dan a elegir entre dos modalidades de contrato:

Modalidad a).- 800 € mensuales, más 3 €. por cada nueva venta a partir de los 175 juegos vendidos.

Modalidad b).- 800 €. fijos más 50 €. por cada juego vendido desde el principio.

Determina la expresión que da la ganancia mensual en función de los juegos vendidos, según la modalidad de contrato elegida. Dibuja las gráficas. ¿Cuántos juegos debe vender para que le compense uno u otro contrato?.

probablemente porque esta actividad es más dispersa (se piden varias cosas, y difíciles) y, además, no está tan direccionada a la búsqueda del patrón, (aunque, desde luego, hay que encontrar dos patrones, uno para cada modalidad de contrato, y además, expresarlos algebraicamente). Pero, aunque los dos patrones-funciones estén explicitados algebraicamente, no será hasta la representación gráfica en unos mismos ejes de coordenadas cuando se comprenda la diferente naturaleza de cada uno. Por lo tanto, lo esencial en esta actividad no es encontrar el patrón, sino *comprender el patrón* y utilizar esa comprensión para comparar, a través de las gráficas, los modelos que siguen los dos tipos de contratos y después decidir.

Por tanto… ¿deberíamos poner esta tarea en la caja "plantear y resolver problemas" o en la caja "comprender patrones, relaciones y funciones"? Y otra discusión aparejada es la que tiene lugar sobre la distinción entre patrón, relación y función. ¿Son la misma idea?

2.4. SOBRE LA EVALUACION

Cada una de las competencias enunciadas admite diferentes niveles de profundidad. Siguiendo al Informe PISA, distinguimos tres niveles de complejidad:

- Primer nivel: Reproducción y procedimientos rutinarios.
- Segundo nivel: Conexión e integración para resolver problemas estándar.
- Tercer nivel: Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.

2.4.1.REPRODUCCIÓN

En el nivel de reproducción se engloban aquellos ejercicios que son relativamente familiares y que exigen básicamente la reiteración de los conocimientos practicados, como son las representaciones de hechos y problemas comunes, recuerdo de objetos y propiedades matemáticas familiares, reconocimiento de equivalencias, utilización de procesos rutinarios, aplicación de algoritmos, manejo de expresiones con símbolos y fórmulas familiares, o la realización de operaciones sencillas.

2.4.2.CONEXIÓN

El nivel de conexión permite resolver problemas que no son simplemente rutinarios, pero que están situados en contextos familiares o cercanos. Plantean mayores exigencias para su interpretación y requieren establecer relaciones entre distintas representaciones de una misma situación, o bien enlazar diferentes aspectos con el fin de alcanzar una solución.

2.4.3.REFLEXIÓN

Este nivel de complejidad moviliza competencias que requieren cierta comprensión y reflexión por parte del alumno, creatividad para identificar conceptos o enlazar conocimientos de distintas procedencias. Las tareas de este nivel requieren competencias más complejas, implican un mayor número de elementos, exigen generalización y explicación o justificación de los resultados.

2.4.4.TIPOS DE TAREAS

De acuerdo con estos niveles de complejidad, también podemos diferenciar distintos tipos de tareas escolares. En particular, podemos distinguir entre ejercicios, problemas e investigaciones.

Un ejercicio es una tarea de tipo rutinario, que para su resolución no requiere más que recordar una técnica sencilla ya practicada con anterioridad.

Un problema requiere establecer conexiones entre conceptos y relaciones, buscar técnicas matemáticas apropiadas, analizar el proceso de resolución y validarlo.

Una investigación es una situación abierta en la que, a veces, no está clara la pregunta, hay que tomar decisiones sobre el camino a tomar, retomar la tarea y validarla constantemente.

Las tareas que deben proponerse a los alumnos son de los tres tipos, ya que es la única forma de asegurar la posibilidad de que los estudiantes alcancen su propio nivel de competencias.

2.5.MATERIALES Y RECURSOS

La utilización de materiales manipulables y de recursos tecnológicos es esencial para desarrollar la competencia matemática. En particular, las ideas matemáticas requieren de soportes materiales que los estudiantes puedan manipular para analizar situaciones, formular conjeturas y comprobar propiedades. Algunos de los materiales posibles son los siguientes:

- Juegos de tablero: Encerrado, Pintar el tablero, Equilibrio, Catástrofe, Selección, La travesía del río, Coordenadas, Primos, Carrera con sorpresas.
- Rompecabezas y puzzles de distintos tipos. Tangram, matgram, poliminós, policubos.
- Dados cúbicos punteados, Dados cúbicos con las caras en blanco, Dados de potencias de 2, Dados de fracciones, Dados de hacer quinielas, Dados poliédricos.
- Ruletas de distintos tipos, con diferente número de sectores.
- Fichas de cuatro colores.
- Barajas numéricas y geométricas de diversos tipos.
- Dominó usual, Dominó de áreas y unidades cuadradas, Dominó de áreas y fórmulas, Dominó de fracciones, Dominó de ecuaciones, Dominó de potencias y raíces cuadradas.
- calculadora científica, preferiblemente con funciones de estadística, tales como análisis de regresión. Una calculadora especialmente recomendable es FX-82 ES de CASIO.
- calculadora gráfica o simbólica, con la que sea fácil relacionar expresiones algebraicas y representaciones gráficas. Especialmente indicada es la calculadora CLASSPAD 330-A de CASIO.
- programas informáticos para la realización de algunas actividades. En particular, la hoja de cálculo y programas de cálculo simbólico, así como software de geometría dinámica. Por ejemplo, Microsoft Excel, Derive, Cabri, software libre de Lliurex.
- Programas específicos de matemáticas (gauss, funcions i gràfics, funcions per a windows, etc), que se pueden utilizar para la realización de algunas actividades.

Mucho se ha escrito sobre materiales y recursos en los últimos 30 años; sin embargo, parece que el uso de los mismos no termina de generalizarse. Un aspecto más a tener en cuenta si lo que se pretende es mejorar la competencia matemática.

BIBLIOGRAFÍA

Alsina- Burgués- Fortuny (1989). *Materiales para construir la geometría* Ed. Síntesis. Madrid.

Alsina C., Fortuny, J. Mª; Jiménez. *Bon dia Mates*. (www.xtec.es)

Grupo Beta (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza* Ed. Síntesis. Madrid

Grupo Cero (1982). *Geometría y Cónicas Matemáticas 3º BUP*. Universidad de Valencia

Mora, J.A, Rodrigo (1993). *Mosaicos 1 y II* Proyecto Sur Ed., Granada

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Granada: S.A.E.M Thales.

Puig Adam, P (1977). *Geometría Métrica (vol.l)* ed. Autor Madrid,

Steen, L.A. (1998). *Las matemáticas en la vida cotidiana* Coed. Addisson-Wesley UAM New York

Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para Secundaria y Bachillerato*. Ed. Síntesis. Madrid.

Fernández, J.; Rodríguez, M. (1991). *Juegos y pasatiempos para la enseñanza de la Matemática elemental*. Ed. Síntesis. Madrid.

