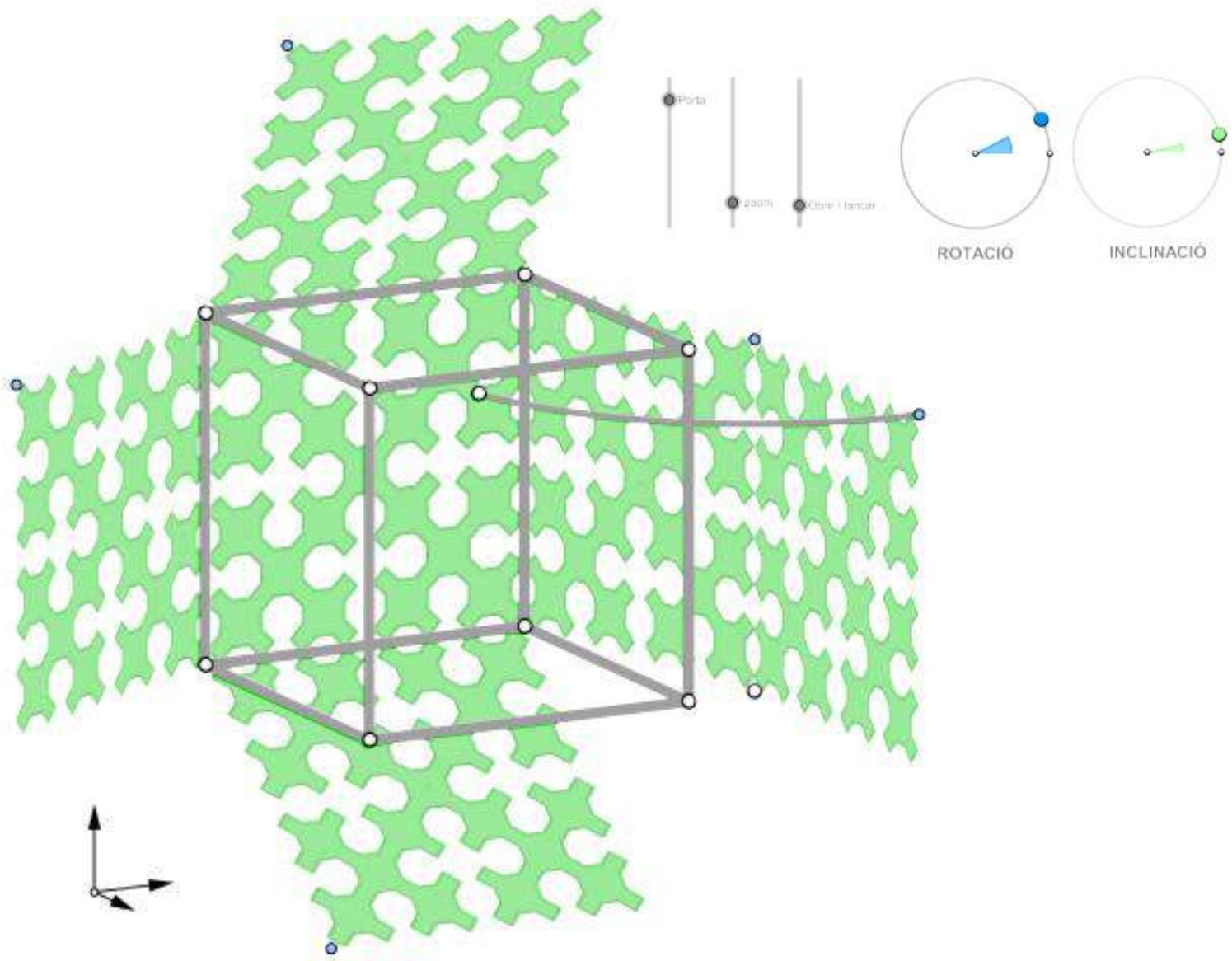
María Teresa Navarro Moncho (Ed.)

Actes de les XII Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana



Societat d´Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "al - Khwārizmī"

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

ACTES DE LES XII JORNADES D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA DE LA COMUNITAT VALENCIANA

María Teresa Navarro Moncho (Ed.)

ACTES DE LES XII JORNADES D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA DE LA COMUNITAT VALENCIANA

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwārizmī"
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
València, Espanya, 2018

Editora:

Mª Teresa Navarro Moncho
Cefire Científic, Tecnològic i Matemàtic. València, Espanya
navarro_mtemon@gva.es

Publica:

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwārizmī"
www.semcv.org

Comité Científic:

Onofre Monzó del Olmo
Mª Luisa Fernández Villanueva
Mª Teresa Navarro Moncho
Tomàs Queralt i Llopis
Vicent Perales i Mateu
Òscar Forner Gumbau
Amparo Monedero Mira
Joan Antoni Castillo Pinyana
Juan Manuel Couchoud Pérez

Comissió organitzadora:

Mª Luisa Fernández Villanueva
Mª Teresa Navarro Moncho
Onofre Monzó del Olmo
Tomàs Queralt i Llopis
Vicent Perales i Mateu

Col·laboradors:

Iolanda Guevara Casanova (SCM)
Mireia Pancreu Oliu (FEMCAT)
Ana Belén Petro Balaguer (SBM XEIX)
Laura Gandia Ferrero
Lluís Sebastià Giner
Borja Navarro Martínez
Borja Navas Santamaría
Míriam Ortega Pons
Ximo Arnau Breso
Santiago Navarro Redón
Marta Argudo Ortiz
Vicente Diago Ortells
Silvia Quilis Marco
Isabel Roig Salvador
Thais Ávila Valverde
José María Ajenjo Vento
María Jesús Ruiz Maestro
María Jesús Lozano Lacalle

© dels textos: els autors

Il·lustració de la portada: logo de les Jornades dissenyat per José Fernando Juan García i Fernando Domínguez Navarro

Citar com:

Navarro, M. T. (Ed.) (2018). *Actes de les XII Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana*. València: Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwārizmī"

ISBN: 978-84-945722-1-0

ÍNDEX

PRESENTACIÓ 9

CONFERÈNCIES 11

Agustín Carrillo 13 - 19

GeoGebra como recurso TIC para la enseñanza de las matemáticas

Luis Puig 21 - 33

Sed omnia in mensura et numero et pondere disposuisti

COMUNICACIONS 35

Juan Gutiérrez-Soto, Carlos Valenzuela, David Arnau i Olimpa Figueras 37 - 46

Integrando procesos de Learning analytics usando applets de Ggeogebra y Javascript

Marta Argudo 47 - 53

Maths & Crafts: una manera d´aprendre anglès en Matemàtiques

Carlos Segura i Elena Thibaut 55 - 67

Programa pilot aprofundeix 2015-2016: informació encriptada

Marta Santandreu, Moisés Sendra, Carlos Castillo, L.uis Rosado, Óscar Ferrando, M. José Salvador i Angèlica Nadal 69 - 80

Problemes amb els negocis

Irene Ferrando i Marta Pla 81 - 85

Medidas para enseñar a medir: problemas de Fermi para introducir la medida de magnitudes

Mayte Briz 87- 101

Gamificación en matemáticas de tercero de ESO

Eva Arbona, M. José Beltrán-Meneu, Ángel Gutiérrez i Adela Jaime 103 - 111

El uso de los problemas de patrones geométricos para la introducción del álgebra en la educación primaria

Òscar Forner 113 - 127

Aplicació de les matemàtiques al nostre entorn. Rutes matemàtiques

TALLERS 129

Juan Manuel Couchoud 131 -133

Construcció de l'applet "Experimentant amb quadrilàters i el teorema de Pick"

David Bataller 135 - 137

Geogebra: Arts and Maths

Lluís Bonet 139 - 146

Un món ple de simeties o ... no tantes

Fernando Arenas 147 - 157

Aproximación a las técnicas de recuento mediante actividades con tableros de ajedrez usando applets de GeoGebra

M. Teresa Escrivà, M. José Beltrán-Meneu, Adela Jaime i Ángel Gutiérrez 159 - 166

Desenvolupem la visualització per comprendre el món

Ricard Peiró 167 - 179

Problemes de matemàtiques amb la CASIO fx 991 classwiz

Enric Ramiro 181 - 195

Com traure-li la llengua a les mates, des de les ciències socials

Samuel Cortés 197 - 201

Geometria al pati de l'institut:construcció de teodolits y ballestilles per a fer dels alumnes topògrafs i navegants

Adela Jaime, M. Teresa Sanz, M. José Belrán-Meneu, Pascual D. Diago, Irene Ferrando, Juan Gutiérez-Soto i Noelia Ventura-Campos 203 - 210

AMPLIMATES, una plataforma virtual de problemas de 3º E primaria a 2º ESO

Bernardo Gómez 211 - 215

Matemáticas en el mundo: el Calendario

ÍNDEX ALFABÈTIC D'AUTORS 217

PRESENTACIÓ

Més de 150 professors, mestres i investigadors de l'ensenyament i l'aprenentatge, participaren en les XII Jornades d'Educació Matemàtica a la Comunitat Valenciana, celebrades els dies 30 de setembre i 1 d'octubre de 2016 en la Facultat de Magisteri del campus de Tarongers de la Universitat de València en València.

Convocades per la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwārizmī" i la Conselleria d'Educació de la Generalitat Valenciana, aquestes Jornades han sigut una eina de reflexió, informació, debat, connexió i recerca de solucions als reptes que planteja l'Aprenentatge i l'Ensenyament de les Matemàtiques en la actualitat. El lema, "Matemàtiques per entendre el món", fan referència al desig i necessitat de veure les matemàtiques des d'un punt de vista diferent a com es veuen normalment. En lloc de mirar-les com una eina allunyada de la vida quotidiana, cal submergir-se en les mateixes per a comprovar què sense matemàtiques potser no podríem mirar el món, ni la natura ni la vida de cap manera; no podríem representar les nostres observacions del nostre entorn ni analitzar-les. No podríem veure amb claredat. Amb aquest esperit, les Jornades volem difondre una imatge més actual, realista i lúdica, de les matemàtiques i col·locar-les en el lloc que es mereixen: més a prop de tots nosaltres i dels nostres alumnes.

En les següents pàgines trobareu material generat per aquestes Jornades, conferències, tallers i comunicacions.

Volem agrair la col·laboració d'institucions com les Corts Valencianes, la Facultat de Magisteri de la Universitat de València, el Departament de Didàctica de la Matemàtica de la Universitat de València, l'Institut GeoGebra Valencià i empreses del sector de l'educació (materials i jocs, calculadores i software matemàtic) que ens han donat de forma incondicional el seu suport.

Volem manifestar el nostre agraïment a tots els assistents, especialment a tots els què heu presentat col·laboracions, bé siga conferència, taller, comunicació o exposició. Sense el vostre treball no haguera sigut possible el desenvolupament de les Jornades. Per últim, agrair al Comité de Programa, a la Comissió Organitzadora i als col·laboradors de les XII Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana, el seu treball. Ha sigut un treball dur, però ha merescut l'esforç. Gràcies.

M. Teresa Navarro Moncho
Coordinadora de les XII Jornades
d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana

CONFERÈNCIES

GEOGEBRA COMO RECURSO TIC PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
agustincarrillo@telefonica.net
Universidad de Córdoba – España

Modalitat: Conferència plenària
Nivell educatiu: Internivell
Paraules clau: GeoGebra, roles, TIC

RESUMEN

Desde hace algunos años, GeoGebra está presente en las aulas como un recurso más, a veces casi imprescindible por las numerosas posibilidades que ofrece como recurso TIC para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los distintos niveles educativos.

Su presencia o mejor dicho, que todos hablemos de GeoGebra, no conlleva su plena integración en el aula y mucho menos, que se aprovechen las posibilidades que ofrece.

Se hace necesario revisar su utilización para analizar los cambios que ha producido su uso en el aula, tanto en los docentes como en el alumnado, así como plantear nuevos retos que lleven a una integración real de este software para su uso como recurso didáctico para cualquier bloque de contenidos, en los distintos niveles educativos.

0. INTRODUCCIÓN

La realidad de GeoGebra, desde mi punto de vista, no es la que todos pensamos, se habla mucho de este software pero la realidad es otra, por lo que ese será el objetivo de mi exposición en la que una primera parte se centrará en recordar la historia del comienzo de los proyectos TIC y una segunda parte dedicada a analizar la situación de GeoGebra en las aulas.

Antes quisiera hacer unas reflexiones que todos tenemos en mente pero que no nos hacen cambiar nuestro trabajo diario.

El papel escrito que había tenido una gran importancia en la forma de difusión de la información está siendo sustituido por la pantalla del ordenador, del móvil, etc. Las personas ya no son meros receptores de información, se han convertido también en emisores, al crear contenidos y sobre todo al difundirlos y compartirlos.

En la sociedad actual, el sistema educativo no puede seguir utilizando, exclusivamente, los métodos de enseñanza del pasado, sin considerar todos los estímulos e influencias que afectan directa e indirectamente al alumnado.

Los estudiantes de hoy son diferentes, quieren usar la tecnología de su tiempo y no les gusta, ni despierta interés, una educación que no se relaciona bien con el mundo real en el que viven. Necesitan nuevos objetivos y nuevas estrategias.

Se hace imprescindible el uso de las TIC en las escuelas desde distintos puntos de vista; tanto para manejar la información que se encuentra al alcance del alumnado, de modo que aprendan a desenvolverse en esta nueva sociedad del conocimiento como ciudadanos con un espíritu crítico, como para potenciar el aprendizaje en las distintas materias del currículo.

1. UN POCO DE HISTORIA

En Andalucía, la comunidad en la que siempre he trabajado los proyectos TIC comenzaron en 2003 en la que se crearon a partir de una convocatoria pública los Centros TIC, dentro de un programa denominado Andared.



Ente programa planteaba los objetivos siguientes:

- Promover la integración de las TIC como herramienta educativa en los centros públicos.
- Facilitar el acceso a las tecnologías de la información y la comunicación a toda la comunidad educativa.
- Facilitar al alumnado y a su familia la relación con el centro educativo.
- Proporcionar al profesorado la formación adecuada.





Programas similares se desarrollaron en el resto de comunidades españolas, con nombres distintos pero con objetivos similares.



Convertirse en centro TIC supuso cambiar toda la estructura, pasando de ser un centro tradicional en el mes de junio al terminar el curso a convertirse a la vuelta de vacaciones, en el mes de septiembre, en un centro con todas las aulas llenas de ordenadores (un ordenador para cada dos alumnos). Esta situación no resulto fácil de asumir para todo el profesorado del centro ya que la nueva situación casi obligaba a utilizar las TIC en algún momento.

Más adelante, este plan cambió para convertirse en la Escuela 2.0, desarrollado a nivel nacional, también con unos objetivos muy ambiciosos como eran:

- Utilizar las TIC como un "nuevo lenguaje" que complementa los métodos tradicionales empleados en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Favorecer en el alumnado un aprendizaje visual.
- Mejorar la calidad del sistema educativo y propiciar la igualdad de acceso a las TIC para todo el alumnado.
- Conseguir que las TIC sean una parte esencial del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Modernizar el sistema educativo.