Gracia, F. y otros (1997). *Juegos de Lógica y Estrategia*. Edicions Tàndem. Valencia.

Grupo Cero (1987). *Signo 7: Matemáticas 7º EGB*. Mestral Libros. Valencia.

Gardner, M. (1988). *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*. Editorial LABOR. Barcelona.

Gardner, M. (1990). *Mosaicos de Penrose y escotillas cifradas*. Editorial LABOR. Barcelona.

Gardner, M. (1988). *Ruedas, Vida y otras diversiones matemáticas*. Editorial LABOR. Barcelona.

Corbalán, F. y Gairín, J. (1988). *Problemas a mí. 3. Juegos matemáticos*. Edinúmen. Madrid.

Grupo Cero (1990). *De 12 a 16. Un proyecto de currículum de matemáticas*. Consellería de Cultura, Educació i Ciencia. Generalitat Valenciana. Valencia.

Botella, L. M.; Millán, L. M,; Pérez, P. (2007). Matemáticas 1º, 2º, 3º, 4º ESO. Alcoy. Editorial Marfil.

Grupo Eureka (2000). Matemáticas I, 1º Bachillerato. Alcoy. Editorial Marfil.

Grupo Eureka (2000). Matemáticas II, 2º Bachillerato. Alcoy. Editorial Marfil.

Grupo Eureka (2000). Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I, 1º Bachillerato. Alcoy. Editorial Marfil.

Grupo Eureka (2000). Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, 2º Bachillerato. Alcoy. Editorial Marfil.

Berenguer, L; Cobo, B; y otros (2002). Coordinación: Rafael Pérez. Matemáticas 1º, 2º, 3º y 4º ESO. "Construir las Matemáticas". Granada. Proyecto Sur.

Grupo Cero (1995). *Matemáticas para la Secundaria Obligatoria. Primer Ciclo de ESO*. Madrid: MEC y Edelvives.

Grupo Cero (1995). *Matemáticas para la Secundaria Obligatoria. Segundo Ciclo de ESO*. Madrid: MEC y Edelvives.

Grupo Cero (1995). *Matemáticas para la Secundaria Obligatoria. Estructura y materiales*. Madrid: MEC y Edelvives.

Hoffmann, L. D.; Bradley, G. L. (2001). *Cálculo para Administración, Economía y Ciencias Sociales*. (7ª edición) Madrid: McGraw-Hill.

Morillo, F. y otros. (2002). Matemáticas: adaptación curricular 1º ESO. Madrid: Santillana.

Romá, R., Sanchís, S., Zaragoza, A. P. (2004).. Refuerzo de matemáticas 2. Madrid: Almadraba.

Alsina, C. , Fortuny, J. Mª. (1994). *Taller de Educación del Consumidor: la Matemática del Consumidor*. Granada: Proyecto Sur. Generalitat de Catalunya: Institut Cátala del Consum.

Cachafeiro, L. C. (1999). *Matemáticas del cuerpo humano*. Colección 2 puntos. Granada: Proyecto Sur.

Colera, J. , Guzmán, M. y otros. (1996). Matemáticas 1º, 2º, 3º Y 4º ESO. Madrid: Anaya.

Contreras, M. (2006). Matemáticas 2º, 3º y 4º ESO. mauriciocontreras@wanadoo.es.

Contreras, M. (2005). Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I y II. mauriciocontreras@wanadoo.es.

Página web de Ricard Peirò: www.ricardpeiro.es.

Página web de Mauricio Contreras: www.mauriciocontreras.es.

Página web de la Xarxa Telemàtica de Catalunya: www.xtec.es.

Pàgina web de Anton Aubanell: http://www.xtec.es/~aaubanel/

LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMERO A PARTIR DE LAS VARIABLES QUE LO CONFORMAN

Pedro Berjas

INTRODUCCIÓN

Un estudio publicado en la revista *Science*[16] confirma lo importante y beneficioso que resulta la escolarización infantil.

Los niños que cursan Educación Infantil, (3 a 6 años) obtienen mejores calificaciones a largo plazo. El estudio comenzó cuando el Gobierno británico se planteó si sería beneficioso y rentable el financiar la educación infantil comprendida en esa franja de edad. No estando seguros de si valdría la pena, le encomendaron a *Edward Melhuish*, investigador de la Universidad Birkbeck de Londres que investigase el efecto que podría tener una escolarización temprana. De su estudio, que comenzó en 1997, se desprende que ésta es significativa y que quienes comenzaron más pronto rindieron mejor en casi todas las asignaturas, **siendo de destacar, el que obtuvieron unas notas un 27% más altas en matemáticas cuando alcanzaron los 10 años de edad.**

El equipo de Melhuish realizó un seguimiento a 3.000 niños británicos durante los tres años de infantil, evaluando sobre todo las capacidades de cálculo. En un primer momento (3 a 5 años), los datos se recogieron por medio de entrevistas y más tarde se obtuvo información a partir de las notas alcanzadas a los 10 años. La principal conclusión del estudio es que **los niños escolarizados a esas edades tempranas sacaron mejores notas y que este factor influía más que otros, como la educación de los padres por ejemplo.**

En España, la reciente LOE (Ley Orgánica de Educación aprobada en 2006), habla de la **importancia de esta etapa y sobre su repercusión como compensación de desigualdades sociales,** quedando organizada en dos ciclos, de 0 a 3 y de 3 a 6 años, éste último gratuito.

En países como los Estados Unidos, el acceso a la educación infantil sólo es para unos pocos afortunados que pueden pagarlo o para los que son extremadamente pobres. Incluso no todos los que pueden pagarlo están mentalizados de la importancia que tiene esa escolarización temprana y los efectos que tiene a medio plazo. Para concienciar a los padres se están haciendo campañas informativas, pues resulta curioso que *"los estadounidenses no hacen nada que no esté basado en miles de estudios",* según afirma *Inma Gómez*, una española que lleva más de una década enseñando en un colegio norteamericano.

Tal vez, este sea un factor más de los que nos puede explicar el bajo nivel educativo que hay en Estados Unidos, y es que no es suficiente con llevar a los niños a la guardería, pues **la importancia del entorno de trabajo, juego y socialización, así como la cualificación**

---

[16] *(Science* 29 August 2008: Vol. 321. no. 5893, pp. 1161 – 1162. DOI: 10.1126/science.1158808)

THE EARLY YEARS: Preschool Influences on Mathematics Achievement.

Edward C. Melhuish,[1*] Kathy Sylva,[2] Pam Sammons,[3] Iram Siraj-Blatchford,[4] Brenda Taggart,[4]

Mai B. Phan,[5] Antero Malin[1] The advantages of home learning environment and preschool are apparent years later in children's math achievement.

de los docentes marcan sin duda grandes diferencias, cuestiones también referenciadas en el estudio de *Melhuish*.