Ambos proyectos contemplaban un plan de formación pero no consideraron algo importante para promover cualquier cambio, como es la evaluación. Esto supuso cambiar de un plan a otro sin realizar una evaluación de la eficacia del proyecto inicial.

Las aulas han ido cambiando pasando de un ordenador por cada dos alumnos a un portátil personal para cada alumno que no se reponían cuando se deterioraban; por lo que fue necesario cambiar la estrategia para dotar a los centros de carritos de portátiles a disposición de aquellos docentes que deseaban utilizarlos. Pasos

que tuvieron el peor de los finales esperados ya que con la crisis ya no era posible enviar más material a los centros, lo que ha hecho que la situación haya vuelto a los orígenes, aunque en algunos casos las TIC se limitan a algún carro de portátiles y alguna pizarra digital.

Esa es la realidad actual.

No podemos decir que el proyecto haya sido un fracaso y que no se hayan logrado los objetivos; quizás, las expectativas eran demasiado ambiciosas y el tiempo de duración del proyecto no ha sido suficientemente amplio para lograr la inclusión real de las TIC en la Escuela.

Las razones por las que estos proyectos no han tenido el efecto esperado han sido:

- Descoordinación en la gestión de las infraestructuras.
- Ausencia de un plan de acción claro.
- Falta de formación previa del profesorado.
- Carencia de evaluación.

2. La realidad actual de las TIC

Llevamos años cambiando para lograr una escuela que refleje el mundo en el que vivimos, pero la realidad es ¿hemos incorporado nuevos recursos y cambiado la metodología de trabajo para lograrlo?

Cualquier cambio metodológico es lento y al profesorado le cuesta cambiar para adaptarse a los cambios y en este caso a lo que supone incorporar las TIC.

Antes de iniciar los distintos proyectos TIC, la NTCM a través de sus estándares reconocía la tecnología como uno de sus principios fundamentales para la enseñanza.

Así, aparecía publicado en el año 2000 que la tecnología es fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas e influye en las matemáticas que se enseñan, enriqueciendo su aprendizaje y que la existencia, versatilidad y potencia de la tecnología hacen posible y necesario reexaminar qué matemáticas deberían aprender los alumnos.

Somos conscientes de la importancia de la tecnología en la sociedad actual y también de la necesidad de su presencia en el aula, pero nos planteamos algunas cuestiones como qué utilizamos, para qué y cómo.

El uso de las tecnologías, si queremos, puede estar presente en todos los ejes y núcleos de contenidos, ya que permitirá mejores visualizaciones sobre las cuales elaborar conjeturas, prever propiedades, descartarlas o comprobarlas. Al utilizar estas herramientas, se desplaza la preocupación por la obtención de un resultado y la actividad se centra en la construcción de conceptos y en la búsqueda de nuevas formas de resolución.

3. GeoGebra como recurso TIC

Este software como es evidente no tiene exclusividad como recurso TIC aunque está claro que la comunidad que se ha creado a su alrededor está ayudando a producir cambios en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Todos conocemos sus principales características entre las que destaca ser software libre y estar disponible para distintos sistemas operativos, además de su continua evolución, sin perder la sencillez de las primeras versiones.

A todo esto hay que añadir los miles de recursos creados por otros usuarios que facilitan el aprendizaje y también su uso sin necesidad de excesivos conocimientos.

Quisiera destacar dos aspectos importantes que pueden ayudar a que GeoGebra se haga más presente en las aulas. Por un lado la amplia oferta de formación, y por otro, el que las editoriales se estén interesando por este software incorporándolo a sus nuevos libros.

En las conclusiones del Seminario "*Enseñar Matemáticas con GeoGebra. Retos, roles y resultados*" celebrado en Castro Urdiales en diciembre 2015 organizado por los Institutos GeoGebra de España y por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, aparecían las siguientes:

- ¿Se ha alcanzado la masa crítica de profesores usuarios?
- ¿Ha llegado GeoGebra de verdad a las aulas?
- ¿Las aulas están dotadas para el uso de GeoGebra de forma cotidiana?
- Las referencias en los currículos ¿son efectivas?
- ¿Hay repercusiones en la práctica del aula?

No se trata de discutir si GeoGebra en particular o las TICs en general mejoran el aprendizaje de las matemáticas. Si es mejor enseñar con GeoGebra o con tiza y pizarra.

La cuestión es: ¿cómo rentabilizar al máximo en el proceso de aprendizaje el uso de GeoGebra en las aulas por parte de profesores y por parte de los alumnos?

Como aparecía en los Estándares de la NCTM, es necesario plantear que contenidos se desarrollarán, con qué metodología y también qué evaluación hay que realizar cuando se utilizan las TIC, o en este caso concreto, cuando se usa GeoGebra.

El uso de GeoGebra supone nuevos roles para el profesorado y para el alumnado.

El rol del profesorado debe cambiar para:

- Gestionar de manera diferente del aula y sobre todo el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Convertirse en facilitador del proceso de enseñanza.
- Ser promotor del autoaprendizaje.
- Favorecer la investigación.
- Modificar los mecanismos de observación, intervención y evaluación.

Esto conlleva que el alumnado también tenga que cambiar su papel en el aula, para:

- Tener mayor protagonismo tanto a nivel individual como colectivo.
- Cambiar su actitud ante las tecnologías.
- Convertirse en investigador como parte esencial de su aprendizaje.

- Actuar con autonomía e iniciativa.
- Compartir, debatir y exponer su aprendizaje.
- Aprovechar la facilidad que este software le ofrece para trabajar fuera del aula.

Si deseamos cambiar nuestra actitud ante las TIC en general y en concreto ante GeoGebra para aprovechar las posibilidades que ofrece, debemos afrontar nuevos retos.

Retos que no debemos afrontar sólo el profesorado, también debemos contar con que desde la administración educativa se planteen nuevos objetivos y por qué no, también desde el equipo de desarrollo de GeoGebra.

Así, la administración educativa se debe plantear los retos siguientes:

- No basta con hacer referencia en los DDCC al uso de las TIC, es necesario reconocer sus posibilidades, no prohibiendo su uso en cualquier evaluación externa.
- Favorecer la organización de los centros para promover el uso de las TIC.
- Difundir las buenas prácticas.
- Diseñar un sistema eficaz de formación y crear los incentivos para el desarrollo profesional y para reconocer al profesor que realiza una constante labor de innovación educativa.

Y sobre todo, aunque la situación no es la adecuada, no podemos olvidar que un reto importante sería asegurar el acceso a Internet para profesores y alumnos, así como dotar de equipos a las escuelas, contemplando un plan de reposición y renovación.

Como docentes, debemos asumir trabajar para alcanzar los retos siguientes:

- Impulsar el uso efectivo de este recurso tecnológico y metodológico en el aula.
- Pasar a la fase de extensión y generalización del uso de GeoGebra en las aulas.
- Pasar del dominio técnico de GeoGebra al dominio didáctico.
- Pasar de la emoción estética del profesor al descubrir con GeoGebra a la emoción del alumno por descubrir, crear y aprender.
- Crear menos construcciones para subir a GeoGebraTube y más propuestas didácticas.

Y para los creadores de GeoGebra, les pedimos que depuren y establezcan jerarquías en los materiales publicados en GeoGebraTube, mejorando su clasificación.

No quiero olvidarme de felicitar y sobre todo, agradecer, al equipo de GeoGebra por ofrecernos este software gratuito, esperando que sigan creciendo y pidiéndoles que no pierda la sencillez y la facilidad que mantienen desde la primera versión.

Para terminar, las posibilidades que GeoGebra ofrece no debemos desaprovecharlas si realmente creemos en las ventajas que las ofrecen las TIC en la enseñanza y aprendizaje, por lo que no queda otra que dejar de hablar de las bondades de este software para pasar a la acción, para cambiar la forma de trabajo en el aula, apostando por una nueva forma de hacer y enseñar matemáticas.

La tecnología es importante en nuestra vida, también debe serlo en nuestro trabajo, sin olvidar que la tecnología no debe prevalecer sobre la enseñanza sino que tiene que servirnos para mejorarla.

No debemos olvidar que no estamos enseñando GeoGebra, que nuestro objetivo es enseñar matemáticas, para las que Geogebra puede ser un estupendo aliado.

SED OMNIA IN MENSURA ET NUMERO ET PONDERE DISPOSUISTI

Luis Puig
luis.puig@uv.es
Universitat de València Estudi General - València

Modalitat: Conferència plenària
Nivell educatiu: Multinivell
Paraules clau: Rutes matemàtiques, fenomenologia didàctica, mesura del metre, història de les matemàtiques

RESUM

Els conceptes i processos matemàtics han estat elaborats al llarg de la història per organitzar fenòmens de l'experiència humana en comptar, mesurar, descriure, classificar objectes del món, i també per organitzar fenòmens de la nostra experiència en representar, calcular, definir, analitzar, generalitzar, abstraure els objectes matemàtics que organitzen aquests fenòmens. Les rutes matemàtiques a València són un exemple de com qui coneix conceptes i processos matemàtics disposa d'una eina poderosa per veure, analitzar, descriure, construir el món.

0. INTRODUCCIÓ: EL TÍTOL

Entre els mites de la creació del món que apareixen en la Bíblia en el llibre del Gènesi, en el mite que probablement ve de la tradició sacerdotal, al principi el món és caos.

El món era caos i calia doncs organitzar-lo. Eixa va ser la feina que segons el mite narrat en el Gènesi va fer Déu. La caracterització de quina va ser l'eina d'organització no apareix però en el llibre del Gènesi sinó en el llibre de la Saviesa, on, en el llatí de la versió de la Vulgata, capítol 11, versicle 21, diu: "Sed omnia in mensura et numero et pondere disposuisti". El títol de la meua xarrada[1] de hui està tret doncs de la Bíblia i es pot traduir per "Però tot el vares organitzar segons mesura i nombre i pes". Segons el llibre de la Saviesa, els mitjans d'organització que va emprar Déu per organitzar el món varen ser mitjans matemàtics.

Sense més comentari, deixe el títol per a la vostra reflexió com a activitat per a tot el recorregut d'esta conferència, imitant l'estructura que tenen les Rutes Matemàtiques per València, de les quals vaig a parlar.

1. INTERLUDI: UN ALTRE MITE

Deixe la Bíblia, però no deixe els mites encara. En un llibre publicat en els Quaderns Crema de Antoni Bosch, editor, a l'any 1978, l'any de proclamació de la Constitució Espanyola, que es diu *Uf, va dir ell*, Quim Monzó inclou un conte molt curt, no més una pàgina, titulat "En un temps llunyà" en el qual descriu un altre

[1] En els minuts finals d'aquesta conferència, quan ja portava més d'una hora parlant, vaig patir un episodi, diagnosticat posteriorment com "amnèsia global transitòria", que em va impedir concloure-la i que em va portar a l'hospital. El text que he preparat per les actes inclou la conclusió que estava començant a enunciar en el moment de l'episodi. He volgut també mantindre l'estil oral de la conferència en el text escrit, en compte de redactar un text més formal. Les referències bibliogràfiques dels textos que vaig mencionar oralment i algunes notes aclaridores les he col·locat en notes a peu de pàgina.

mite inaugural d'un món molt més menut, mostrant com amb el llenguatge organitzem la nostra experiència[2].

2. La concepció de les matemàtiques que subjau a les Rutes Matemàtiques per València

Hans Freudenthal en el seu llibre en què va començar a parlar del que hi havia que fer en l'educació matemàtica o, com a ell li agradava dir, la matemàtica que educa, el llibre *Mathematics as an Educational Task* (la matemàtica com a tasca educativa) comença diguent "Nobody knows what man invented first, writing or arithmetic"[3], "Ningú no sap què va inventar per a començar l'home, si l'escriptura o les matemàtiques". Ara sabem que probablement els primers signes escrits en Babilonia, fa més de cinc mil anys, són signes aritmètics[4]. Amb el llenguatge organitzem la nostra experiència, però des del principi, quan comença l'escriptura, inventem un nou llenguatge, el que serà el llenguatge de les matemàtiques, per a organitzar una de les parts de la nostra experiència.

Amb les matemàtiques doncs una part de la nostra experiència està organitzada, però això no és tot el que ens ofereixen les matemàtiques, a més el món de les nostres experiències s'amplia, tenim accés a noves experiències amb els propis objectes, conceptes i processos matemàtics, que també s'organitzen amb objectes, conceptes i processos matemàtics més abstractes.

En el disseny de les activitats de les Rutes Matemàtiques per València, subjau una concepció de la naturalesa de les matemàtiques[5] que part d'aquesta idea fonamental: les matemàtiques són una creació humana per tal d'organitzar fenòmens del món de la nostra experiència, i els conceptes matemàtics, que es creen per a això, formen part també del món de la nostra experiència, estenen el món de la nostra experiència possible.

Aquesta concepció de les matemàtiques, que és la que volem difondre no tant sol en les rutes sinó en totes les coses que fem en l'ensenyament de les matemàtiques, s'oposa radicalment a la que se sol anomenar "concepció platònica de les matemàtiques", segons la qual els objectes o conceptes matemàtics preexisteixen a l'acció humana, i aquesta el que fa és descobrir els conceptes matemàtics explorant aquest món matemàtic ideal, que no és el món de la nostra experiència. Segons aquesta concepció "platònica", en l'activitat matemàtica es descobreixen els conceptes matemàtics; per a nosaltres, els conceptes matemàtics no es descobreixen, s'inventen, s'elaboren. Ludwig Wittgenstein ho va expressar amb claredat en una frase de les seues *Observacions sobre els fonaments de la Matemàtica*, que, com moltes de les seues frases, pot usar-se com un lema: "Der Mathematik ist ein Erfinder, kein Entdecker", "El matemàtic és un inventor, no un descobridor"[6].

Els conceptes matemàtics s'elaboren doncs per organitzar fenòmens de la nostra experiència en comptar, mesurar, descriure, classificar objectes del món; i també

---

[2] En la conferencia vaig llegir el conte sencer. No ho reproduïsc ací per raons de copyright. Es pot llegir en Monzó (1978, p. 21).

[3] Freudenthal (1973, p. 1)

[4] Aquest assumpte ho vaig tractar en el meu text *Semiótica y matemáticas*. Cf. Puig (1994) pp. 2-3.

[5] Aquesta concepció està descrita amb un cert detall en Puig (1997), re-elaborant idees de Freudenthal (1983) i afegint-ne d'altres.

[6] Cf. Wittgenstein (1984) I, 168.

per organitzar fenòmens de la nostra experiència en representar, calcular, definir, analitzar, generalitzar, abstraure els objectes matemàtics que organitzen aquests fenòmens. Per això, qui coneix conceptes matemàtics disposa d'una eina poderosa per veure, analitzar, descriure, construir el món.