En lo que al número se refiere, nuestro sistema educativo tiene una influencia Piagetiana muy grande, defendiéndose desde sus teorías que los aspectos ordinales y cardinales son comprendidos prácticamente al mismo tiempo, Piaget, J. (1941). Los resultados que durante décadas hemos venido obteniendo a partir de aquellas han sido reiteradamente muy pobres. Otros planteamientos como los de Gelman y Gallistel (1978), **parten de la concreción de seis principios,** que según ellos, todo niño ha de dominar para comprender y utilizar de manera apropiada el número.

El presente trabajo, se basa en esos seis principios, a los que se les ha unido los de otros autores. Todo ello fruto de una investigación llevada a cabo con más de ochocientos niños repartidos por distintos centros públicos de la comunidad valenciana. Los resultados han superado ampliamente la más optimista de las previsiones, alcanzándose resultados extraordinarios en el conjunto de las clases donde se aplicó y no sólo en determinado tipo de alumnado.

Así pues, y como consecuencia de lo expuesto, la presente comunicación pretende mostrar cómo se pueden alcanzar logros mucho más importantes de lo que hasta el momento se ha conseguido, en la adquisición del número en niños de tres a ocho años. Para ello, **resulta necesario planificar la actuación educativa siendo conscientes de todas las variables que forman el concepto de número y planteando actividades para su comprensión y dominio.**

Variables implicadas en la formación del concepto de número

CORRESPONDENCIA UNO ES A UNO

Aplicación de un número a cada uno de los objetos que se enumeran y sólo a uno.

En la correspondencia término a término, **los niños han de asignar una única palabra-número a cada elemento del conjunto que se esté contando.** Utilizar bien este principio no exige que los elementos que se cuentan estén en un orden determinado. Gelman y Meck (1983). Por otro lado es de señalar que este principio suele coordinarse rápidamente con el de la lista convencional de las palabras-números.

ORDEN ESTABLE

Aplicación de un orden establecido en el uso de los números que es invariante.

Las palabras que designan a los números deben formar una sucesión invariable. Este principio se realiza en dos fases que se superponen en parte (Fuson, Richards y Briars, 1982).

a) *Fase de adquisición.* **Aprender de memoria la serie de las palabras-número** hasta 20 es ante todo una tarea de memoria (a partir de 16 ya se puede construir y no memorizar. Otra cosa es que no les enseñemos a los niños esa posibilidad de construir y simplemente les hagamos memorizar hasta que por descubrimiento se dan cuenta de esa posibilidad). Adquirir la serie de 20 a 100 es también una tarea de memoria pero que incluye un modelo de repetición, si bien nuestra experiencia docente nos dice que en realidad es de construcción. Al principio la secuencia numérica es una sucesión de palabras-números que

se asocian y relacionan de forma paulatina. En su adquisición, las rutinas y la repetición son sumamente importantes. A partir de esta secuencia básica en la que no hay ningún criterio lógico que ayude a memorizar o construir la secuencia numérica, será necesario establecer reglas para entenderla. De este modo **las palabras-números hasta el 15 (en castellano) se aprenden de memoria pero a partir de éste ya se puede generar a partir de unas reglas básicas** (diez y seis, … y siete, …y ocho…). Así vemos como "la familia de los veintes" pueden construirse, al igual que del 15 al 19, a partir de una regla sencilla: combinar la cifra de las unidades del número 20 con todas y cada una de sus posibilidades y con un orden que ya nos es conocido (de 0 a 9). Para seguir la construcción hasta 100 por ejemplo es suficiente con memorizar las decenas con su orden correspondiente (10, 20, 30...).

b) *Fase de elaboración.* Fuson y sus colaboradores (1982, 1988, 1991), distinguen cinco niveles de la evolución del conocimiento de la cadena verbal:

El rosario. Nos encontramos ante una **repetición numérica sin significado para el niño** (unodostrescuatro...). En realidad lo que ocurre es que no se da cuenta que se trata de palabras distintas con lo cual no puede establecer correspondencias término a término entre los números y los objetos a contar.

Cadena continua. **Ya se produce una separación entre las palabras-número y con capacidad para asociarlas a objetos. No obstante, resulta necesario comenzar a contar desde el principio,** que puede ser el 0 ó el 1 ya que eso depende de la manera en que es enseñada la cadena numérica por el docente. En caso de que esta cadena se corte, el niño tendrá que comenzar desde el principio. Tampoco tiene la capacidad de comenzar a contar desde cualquier otro número de esa cadena. Esta separación de las palabras-números en la secuencia y el hecho de detener esa secuencia en el último objeto contado, facilitan el conteo como una herramienta, configurándose en lo que podríamos llamar *sentido cardinal.* Shaeffer, Eggleston y Scout (1974) lo llama "regla cardinal" y Gelman y Gallistel (1978) *"principio cardinal"*.

Cadena de eslabones. En esta fase el niño **ya puede decir la palabra-número siguiente a otra dada,** siendo necesario haber adquirido tres nuevas habilidades: contar desde de un límite inferior, contar desde un límite inferior hasta un límite superior y contar hacia atrás. Esta capacidad de contar desde una palabra-número hasta otra por debajo de 10 se suele lograr entre los tres años y medio y los cinco años.

Cadena de números. Es aquí donde se unen los significados de la secuencia de contar y del principio de cardinalidad. El niño ya **puede contar un determinado número de elementos a partir de otro y puede tratar la secuencia de palabras-números en los dos sentidos,** señalando la palabra-número que precede a otra por ejemplo. En esta fase surgen dos nuevas habilidades: contar "x" a partir de un número "y", y contar de "x" a "y" para saber cuántas palabras-número separan a "x" de "y".

Cadena bidireccional. Nos encontramos en el nivel más alto de elaboración de la secuencia numérica: **ahora es bidireccional y seriada. Esta última etapa responde a la concepción piagetiana de la clase y la serie** (1<(1+1)<(1+1+1)...). Según Fuson Richard y Briars (1982), la generalización de las conductas propias de esta etapa se dan bastante tarde, sobre los 9 años. Esta cadena bidireccional tiene dos cualidades muy distintivas: **las secuencias están sólidamente automatizadas hacia delante y hacia atrás y la posibilidad de cambiar de dirección rápidamente y de forma flexible.**

UNICIDAD

Los niños deben emplear un conjunto de etiquetas distintas o únicas para designar cada número (o cifra).

Cada número responde a un nombre o forma concreta con la cual lo designamos tanto de forma oral como de forma escrita Gelman, R. y Gallistel, C.R. (1978). Cada una de estas etiquetas nos sirve para diferenciarlos, ordenarlos y operar con ellos. Habría que señalar que en realidad un número puede responder a más de una etiqueta, al menos a lo que respecta a nivel de grafías, ya que por ejemplo el número cuatro tiene más de una forma de ser representado. Ese nombre de los números es lo que se conoce como **palabras-número** y son en definitiva una herramienta para poder reconocer números y operar con entidades matemáticas. También hay que puntualizar que esa designación puede estar dirigida a números o a cifras, según tengan o no asignado un valor numérico.