3. Les Rutes Matemàtiques per València

Les Rutes Matemàtiques per la ciutat de València és una activitat que organitza la Càtedra de Divulgació de la Ciència de la Universitat de València Estudi General, en col·laboració amb la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi", que utilitza l'entorn de la ciutat com a recurs didàctic per a l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques, així com per desenvolupar també actituds positives cap a les matemàtiques, en mostrar que hi ha matemàtiques en l'entorn en què vivim, i que les matemàtiques permeten veure en ell –i això és molt important des del nostre punt de vista– aspectes nous, més rics i fins i tot sorprenents.

Aquesta activitat es va organitzar per primera vegada l'any 2003, i la primera ruta per València que varem escriure Onofre Monzó, Tomàs Queralt i jo mateix, va ser la que porta el títol *De les Torres dels Serrans al Jardí Botànic*.

Des de llavors hem elaborat cinc rutes diferents, totes elles dissenyades i escrites per tots tres, però el que és més important, des de l'any 2003 fins ara s'organitzen aquestes rutes portant als carrers de València xiquets que venen dels instituts de tot arreu de la nostra Comunitat. Normalment es fan vora 40 o 50 eixides a l'any en les quals estan implicats al voltant de 2000 alumnes, el que fa, en els 13 anys[7] que portem fent-les, més de 25000 alumnes.

Les rutes es realitzen guiades per monitors especialitzats, formats anteriorment en cursos dissenyats per a la seua formació, també impartits per la Càtedra de Divulgació de la Ciència. Els professors dels centres de secundària són els que sol·liciten la participació dels seus alumnes en aquestes rutes.

La primera de les rutes discorre des de les Torres de Serrans de la ciutat València, un dels vestigis de les muralles, fins al Jardí Botànic de la Universitat de València, recorrent zones del nucli històric. La segona va des de l'antiga Escola de Magisteri a la Ciutat de les Arts i les Ciències, i la tercera ix de la Ciutat de la Justícia per acabar a l'Oceanogràfic, on es desenvolupa la part principal de les seues activitats. Aquestes dos últimes recorren zones de la ciutat que s'han desenvolupat fa pocs anys i que estan marcades per l'existència en elles d'edificis singulars d'arquitectura contemporània. La quarta, que comença al Mercat de Colom (un exemple modernista de gran qualitat) i acaba a l'edifici de la seu històrica de la Universitat de València Estudi General, que es coneix amb el nom de "La Nau" –l'edifici està al carrer de La nau, i "La Nau" és alhora l'acrònim de "la Nostra Antiga Universitat"–, recorre una zona de l'eixample de la ciutat, planificada i construïda al començament del segle XX, amb una presència important d'edificis modernistes i racionalistes. La cinquena recorre un barri de la façana marítima de la ciutat, el Cabanyal, antic barri de pescadors amb nombroses mostres d'arquitectura popular, que inclouen com un element singular característic el cobriment de les

[7] La conferència va ser l'1 d'octubre de 2016. Les rutes comencen habitualment en octubre. El nombre d'alumnes a hores d'ara, octubre de 2018, en què es publiquen les actes, és encara més gran.

façanes amb mosaics de rajoles. Aquest barri, declarat Bé d'Interès Cultural, va ser amenaçat d'enderrocament per un projecte d'urbanització que no respectava la seua singularitat històrica ni el seu valor cultural, i nosaltres decidirem fer una ruta per eixe barri de la ciutat per incloure també a les rutes la reivindicació del seu manteniment. Ara que tenim una nova època de govern a la Comunitat Valenciana i a la ciutat de València, el futur del Cabanyal sembla que ja no és tan perillós. I en aquesta ruta anem des de les antigues Drassanes fins al mercat del Cabanyal.

Aquestes cinc rutes les hem anat elaborant i refinant al llarg dels anys, les dos primeres al començament, com arrencada del projecte, i, en anys posteriors, les següents i edicions corregides i millorades de les primeres. De les quatre primeres hi ha versió en català i en castellà; la cinquena només està disponible, de moment, en la seua versió catalana.

Les activitats de cadascuna de les rutes estan publicades en llibres d'entre vint i trenta pàgines que estan disponibles en la meua pàgina web, http://www.uv.es/puigl, i en la de la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "al-Khwārizmī" www.semcv.org/rutesmat/rutesval[8].

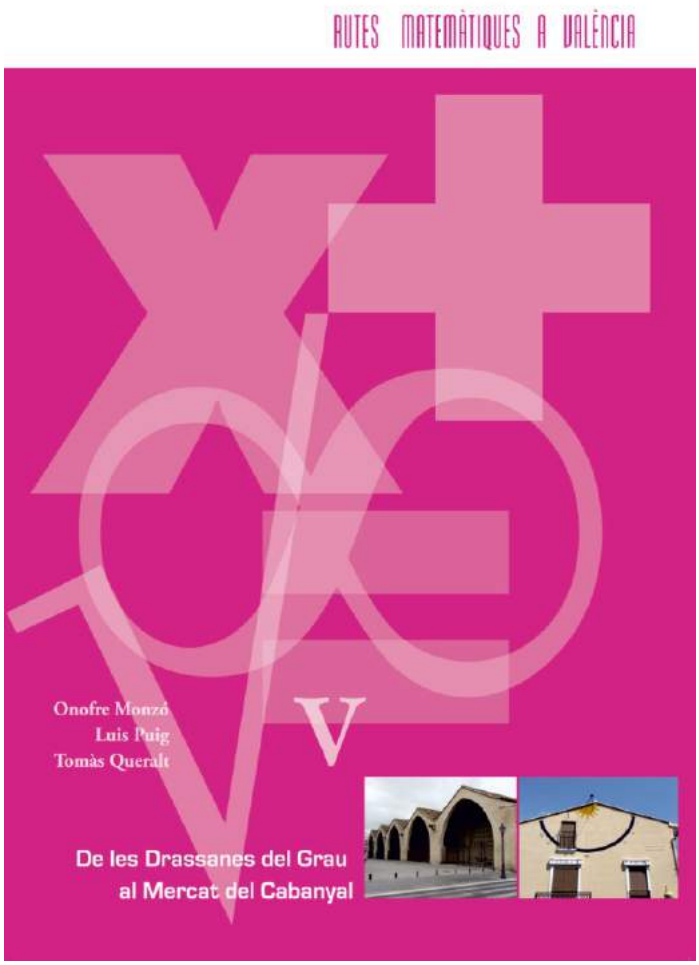


Figura 1

[8] La llista completa d'edicions dels llibres de les *Rutes Matemàtiques a València* és Monzó, Puig y Queralt (2003a, 2003b, 2004a, 2004b, 2007a, 2007b, 2007c, 2007d, 2009a, 2009b, 2009c).

4. L'ULL MATEMÀTIC IX DE L'AULA AL CARRER

Tots coneixem la història segons la qual a l'entrada de l'acadèmia de Plató es deia que no havia de traspassar el seu llindar ningú que no sabés geometria, que fos ageómetra. No és estrany que, si aquest plantejament es trasllada a l'escola, els nostres alumnes se senten exclosos. Més aviat es tracta de fer tot el contrari: no establir una prohibició, no reservar el món ideal de les matemàtiques als elegits, als membres d'aquesta secta esotèrica que serien els matemàtics, sinó mostrar que fora de l'escola i en ella, en el món en el seu conjunt, les matemàtiques ens fan més poderosos perquè ens fan veure coses en el món que, si no, no veuríem. I això perquè, com ja hem dit, les matemàtiques tal com nosaltres les concebem no són objectes d'un món ideal, sinó que sorgeixen precisament per organitzar, matemàticament, el món de la nostra experiència.