IRRELEVANCIA DE ORDEN

La asociación entre un determinado objeto y un determinado número concreto es irrelevante. Lo importante es no repetir el número, ni saltarse el orden numeral de la serie.

El orden en el que se enumeran los elementos de un conjunto no afecta al resultado. Evaluar este principio es sumamente dificultoso porque podemos encontrar una innumerable cantidad de combinaciones si se tiene en cuenta el orden y la configuración espacial del conjunto. Esto es debido a la dificultad añadida con la que se pueden encontrar los niños ante elementos a contar que estén alineados o desordenados, ya que les faltan estrategias para situar esos elementos de forma que puedan contarlos de la manera más cómoda posible.

Los niños que han adquirido este principio han comprendido que **las etiquetas asignadas en el conteo a los objetos no pertenecen a los objetos, con lo que cualquier etiqueta puede ser asignada a cualquier objeto,** Gelman (1978).

CARDINALIDAD

El valor numérico del conjunto que se cuenta se expresa por el valor cardinal final que lo representa. Ese valor numérico contiene dentro de sí a todos los anteriores.

Este principio viene a decir que **la última palabra-número citada en una tarea de numeración es la que le da el valor a un conjunto.** No obstante es importante tener en cuenta que la última palabra-número mencionada no es necesariamente el cardinal correcto, ya que el hecho de saber que la última palabra-número tiene un significado especial no conlleva necesariamente la habilidad de hacer la numeración correctamente. Contestar a la última palabra-número ha sido llamada regla cardinal, Shaeffer et al., (1974), principio cardinal, Gelman y Gallistel (1978) y regla de la última palabra-número, Fuson (1988).

Reflexionemos ahora sobre dos hechos. El primero de ellos es que **no siempre aquello que se cuenta da el valor correcto,** como cuando contamos hasta siete bolitas en la posición de las decenas en el ábaco. Así pues, la ***cardinalidad*** debería ser vista como una

cantidad fruto de un conteo en el que la última palabra-número es la que la determina, pero cuya ***magnitud*** puede ser distinta.

La otra cuestión a tener en cuenta es que **el orden en los números tampoco implica valor.** Un ejemplo: vivir en el número 128 de una determinada avenida. El carácter ordenado de la cadena numérica nos ayuda a menesteres como encontrar ese número pues está "más lejos", "más hacia la derecha" por ejemplo, pero careciendo de valor pues no se trata de una cantidad, no podemos afirmar que haya hasta allí 128 viviendas, ***(magnitud),*** ni va asociado tampoco a la ***cardinalidad.*** El número de teléfono tampoco tiene un valor asignado. Se trata de un conjunto de cifras sueltas (vistas por el usuario), que muchas veces son agrupadas para favorecer su memorización en grupos de dos o tres cifras. Vistas por los operadores el número implica un orden para evitar repeticiones de forma que cada usuario tenga uno distinto, pero tampoco podemos decir que hay "X" usuarios de teléfono viendo el número más alto de ellos porque no son asignados de forma correlativa.

El número no es imprescindible para realizar ninguna de las dos cuestiones comentadas, ya que podría ser sustituido por letras, por ejemplo, pues también son susceptibles de ser ordenadas.

ABSTRACCIÓN

Puede incluir elementos distintos y el niño debe pasar por alto la forma física de los elementos y clasificarlos en las categorías que se le indique.

Para dominarla lo**s niños deben hacer abstracción de las cualidades y características de los objetos,** que en definitiva permiten diferenciarlos unos de otros, a fin de poder considerarlos como partes de un único conjunto, centrándose en una tarea: saber qué objetos deben hacerse corresponder con las palabras-número.

Según Wynn (1992) el principio de abstracción aparece muy pronto. **Los niños se suelen resistir a contar algún objeto cuando tiene características muy distintivas del resto de elementos del conjunto.** Esto es debido a que suelen comenzar por representaciones figurativas de la situación perceptiva del conjunto antes de hacer la numeración. Este proceso puede quedar sin sentido para el niño aun habiendo contado de forma correcta.

CONTABLES E INCONTABLES

Hace referencia a la comprensión de todo aquello que puede ser contado y lo que no.

La mayor parte de las veces cuando hablamos de las cosas que pueden ser contadas y las que no, mencionamos muchas contables. Tal vez sea debido a que son más numerosas o tal vez por ser más evidentes. Cuando nos referimos al **número sustantivo contable** (mesa, silla, naranja…) vemos cómo es más fácil determinar su singularidad o pluralidad, admitiendo directamente un determinante numeral (3 naranjas). Si hablamos de los **sustantivos no contables** (aceite, arena, arroz…) y aunque pueden adoptar plurales, seguirán sin ser susceptibles de ser contados, en todo caso, se podrán medir, pesar…, pero nunca contar, pues no admiten el que se les asocien directamente los determinantes numerales (si digo 3 aceites en realidad me refiero a tres tipos de aceites, nunca podremos contar su contenido). Dentro de los sustantivos no contables se encuentran también los **sustantivos colectivos** (populacho, gentío…) y los **sustantivos abstractos** (afecto, lealtad…), donde ocurre lo mismo, aunque pueden adoptar plurales, el objetivo no es que sean contados. Por otro lado nos encontramos en ocasiones que el morfema de número es

utilizado con el fin de asignar distintos significados como “el celo” y “los celos”, que teniendo un origen común, han evolucionado tomando sentido propio. También tenemos en el español, sustantivos que solo aparecen en singular (cenit) y otros que sólo se expresan en plural (alicates).

El término ***contable*** es, desde las matemáticas, sinónimo de **numerable.** *Un conjunto es numerable cuando es finito y puede ponerse en bisección con el conjunto de los números naturales,* por lo que se asigna a cada elemento del conjunto a contar un valor del de los números naturales. Del mismo modo, *un conjunto que no es susceptible de ponerse en correspondencia biyectiva con los números naturales diremos que es un conjunto no numerable.*

Los niños, desde bien pequeños aprenden de forma natural qué cosas se pueden contar y las que no. Es el mismo idioma y sus experiencias más tempranas las que les facilitan ese conocimiento.

VALOR POSICIONAL DE LAS CIFRAS

El valor de un número depende de la cantidad de cifras que tenga y de la posición de éstas.

Es de suma importancia tener en cuenta el valor posicional de nuestro sistema numérico ya que un mismo número tiene asignados valores distintos en función del lugar en que se encuentre. Acabamos de incorporar el concepto de *“cifra”* en la que no hay asignado un valor al nombre del número que manejamos, y el de *“número”* en el que ya hay una asignación de cantidad. Así pues el número “12” **está compuesto por dos cifras pero tiene un valor único** al igual que el número 9 que sólo utiliza una sola cifra o el número 3.000.000.

Desarrollo de la capacidad de codificación. Conocer el nombre de cada cifra no significa que ya se esté en disposición de leer números de varias cifras. Saber que “6” se lee “seis” y “3” se lee “tres” no es suficiente para leer “63” o “36”. **Para los modelos semánticos de codificación, ésta implica básicamente dos etapas:**

- *Comprensión de la cantidad expresada por un número presentado.*
- *Traducción de esa cantidad en un código de salida.*

De este modo **escribir al dictado un número arábigo supone la comprensión del número verbal por un lado y su escritura en el código arábigo por otro.** Esto nos lleva a la incertidumbre de saber si las dificultades que presentan algunos niños al codificar se producen en la etapa de comprensión o en la de producción.

En lo que respecta a **los problemas derivados de la escritura al dictado de números arábigos** Seron y Fayol (1994) llegaron a la conclusión de que mayoritariamente **provienen del sistema de producción en el código arábigo,** de modo que la falta de comprensión de los números verbales presentados oralmente tiene una incidencia mucho menor.

También Seron, Noël y Van der Elst (1997) indicaron que había altas correlaciones entre la tarea de codificación y el rendimiento de los niños en actividades de comprensión de los números arábigos y de su producción, llegando incluso a asegurar que **las dificultades de**

lectura de los números arábigos son debidas en gran medida a dificultades en el nivel de la comprensión de aquéllos.

Está claro que la codificación necesita del dominio del código fuente y del código de salida, aunque cabría ahora determinar si las dificultades de codificación se dan por igual. Pues bien, **estas dificultades se producen fundamentalmente en la falta de dominio del código arábigo frente a la del código verbal oral,** y esto tiene una explicación sencilla **y es que el niño incorpora de forma mucho más tardía el código arábigo que el verbal oral.**

El número en base diez. Son interesantes las aportaciones que Fuson, Wearne, Hiebert, Murria, Human, Olivier, Carpenter y Fennema (1997) hicieron acerca de las **distintas concepciones que el niño puede tener respecto a los números de dos cifras.** Esas concepciones **son cinco aunque** matizan que **no son etapas de desarrollo ya que no todos pasan por ellas y además no todos siguen un determinado orden:**

Concepción unitaria de los números de dos cifras. Cuando los niños comienzan a aprender los números lo hacen evidentemente por los de una cifra, de forma que **cuando pasamos a los números de dos, no son conscientes de ello, pues al fin y al cabo se trata de distintos nombres para distintos números.** Además nuestro sistema lingüístico favorece esa concepción unitaria de los números pues al cambiar de decena, los números once, doce, trece, catorce y quince no muestran de forma clara un cambio, siendo a partir del dieciséis cuando ya comienza una combinación más transparente.

Concepción decenas-unidades basada en la numeración verbal. Se trata de **separar los numerales orales en decenas y unidades,** de forma que "treinta y cuatro" puede ser interpretado como "30" más "4" y a la hora de escribirlo lo harían como "304".

Concepción de secuencias de decenas y unidades. En este punto los niños **ya son conscientes de que los números se pueden agrupar en familias (decenas) pero todavía no son capaces de extraer la raíz de las palabras para que les dé pistas sobre qué decena se trata.** Así pues, la palabra "sesenta" tiene en su raíz la clave para señalar el "6" como la cifra de las decenas pero necesita de la ayuda del adulto para hacerle caer en la cuenta de ello.

Concepción de decenas y unidades separadas. "**Treinta" es visto como tres entidades con mayor valor,** tres decenas, y no como tres grupos de diez unidades.

Concepción integrada de las secuencias de decenas y unidades separadas. Desde esta concepción el niño **ya ve la decena tanto como un grupo de diez unidades como una unidad de entidad superior** (una decena).

MAGNITUD

Asignar, darle valor a un determinado número.

Dehaene, Stanislas. (1997a) En el artículo *¿Cómo calcula nuestro cerebro?* nos muestra el funcionamiento del cerebro respecto al cálculo y al manejo de números.

Según él, *"nuestro cerebro examina las palabras o los números arábigos, expresiones simbólicas, según una representación interna de las cantidades numéricas análogo a una línea, a lo largo de la cual se suceden los números en orden creciente"*.

Los números son manejados por el cerebro humano como **magnitudes físicas concretas y continuas.** Cuando son vistos en cifras arábigas, el cerebro los convierte en una **magnitud interna continua,** y luego los pondera mentalmente. **La región parietal inferior es la máxima responsable de esa representación interna de las cantidades numéricas así como de su manejo,** aunque hay que tener en cuenta que según la operación matemática que se realice se activará en un u otro hemisferio dicha región, **coordinando su actividad con otras áreas entre las que cabe destacar aquellas que controlan el lenguaje.**

Así pues vemos como nuestro cerebro accede, a partir de un símbolo que nos es presentado de distintos modos (en número, palabra, objetos…), a una **magnitud** interna cuyos valores se situarían sobre una "línea", realizándose además, a gran velocidad y de forma automática.

A los números les asignamos un valor en función del contexto, del momento, a partir de una comparación cualitativa.

COMPARACIÓN ENTRE NÚMEROS

Los números son tratados por el cerebro humano como magnitudes físicas concretas y continuas. Comparamos tanto más rápidamente cuanto mayor es su diferencia.

Dehaene, Stanislas. (1997a), afirma que la comparación entre números es esencial en el cálculo matemático. Para ver cómo se produce se estudia el llamado *"efecto distancia"*. A partir de un experimento realizado comparando el número 65 se llega a conclusión ya mencionada en el apartado anterior que, "los números son manejados por el cerebro humano como *magnitudes físicas concretas y continuas.* **Utilizamos esa línea mental para realizar las comparaciones.** Cuando son vistos en cifras arábigas, el cerebro los convierte en una *magnitud interna continua*, y luego los *pondera* mentalmente".

DESCOMPOSICIÓN DEL NÚMERO

Cada número puede descomponerse en otros más pequeños. Implica usar esta cualidad para operar.

Inclusión numérica. La inclusión hace referencia al hecho de que los números se comportan como conjuntos que se embeben unos en los otros Piaget y Szeminska (1941). En el momento en el que el niño es capaz de clasificar jerárquicamente es que ha comprendido que las distintas categorías pueden incluirse unas dentro de otras.

CONSCIENCIA

Sentido de propiedad, sentimiento de que se está operando con números, percatarse de su manipulación.

Es pues necesario que los niños se den cuenta de lo que hacen con los números, para qué sirven, reflexionar sobre ellos. Se trata de llegar a la metacognición de las matemáticas.

CONCEPTOS MATEMÁTICOS BÁSICOS ASOCIADOS

Comprensión y aplicación de ciertas nociones matemáticas que acompañan a la manipulación del número.
El número es una entidad compleja. Va más allá de asignar un valor numérico a un conjunto de elementos o la realización de operaciones sin tener plena consciencia de lo que se hace y por qué. Ello nos conduce a reflexionar sobre algunos **conceptos matemáticos que son inherentes o al menos están íntimamente conectados con la noción de número.**

Este es el caso de conceptos matemáticos como *"más", "menos", "muchos", "pocos", "algo", "nada", "ninguno", "mayor, más grande", "menor, más pequeño"…*

OPERACIONES ARITMÉTICAS Y OPERACIONES LÓGICAS

En su nivel más elemental implica comprender que la serie numérica se va incrementando a partir del "n+1" y decrece con "n-1". También cómo la suma de posibles descomposiciones de un número determinan el valor final de éste. En un nivel intermedio supone la realización de sumas y restas sencillas. En un nivel superior comporta la resolución de problemas.