Eixim al carrer doncs per fer una ruta matemàtica per València, i comencem veient matemàtiques per tot arreu, o millor, veient que determinats fenòmens del món es poden descriure d'una altra manera, amb una altra precisió, si es veuen amb ulls matemàtics. I això és així perquè l'ull matemàtic no és un ull nu, espontani, sinó un ull analític i instruït. I quan es mira el que apareix a la figura 2, l'ull matemàtic veu més coses, veu algunes coses que serveixen per analitzar que el que hi ha en la figura no és una paràbola, encara que l'ull nu el que veu és probablement una paràbola[9], sinó que és una catenària. Amb un ull instruït per les matemàtiques vegem més i millor el món.



Figura 2

[9] L'ull que veu una paràbola no és en realitat un ull totalment nu. Un ull despullat de tota matemàtica i vestit no més del llenguatge natural i l'experiència lingüística veuria probablement una cadena i tal volta una paràbola com nom d'una forma coneguda pel seu aspecte visual.

5. L'ORGANITZACIÓ DE LES RUTES I D'AQUESTA CONFERÈNCIA

Les rutes estan organitzades com un conjunt d'activitats que es plantegen per realitzar al llarg d'un recorregut que discorre pels carrers de la ciutat. Aquestes activitats poden estar plantejades pel conjunt de la ruta o en moments determinats d'ella. Les del primer tipus són activitats que es plantegen al començament de la ruta i que consisteixen en estar atent a l'aparició de determinats objectes que estan al llarg del recorregut i que cal descriure o classificar o pensar en ells des d'un punt de vista matemàtic. Per a les activitats del segon tipus, la ruta s'organitza en parades o estacions, i en cadascuna d'aquestes parades o estacions es plantegen una sèrie de tasques que cal realitzar.

Aquesta conferència l'he organitzada també com una de les nostres rutes. Ja vos he plantejat una activitat per a tota la conferència, reflexionar sobre el seu títol a partir del breu comentari que he fet d'ell, i teniu que anar pensant en la seua relació amb les històries, reflexions i plantejaments teòrics que apareguen al llarg de la conferència.

En la conferència hem anat fent algunes parades preliminars, i ara anem a fer una parada que apareix a la primera de les rutes, la que va de les Torres dels Serrans al Jardí Botànic. Aquesta parada, la primera que anem a fer de les que apareixen a les rutes, serà a la plaça de la Mare de Déu de València.

6. OBJECTES MATEMÀTICS QUE ES TROBEN A LA CIUTAT

L'activitat que es planteja a la ruta també comença mirant una cosa que està escrita en llatí. Igual que esta xarrada. La plaça de la mare de Déu de València és el centre de la València romana on es creuen els carrers principals que van de nord a sud i d'est a oest, el cardo i el decumanus, i es planteja als alumnes l'activitat següent:

> Observa la placa commemorativa, en el sòl entre la Basílica i la Catedral, que arreplega el testimoni literari de Tito Livio sobre la fundació de Valentia.
>
> Iunius Brutus consul Hispania is qui sub Viriatho militaverant agros et oppidum dedit quod vocatum est Valentia.
>
> (El cònsol Junio Bruto va donar a Hispània terres i un lloc fortificat, que va rebre el nom de Valentia, als que van lluitar en època de Viriat).
>
> A més hi ha una indicació de l'any en números romans. Investiga aquest tipus de numeració i compara-la amb l'actual.[10]

Aquest és un exemple del tipus d'activitats que aprofita directament un objecte matemàtic, en aquest cas un sistema de numeració, que hi ha a la ciutat. Però hi ha altres activitats que tenen un caire prou diferent, per exemple una que apareix a la ruta de recorre el barri del Cabanyal, a la que ens anem ara.

7. MATEMÀTIQUES PER VEURE MÉS A LA CIUTAT

La segona parada de les que apareixen a les rutes que vaig a mostrar-vos, es fa al Cabanyal, però el que apareix en les dos primeres pàgines de l'activitat no és una foto del Cabanyal: el que hi ha en elles és una explicació d'uns conceptes matemàtics.

En aquest cas, l'activitat ve acompanyada per una presentació inicial d'un contingut matemàtic pertinent, ja que per a que l'ull estiga instruït, cal conèixer

[10] Cf. Monzó, Puig i Queralt (2007c, p. 18).

aquest contingut matemàtic, que es pot reforçar al treballar fora de l'escola, però també perquè aquest contingut tot just s'aborda en algun centre de secundària i propugnem que estiga més present. En el text[11] es diu que

> En l'arquitectura clàssica un fris és la part de l'entaulament compresa entre l'arquitrau i la cornisa. Però habitualment entenem per fris:
>
> - Decoració tallada, pintada o gravada en bandes horitzontals.
> - Faixa que contrasta pel dibuix o el color i adorna i envolta una extensió de fons.
> - Faixa més o menys ampla que hom sol pintar a la part inferior de les parets, de diferent color que aquestes.

Això és el que veu l'ull que no és matemàtic. Però el text continua introduint l'ull instruït, els mitjans matemàtics d'organització d'eixe fenomen del món:

> En matemàtiques el que caracteritza als frisos és que estan generats, a partir d'una figura, per un conjunt d'isometries que tenen la propietat que hi ha una recta que totes les isometries d'eixe conjunt la deixen invariant. Per això és pel que els frisos es queden en una franja del pla.

I els mateixos mitjans matemàtics d'organització es presenten organitzats des del moment en què els tipus d'isometries que formen part del conjunt d'isometries que tenen aquesta propietat són quatre i no tres, la qual cosa és important que estiga plantejada d'aquesta manera en les nostres rutes per donar una imatge més completa de la concepció de les matemàtiques subjacent:

> Els moviments en el pla que poden formar part d'un fris són:
>
> - Les translacions de vector paral·lel a les vores de la regió.
> - Els girs de 180º el centre dels quals equidista de les vores de la regió.
> - Les simetries l'eix de les quals és la recta que equidista de les vores de la regió o és perpendicular a dita recta.
> - Les simetries en lliscament l'eix de les quals és la recta que equidista de les vores de la regió.

La introducció com a una simetria específica i diferent de la simetria en lliscament ens mostra que estem també organitzant els mitjans d'organització que són les matemàtiques i que també volem que les activitats matemàtiques dels alumnes no es queden senzillament en organitzar el món de la nostra experiència física amb eines matemàtiques, sinó també incloguen el organitzar les mateixes eines d'organització matemàtica i, per tant, que treballen també a un nivell d'abstracció més gran.

La presentació del contingut matemàtic que permet mirar els frisos amb un ull matemàtic inclou també la derivació de perquè hi ha set tipus de frisos diferents i quins són, i l'activitat acaba demanant que es busquen frisos com el que apareix fotografiat en la figura 3, que són frisos fets amb rajoles dels que es troben en les cases del Cabanyal, i que, ara sí, s'organitzen amb aquesta eina matemàtica.

[11] Totes les cites que apareixen a continuació estan tretes de Monzó, Puig i Queralt (2009c, p. 28).



Figura 3

8. MESURES TRADICIONALS

La tercera parada que anem a fer ens torna una altra volta a la primera de les rutes que va pel centre de València, molt a prop de la plaça de la Mare de Déu. En realitat, en la primera ruta aquesta activitat segueix immediatament a la que he descrit en primer lloc en aquesta xarrada. Les rutes segueixen un recorregut factible per la ciutat i, per tant, no van a bots com acabe de fer jo anant del centre de la ciutat al Cabanyal per tornar ara al costat d'on estàvem, al carrer de la Barcella.