Piaget, J. escribió junto a Szemisnka, A. *La génesis del número en el niño* (1941) **describiendo dos capacidades lógicas, la seriación y la clasificación.** *Para poder dominar el concepto de número el niño debe adquirir y coordinar de forma progresiva esas dos capacidades lógicas,* desarrollándose de forma paralela e integrándose antes de que se dominen completamente.

De los algoritmos a la constitución de una red de hechos aritméticos.

Aunque hay autores que afirman que son anteriores, es hacia los 3 ó 4 años cuando se destapan de forma más evidente las primeras capacidades aritméticas basadas en el lenguaje y sobre todo en lo que se refiere a la habilidad de contar. **De forma innata, a un niño que le demos un objeto y luego se le dan dos más, tenderá a unirlos y contarlos en conjunto.**

Esta forma de contar de forma oral está presente en diferentes culturas y todo apunta a que nada tiene que ver el tipo de sistema escolar en el que se encuentre el niño e incluso aparece sin que sea necesario que les sea enseñado por otros, *Baroody y Ginsburg (1986)*.

Las fases del cálculo

A partir del estudio de Dehaene, Stanislas. (1997), podemos analizar el orden y la velocidad con el que se activan las distintas regiones cerebrales que intervienen al calcular.

Alrededor de los *150 milisegundos*, en la **identificación de números,** se pueden distinguir diferencias en la topografía cerebral dependiendo de que se haya enseñado un número arábigo o bien el nombre de éste lo cual nos indica que son reconocidos por redes distintas. Así pues las regiones occipito-temporales ventrales de ambos hemisferios identifican los cifras pero para las palabras sólo se hace cargo el hemisferio izquierdo, que aunque reconoce la identidad de los símbolos no lo hace lo mismo respecto a su significado.

El efecto distancia surge aproximadamente a los *190 milisegundos*. Este efecto distancia tiene una topografía idéntica tanto para los números escritos en símbolos arábigos o con letras. Esto no hace sino confirmar que la región parietal inferior no codifica los números como símbolos. Lo hace a modo de código cuantitativo abstracto que resulta independiente del signo con el que ha entrado.
Hacia los *330 milisegundos* llega la **activación motriz** y hacia los *400* **la respuesta.**

Por último, alrededor de los *470 milisegundos* se activa otra área: la región cingular anterior. Ésta se pone en marcha **para detectar y corregir los errores que se producen.**

Resolución de problemas.

Nunca debemos confundir el hecho de hacer cálculos numéricos como (2 + 3 = 5), con utilizar esos mismos cálculos en la resolución de un problema del tipo "tienes 2 juguetes y te doy 3, ¿cuántos juguetes tienes?" **Este mismo cálculo numérico puede responder problemas de cuatro formas distintas, cada una con diferentes niveles de dificultad.**

EL MODELO DE VAN HIELE APLICADO A LA GEOMETRÍA EN PRIMERO DE ESO

Ana Belén Cabello Pardos
I.E.S. Joaquín Araújo, Fuenlabrada (Madrid)
Universidad Rey Juan Carlos de Madrid
Ricardo López Fernández
Ana Belén Sánchez García
Universidad de Salamanca

RESUMEN

El modelo de van Hiele, en su doble aspecto descriptivo y prescriptivo, establece los niveles de pensamiento que va alcanzando el alumno guiado por el profesor a través de las distintas fases de aprendizaje. La brillantez de la propuesta radica en su sencillez y contrasta con cierta dificultad, en la práctica, para establecer el contenido concreto de cada fase de aprendizaje dentro de un nivel determinado referido a un tema específico del currículum.

El conocimiento de las interpretaciones que los alumnos dan a las palabras, los preconceptos, concepciones alternativas e incluso errores de comprensión, permiten al profesor organizar las actividades para que los alumnos construyan el pensamiento geométrico.

Keyword: modelo de van Hiele, nivel de pensamiento, fase de aprendizaje, concepto figural, ejemplo no intuitivo.

Nivel educativo: Enseñanza Secundaria Obligatoria.

INTRODUCCIÓN

La teoría conocida como "el modelo de van Hiele" tiene su origen en Holanda, en 1957. Pierre y Dina van Hiele leen sus tesis doctorales y desarrollan sucesivas investigaciones hasta elaborar un modelo en el que se explica cómo el alumno va construyendo el pensamiento geométrico recorriendo cinco niveles, guiado por el profesor a través de cinco fases de aprendizaje (en cada nivel).

El modelo, por tanto, consta de dos aspectos, uno descriptivo, en el que se especifican los niveles de pensamiento geométrico que va alcanzando el alumno; y otro prescriptivo, en el que se establecen las fases de aprendizaje a través de la cuales el profesor guía al alumno para adquirir un determinado nivel de conocimiento.

El aspecto descriptivo se ordena en cinco niveles de pensamiento.

- El nivel cero es el nivel básico, de reconocimiento o visualización.
  Los objetos de este nivel son los elementos básicos.
- El nivel uno es el nivel de análisis.
  Los objetos son las propiedades de los elementos básicos.
- El nivel dos es el nivel de clasificación, deducción informal u orden.
  Se estudian los enunciados que relacionan las propiedades.
- El nivel tres es el nivel de deducción.
  Los objetos son las ordenaciones parciales de los enunciados.

- El nivel cuatro es el nivel de rigor.
  Los objetos son propiedades que analizan las ordenaciones parciales.

El aspecto prescriptivo se compone de cinco fases de aprendizaje.

- La fase uno, es la fase de indagación.
  El profesor establece un diálogo con los alumnos para conocer el sentido que dan a las palabras, preparando el terreno conceptual.
- La fase dos, es la orientación dirigida.
  El profesor organiza actividades sencillas, de un solo paso, para que los alumnos tomen conciencia de lo que se está estudiando y se familiaricen con las estructuras.
- La fase tres es la explicitación.
  Los alumnos construyen sobre experiencias previas.
- La fase cuatro es la orientación libre.
  Los alumnos encuentran su modo propio de resolver las tareas.
- La fase cinco es la fase de integración.
  Los alumnos integran en un nuevo saber todo lo aprendido. Consta de actividades de refuerzo y ampliación.

Este modelo tiene su origen en una investigación al analizar las causas o los motivos por los cuales los alumnos no entienden lo que se explica en clase.

De manera breve podemos afirmar que el alumno sólo va a comprender lo que el profesor le presente de una manera adecuada a su nivel de razonamiento; de ahí la importancia de conocer en qué nivel se encuentra el alumno.

> Cuando empecé mi carrera como profesor de matemáticas, muy pronto me di cuenta de que era una profesión difícil. Había partes de la asignatura que yo podía explicar y explicar, y aun así los alumnos no lo entendían. Podía ver que ellos lo intentaban pero sin éxito. Especialmente al principio de la geometría, cuando se tiene que probar cosas muy simples, podía ver que ellos hacían todo lo posible, pero la materia parecía demasiado difícil. Pero como yo era un profesor inexperto, tenía que considerar la posibilidad de que fuera un mal profesor. Y esta última molesta posibilidad fue confirmada por lo que viene a continuación: De repente parecía que entendían la materia. Podían hablar de ella muy sensatamente. Pero muy a menudo decían: "No es tan difícil, pero ¿por qué nos lo explicaste con tanta dificultad?" En los años siguientes cambié mi explicación muchas veces, pero las dificultades permanecían. Parecía que yo estaba hablando en un idioma distinto. Y considerando esta idea descubrí la solución, los distintos niveles de pensamiento (Van Hiele, 1986).

LA FASE DE INDAGACIÓN EN EL MODELO DE VAN HIELE

Nos hemos propuesto aplicar el método de van Hiele en el desarrollo de la Geometría en primero de ESO. En este trabajo presentamos solamente resultados de una unidad didáctica. El primer bloque de contenidos, referido a los elementos básicos del plano, se inicia con el nivel cero, básico, de reconocimiento o visualización de dichos elementos. En él, la primera fase es la de indagación, en la que el profesor establece un diálogo con los alumnos sobre los objetos que se van a estudiar; de esta manera conoce las interpretaciones que los alumnos dan a las palabras y se prepara el terreno conceptual. En este momento el profesor conoce los preconceptos, concepciones alternativas e incluso errores de los que parten los alumnos.

Nuestro objetivo es reflejar la importancia de esta fase, mostrando los resultados que hemos obtenido en la aplicación del modelo de van Hiele.

Fase de indagación en el nivel básico, de reconocimiento o visualización de los elementos básicos del plano.

Los alumnos estudian los elementos básicos del plano desde tercero de Primaria, con lo cual se supone que saben reconocerlos y explicar con sus palabras por qué un elemento del plano tiene determinado nombre.

Sin embargo, nos hemos encontrado que en primero de ESO, la realidad es distinta; no todos los alumnos reconocen el segmento, la recta y la semirrecta antes de empezar a estudiar el bloque de Geometría.

Elaboramos un cuestionario cuyo primer ítem demanda a los alumnos la escritura del nombre correspondiente a una recta, semirrecta o segmento, en cada una de las siguientes figuras:

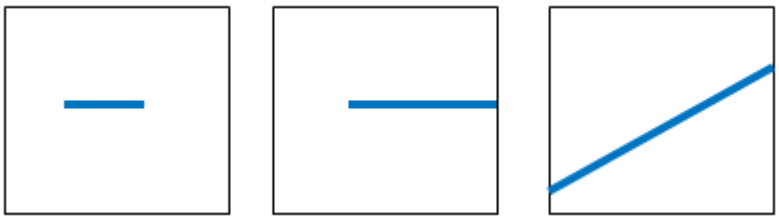


Figura 1. Elementos básicos de la Geometría del plano.

Y también se les pide explicar la primera y la última.

El número total de unidades de análisis está compuesto por alumnos de ambos sexos (47,5% niñas y 52,5% niños) que se encuentran distribuidos por grupos como exponemos en la tabla 1 que mostramos a continuación. Seleccionamos todos los alumnos de los grupos señalados a excepción de los niños de integración puesto que tratábamos de indagar sobre el origen del error (N=59).

Grupo	Chicas	Chicos	Totales	% chicas sobre el total de frecuencias	% chicos sobre el total de frecuencias	% grupo sobre el total de frecuencias
1ºA	9	10	19	15,3%	16,9%	32,2%
1ºB	10	11	21	16,9%	18,7%	35,6%
1ºC	9	10	19	15,3%	16,9%	32,2%
Totales	28	31	59	47,5%	52,5%	100%

Tabla 1. Muestra de investigación por grupos.

Entendemos que está claro que los elementos representados en la figura 1, corresponden a un segmento, una semirrecta y una recta.

Solamente el 30,5% de los alumnos identificó correctamente los elementos.

Las respuestas erróneas podemos clasificarlas en grupos:

- Respuesta recta-semirrecta-segmento.
  La característica de este error es que, por lo menos, reconoce la semirrecta.
  El 44,1% de los alumnos cometió este error.

- Respuesta semirrecta-recta-segmento.
  La característica de este error es que no reconoce ninguno de los elementos. Tiene en común con el error anterior el hecho de denominar segmento al tercer elemento. El 13,6% de los alumnos cometió este error.

- Otras respuestas.
  Incluimos en este grupo las respuestas que aparecieron en un número aislado de casos.
  Respuesta segmento-recta-semirrecta. El 1,7% de los alumnos da esta respuesta. Por lo menos reconoce el segmento.
  Respuesta recta-segmento-semirrecta. El 5,1% de los alumnos responde de esta manera. No reconocen ningún elemento.
  Respuesta semirrecta-segmento-recta. El 3,4% de los alumnos responde así. No reconocen ningún elemento.
  Respuesta recta-no sé-no sé. Lo afirma el 1,7% de los alumnos. Es el peor de los casos.

La siguiente tabla sintetiza el análisis de las respuestas.

Tipo de respuesta	Clasificación de la respuesta			% según clasificación	% según tipo
Correcta	Segmento	Semirrecta	Recta	30,5	30,5
Incorrecta	Recta	Semirrecta	Segmento	44	57,6
	Semirrecta	Recta	Segmento	13,6	
	Segmento	Recta	Semirrecta	1,7	11,9
	Recta	Segmento	Semirrecta	5,1	
	Semirrecta	Segmento	Recta	3,4	
	Recta	No sé	No sé	1,7	
				100	100

Tabla 2. Clasificación de las respuestas.

Las explicaciones de la primera y última respuesta no nos aportaron toda la información que deseábamos debido a la dificultad de los alumnos para verbalizar su pensamiento. Adolecen de la estructuración lingüística a la que se refiere van Hiele en la comprensión del nivel.

En las respuestas erróneas de los dos primeros tipos, que coinciden en llamar segmento al tercer elemento, encontramos tres tipos de argumentaciones de dicha afirmación:

- No-horizontalidad.
  El 20,3% de los alumnos afirma que el tercer elemento es un segmento porque no está en posición horizontal.
  “Porque está mirando para arriba”
  “Porque está inclinada”
  “Porque está torcido”
  “Porque choca en cada uno de los extremos y no es paralela”
  “Porque no va del todo recto”

"Porque está cruzado"
"Porque está de lado"
"Porque es una línea torcida"
"Un segmento es una línea torcida"
"Es una línea recta pero torcida"
"Es una línea inclinada"
"Es segmento porque es una línea curva que va de un lado para otro"

- Atribución de extremos.
  El 6,8% de los alumnos atribuye extremos al tercer elemento.
  "Porque choca en cada uno de los extremos y no es paralela"
  "Es una línea pero va de un punto a otro"
  "Es una raya que tiene principio y fin"
  "Es una línea con principio y fin"
  "Va de un extremo a otro"

- No sabe/no contesta/argumentos no válidos del tipo:
  "Porque aunque se larga no llega a la recta completa"
  "Porque es un segmento"
  "El segmento es un línea muy recta"
  El 30,5% de los alumnos responde de esta manera.