En aquesta activitat el que es planteja als alumnes és també veure una cosa que existeix en els carrers de la ciutat amb ulls matemàtics:

> Al carrer de la Barcella observaràs una passarel·la que connecta la catedral amb el Palau arquebisbal. Al mur del Palau arquebisbal hi ha una pedra, datada de l'època romana, que va servir de motlle per al recipient que es feia servir com a mesura dels cereals. Eixa mesura s'anomenava "barcella". Al Museu d'Història de València està la barcella original. Investiga sobre la forma del recipient, la seua capacitat i les mesures tradicionals relacionades amb la barcella[12].

9. MATEMÀTICS ALS CARRERS DE VALÈNCIA

A la ciutat de València existeix el costum d'indicar prou sovint l'ofici de les persones a les quals es dediquen els carrers. Tenim Periodista Azzati, Escultor Capuz, Pintor Salvador Abril, Taquígraf Martí, o fins i tot Erudit Orellana. Entre la nòmina de professions hi ha uns quants matemàtics. A la ruta que va del mercat de Colom a la Nau[13], es recorre el carrer de Jorge Juan, el que aprofitem per introduir elements d'història.

Aquest és un altre tipus d'activitat que està en les nostres rutes. La forma que té una activitat d'aquest tipus és prou diferent de la dels altres dos tipus que acaben de veure. El que presentem en aquest cas en la ruta és la narració d'una història, acompanyada d'una proposta d'activitats matemàtiques relacionades amb la història en qüestió.

9.1. JORGE JUAN: MESURAR EL MÓN

En la ruta que passa pel carrer Jorge Juan, parlem doncs d'una història en la que Jorge Juan és el protagonista: la de la mesura del meridià. Però d'un meridià que no està a prop de nosaltres sinó a les Amèriques cap on se'n va anar el 26 de maig de 1735, per a iniciar uns treballs que no conclourien fins l'any 1744.

En el llibre de la ruta es comença parlant de la mesura del món. S'explica el procediment de triangulació, que és el procediment amb el qual es van fer les mesures del meridià, i es parla també de que la mesura del meridià, a banda de les

[12] Cf. Monzó, Puig i Queralt (2007c, p. 21).
[13] Monzó, Puig i Queralt (2004b, 2009b).

raons per les quals les va fer l'expedició en la qual va participar Jorge Juan, "sempre ha estat un assumpte important per raons pràctiques, però també per conèixer la grandària del món". I, a més de referir-se a la mesura feta en la Grècia clàssica del meridià entre Alexandria i Assuan, s'aprofita l'ocasió per dir que el matemàtic que dóna nom a la nostra Societat d'Educació Matemàtica, Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī, va participar en una altra mesura del meridià per mesurar de nou el món, encarregada al segle IX pel califa al-Ma'mūn.

Però també es diu que "a finals del segle XVIII, aparegué una nova raó per tindre una bona mesura del meridià: la introducció del sistema mètric decimal i la definició del metre"[14], i s'explica la importància que va tindre la introducció d'una mesura que fora universal com a conseqüència de les idees de la Il·lustració i de la Revolució Francesa.

No vaig a continuar doncs amb la història de la mesura del meridià en que va participar Jorge Juan. Canviarem de carrer i de meridià per parlar d'altres històries amb altres personatges al voltant de la creació del metre.

9.2. CÍSCAR I EL METRE. LA BUSCA D'UNA MESURA UNIVERSAL

Quan ixc de ma casa en el carrer que porta el nom de Mestre Racional –que no és un mestre, sinó eixa institució de la corona d'Aragó semblant a l'actual Síndic de Comptes– i me'n vaig a peu cap al centre de la ciutat, em trobe en el cantó de Mestre Racional i el carrer de Císcar, un rètol antic de ceràmica que indica, en aquest cas entre parèntesi, "matemático". Per desgràcia, eixa indicació ha desaparegut de la resta de rètols moderns, metàl·lics i molt més lletjos que no més diuen "Carrer de Ciscar".



Figura 4

[14] Cf. Monzó, Puig i Queralt (2004b, p. 17).

Gabriel Ciscar va participar en la Comissió de Peses i Mesures de l'Institut Nacional de França com a representant d'Espanya, en la qual es va adoptar i definir el metre com a unitat de mesura el 10 de desembre de 1799.

La memòria que va presentar del resultat dels treballs i l'establiment del sistema mètric decimal es va publicar en Madrid en 1800 i les Corts Valencianes en publicaren un facsímil l'any 2000, per commemorar el seu bicentenari[15]. El seu títol, *Memoria elemental sobre los nuevos pesos y medidas decimales fundados en la naturaleza*, indica explícitament la voluntat de tindre unes mesures "fundades en la naturalesa". I Gabriel Ciscar comença la introducció de la seua memòria subratllant aquesta idea:

> La Nación Francesa fue la primera que oyendo las reclamaciones de los sabios decretó la abolición del monstruoso sistema existente de pesos y medidas, substituyéndoles otros deducidos de la naturaleza misma, y tan constantes e invariables como ella.[16]

La idea ja estava present en la proposta que va presentar Talleyrand a l'Assemblea Nacional francesa en 1790, poc després de l'inici de la Revolució Francesa, proposta que va ser aprovada, on es posa l'èmfasi en què no basta reduir la diversitat fastigosa de mesures a una única, sinó que per convèncer a tothom, a totes les persones i les nacions, cal que la mesura "estiga relacionada amb un model invariable pres de la naturalesa" [17].

El gènere humà quan, amb la Il·lustració i la Revolució Francesa, es pensa universal i vol esdevindre internacional, busca també una mesura que siga universal i puga ser acceptada per tots. I, per aconseguir-ho, es pensa en què siga una mesura natural, es pensa que cal buscar alguna cosa que no siga feta per nosaltres sinó que estiga en el món com una cosa que ja ens trobem fet.

Subratlle aquesta idea que subjau a la mesura del meridià per establir el metre, per a portar la vostra atenció a que aquest fet que acabem de trobar-nos a la ruta d'aquesta xarrada és del tipus de fets als quals cal estar atents en l'activitat per a tot el recorregut enunciada a partir del títol de la xarrada, títol tret del mite bíblic segons el qual Elohim, el Déu de la Bíblia, va organitzar el món segons mesura i nombre i pes.

---

[15] Císcar (1800, 2000). El facsímil del bicentenari es va publicar acompanyat d'un estudi d'Antonio Ten (Ten, 2000).

[16] Císcar (1800, p. s/n).

[17] "…il faut, pour que la solution du problème soit parfaite, que cette réduction se rapporte à un modèle invariable pris dans la nature" (Talleyrand, 1790, p. 12). Cal dir que Talleyrand proposava que el model invariable estiguera relacionat amb una propietat dels pèndols i que això va ser el que va aprovar la Assemblea Nacional francesa. Tanmateix l'Acadèmia de Ciències francesa en el seu informe va optar per la mesura del meridià i va ser això el que es va fer i no el que havia aprovat l'Assemblea.