Llegamos a la conclusión de que el error en la identificación de los elementos básicos del plano está en identificar recta con horizontalidad.

Para superar este error proponemos que el alumno utilice software geométrico de manera que, por una parte, le permita manipular los elementos geométricos en el entorno gráfico, y, por otra, le obligue a identificar el elemento para buscar en el menú el icono que le posibilite dibujar dicho elemento.

Pautas para la elaboración de las siguientes fases.

Como hemos observado, en un grupo numeroso de alumnos existe un conflicto entre el concepto y la figura (o imagen). A esta conclusión llegamos por los razonamientos que exponen.

No todos los alumnos que contestaron correctamente (30,5%), argumentan su afirmación. Pero los que verbalizan su pensamiento reflejan esa conexión entre el concepto y la imagen.

Así por ejemplo, explican que la primera imagen es un segmento con las siguientes afirmaciones:

- "Es una parte de la recta"
- "Está cortado"
- "Porque sale un trozo de recta y se le llama segmento"
- "Es una recta de un tamaño determinado"
- "Una línea corta"
- "Es un cacho de línea"
- "Es un trozo de recta"
- "Es una pequeña parte de una recta"
- "Es una línea recta que tiene principio y final"

- "Es un trozo de línea recta"
- "Porque se comprende de un punto a otro"
- "Línea que es corta"

Y explican que la tercera imagen es una recta por los siguientes motivos:

- "Se ve que no tiene límites y las rectas son infinitas"
- "Es una recta que se puede prolongar sin tener fin"
- "Es una línea continua sin final"
- "Es una línea que nunca acaba"
- "Es una línea continua que nunca acaba"
- "Una recta es una línea que llega siempre a su fin"
- "Es una línea recta que no tiene ni principio ni final"
- "Es una recta porque no se ve de dónde a dónde llega"
- "Línea muy larga"

Aunque la estructuración lingüística no es del todo correcta en algunos casos, podemos afirmar que reconocen los elementos básicos del plano.

En este aspecto estamos de acuerdo con el planteamiento de Fischbein (1993) y seguimos su propuesta en nuestro trabajo de elaboración de las siguientes fases de aprendizaje.

Fischben sostiene que la Geometría trata con entidades mentales (llamadas figuras geométricas) que poseen características conceptuales y figurales simultáneamente, por lo que las llama conceptos figurales. Por esta doble naturaleza, a veces surgen conflictos o tensiones internas.

Los alumnos tienen el concepto figural "recta" cuando hacen referencia a "línea" (que expresa dirección), "ausencia de límites". Y tienen el concepto figural "segmento" cuando aluden a "parte de una recta", "presencia de extremos".

Los elementos que hemos encontrado en las respuestas erróneas de los alumnos y que les han impedido identificar correctamente la recta han sido la atribución de extremos y la no-horizontalidad. Analizamos cada uno de ellos.

- No-horizontalidad. Los alumnos que no han identificado la tercera imagen como recta por el hecho de no estar horizontal, tienen un concepto figural erróneo en el que las rectas son horizontales.
  En este sentido nuestra propuesta es la utilización de software geométrico con el que los alumnos puedan manipular los objetos. Se les presentan actividades en las que deben dibujar una recta y moverla por la pantalla de manera que esté horizontal, vertical o inclinada. La ventaja del programa es que se libera del carácter estático del papel.
- Atribución de extremos. Algunos alumnos no han identificado la tercera imagen como recta porque le atribuyen como extremos los límites que le imponen los márgenes del cuadrado; sin embargo no reconocen los extremos de la primera imagen.
  En la ventana de trabajo del programa geométrico pueden dibujar una recta y observar que aunque está enmarcada en dicha ventana, si ésta se desplaza, los márgenes no cortan a la recta.

Es precisamente en la fase de explicitación donde el profesor puede corregir este error presentando a los alumnos ejemplos no intuitivos de rectas, semirrectas y segmentos en el

software geométrico. Se trata simplemente de dibujar estos elementos en distintas posiciones en el plano y manipularlos en la ventana de trabajo. En este caso creemos que no sería necesario presentar no-ejemplos de estos elementos geométricos, es decir curvas, circunferencias, arcos, etc. (Tsamir, Tirosh, Levenson, 2008)

CONCLUSIONES.

- El modelo de van Hiele tiene la peculiaridad de haber surgido como investigación en la comprensión de la Geometría por parte de los estudiantes. Se caracteriza por su sencillez, pero es difícil llevarlo a la práctica pues no es fácil determinar el contenido de cada nivel y de cada fase; requiere un notorio esfuerzo por parte del profesor.
- Es un modelo que aunque es conocido en nuestro país desde hace unos veinte años, sin embargo no está implantado mayoritariamente. Hay grupos de estudio que han realizado notables aportaciones, destacando profesores de la Universidad de Valencia como Ángel Gutiérrez Rodríguez y Adela Jaime (1993) entre otros.
- En cada nivel de razonamiento, la fase de indagación es clave en la determinación de la comprensión que tienen los alumnos de ese nivel. El grado de fluidez en la verbalización de sus pensamientos, es decir, la estructuración lingüística, refleja la comprensión del alumno.
- Proponemos la utilización de software geométrico de manera que, por una parte, el alumno pueda manipular los objetos geométricos en el entorno gráfico, progresando así en la comprensión y, por otra parte, la necesidad de buscar en el menú el icono que le permita dibujar un objeto sea un medio para afianzar el reconocimiento o visualización de dichos objetos.
- Proponemos también la continua referencia por parte del profesor a ejemplos y no ejemplos, intuitivos y no intuitivos, para reconocer los elementos geométricos que se estudien y formar correctamente el concepto figural correspondiente.

REFERENCIAS

FISCHBEIN, E. (1993). *The theory of figural concepts,* Educational Studies in Mathematics, 24 (2): 139-162

JAIME PASTOR, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento,* Tesis doctoral, Universidad de Valencia.

VAN HIELE, P. (1957). *El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la Geometría,* Tesis doctoral, Universidad Real de Utrech.

VAN HIELE, P. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education,* Academic Press.

TSAMIR, P., TIROSH, D., LEVENSON, E. (2008). *Intuitive nonexamples: the case of triangles,* Educational Studies in Mathematics, 69: 81-95.



GENERALITAT VALENCIANA
CONSELLERIA D'EDUCACIÓ
VNIVERSITAT DE VALÈNCIA Departament de Didàctica de la Matemàtica
VNIVERSITAT DE VALÈNCIA Facultat de Ciències Matemàtiques

9 788461 497416