10. La busca d'una mesura universal com a il·lusió

Abandone aquesta parada sense contar la història de com es va fer la mesura del meridià de París per establir el metre[18], història que resumim en el llibre de la ruta que passa pel carrer de Jorge Juan en un text d'una pàgina, escrit perquè es llija mentres es camina per eixe carrer, en què diguem que

> La tasca de Méchain i de Delambre[19] fou un llarg camí d'aventures i desventures que culminaren el dia 10 de desembre de 1799, quan es publicà el decret que establia el nou sistema d'unitats i que ordenava acunyar una medalla commemorativa (de fet no s'acunyà fins molts anys després) amb la inscripció: "À tous les temps, à tous les peuples".[20]

En realitat la història i les aventures i desventures no acaben amb la publicació del decret, ni amb la mort de febre groga de Méchain el 1804 al Desert de les Palmes. Encara que el metre ja estava establert, després de la mort de Méchain s'organitza una altra expedició que comença el 2 de maig de 1806 en la que participen Jean Baptiste Biot i François Aragó i també en alguns moments Josep Chaix, valencià de Xàtiva, i José Rodríguez González, professor de la Universitat de Santiago.

Si la història de Méchain i Delambre n'està plena d'aventures i desventures, la de Biot i Aragó n'és tota una novel·la[21], degut entre altres coses al fet de la guerra que esclata entre França i Espanya.

L'expedició de Biot i Aragó volia prolongar la mesura del meridià de París feta per Méchain i Delambre, arribant fins a Mallorca. Eixa va ser una idea plantejada inicialment pel mateix Méchain. Méchain pensà inicialment triangular les Illes des del Monsià, però va tindre que baixar cap al sud incloent el Desert de les Palmes. Després pensà en fer-ho des de Cullera, però Cullera no es veu des de les Illes, i, finalment pensà fer-ho des del Montgó, la muntanya que els àrabs anomenaren Jabal Qaun[22]. La figura 5 mostra el seu projecte de triangulació[23].

---

[18] La història està estudiada amb molta informació documental en Ten (1996) i està narrada de forma més emocionant, sense perdre el rigor, en Moreu-Rey (1956).

[19] Pierre André Méchain i Jean Baptiste Joseph Delambre foren els responsables de l'expedició. Delambre es va encarregar de mesurar el meridià de París entre Dunkerque i Rodez, i Méchain entre Rodez i Barcelona.

[20] Monzó, Puig i Queralt (2004b, p. 19)

[21] El mateix Aragó la conta com una novel·la a la seua autobiografia *Histoire de ma jeunesse* (Aragó, 1854).

[22] Que es pot traduir per "la muntanya roja vibrant" o "la muntanya que vibra roja".

[23] La figura està treta d'un estudi fet per Bigourdan en 1900 a partir de correspondències inèdites de Méchain, Biot i Arago, en què es poden trobar totes les triangulacions que va plantejar Méchain per la prolongació de la mesura del meridià de Paris (Bigourdan, 1900, p. 476).



Figura 5. Triangulació proposada per Méchain del Montgó a Mallorca

Biot i Aragó arribaren a fer el que Méchain havia pensat. Tanmateix, les noves mesures del meridià de Paris fetes per ells acabaren servint per constatar que la forma de la terra era irregular, i, per tant, que mesurar un meridià no tenia sentit com a mesura universal, no tots els meridians eren iguals. Com indica Antoni Ten al final del seu llibre *Medir el metro*:

> La vieja ilusión de los revolucionarios franceses, la medida universal fundada en la naturaleza, libre de cualquier relación con un país o lugar determinado, se reveló, definitivamente, como una ilusión.[24]

11. PER ACABAR, TRENQUEM ELS MITES

Una mesura fundada en la naturalesa és una il·lusió, entre altres coses, perquè el món no va ser creat per cap déu segons mesura i nombre i pes, ni l'univers ha estat escrit en llenguatge matemàtic com deia Galileo Galilei. Som nosaltres, el gènere humà, els que hem organitzat una part de la nostra experiència creant una eina poderosa: les matemàtiques. Una eina d'empoderament, que ens permet veure en el món coses que no podríem veure sense ella. Acabe canviant el títol d'aquesta xarrada. Ratlle la paraula "disposuisti" i la canvie per "disposuimus": "Sed omnia in mensura et numero et pondere ~~disposuisti~~ disposuimus", "Però tot el varem organitzar nosaltres segons mesura i nombre i pes".

[24] Ten (1996, p. 201).

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Arago, F. (1854) *Histoire de ma jeunesse*. Bruxelles & Leipzig: Kiessling, Schnée et Cie.

Bigourdan, M. G. (1900). La prolongation de la méridienne de Paris, de Barcelone aux Baléares, d'après les correspondances inédites de Méchain, de Biot et d'Arago, *Bulletin Astronomique XVII*, pp. 467-480.

Císcar, G. (1800). *Memoria elemental sobre los nuevos pesos y medidas decimales fundados en la naturaleza*. Madrid: En la Imprenta real.

Císcar, G. (2000). *Memoria elemental sobre los nuevos pesos y medidas decimales fundados en la naturaleza*. Valencia: Corts Valencianes.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Monzó, O.; Puig, L. y Queralt, T. (2003a). *Rutes Matemàtiques a València. I. De les Torres dels Serrans al Jardí Botànic*. València: Universitat de València / SEMCV.

Monzó, O.; Puig, L. y Queralt, T. (2003b). *Rutes Matemàtiques a València. II. De l'Escola de Magisteri "Ausiàs March" al Museu de les Arts i les Ciències*. València: Universitat de València / SEMCV.

Monzó, O.; Puig, L. y Queralt, T. (2004a). *Rutes Matemàtiques a València. III. De la Ciutat de la Justícia a l'Oceanogràfic*. València: Universitat de València / SEMCV.

Monzó, O.; Puig, L. y Queralt, T. (2004b). *Rutes Matemàtiques a València. IV. Del Mercat de Colom a La Nau*. València: Universitat de València / SEMCV.

Monzó, O.; Puig, L. y Queralt, T. (2007a). *Rutas matemáticas por Valencia. I. De las Torres de los Serranos al Jardín Botánico*. Valencia: Universitat de València.

Monzó, O.; Puig, L. y Queralt, T. (2007b). *Rutas matemáticas por Valencia. II. De la Escuela de Magisterio "Ausiàs March" al Museo de las Artes y las Ciencias*. Valencia: Universitat de València.

Monzó, O.; Puig, L. y Queralt, T. (2007c). *Rutes Matemàtiques a València. I. De les Torres dels Serrans al Jardí Botànic. 2ª edició modificada.* València: Universitat de València.

Monzó, O.; Puig, L. y Queralt, T. (2007d). *Rutes Matemàtiques a València. II. De l'Escola de Magisteri "Ausiàs March" al Museu de les Arts i les Ciències. 2ª edició modificada.* València: Universitat de València.

Monzó, O.; Puig, L. y Queralt, T. (2009a). *Rutas matemáticas por Valencia. III. De la Ciudad de la Justicia al Oceanográfico*.

Monzó, O.; Puig, L. y Queralt, T. (2009b). *Rutas matemáticas por Valencia. IV. Del Mercado de Colón a La Nau*. Valencia: Universitat de València.

Monzó, O.; Puig, L. y Queralt, T. (2009c). *Rutes Matemàtiques a València. V. De les Drassanes del Grau al Mercat del Cabanyal.* València: Universitat de València.

Monzó, Q. (1978). *Uf, va dir ell*. Barcelona: Antoni Bosch, editor.

Moreu-Rey, E. (1956). *El naixement del metre*. Palma de Mallorca: Editorial Moll.

Puig, L. (1994). *Semiótica y matemáticas*. Valencia: Episteme.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico, (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori/ICE.

Talleyrand-Périgord, C.-M. (1790) *Proposition faite à l'Assemblée nationale, sur les poids et mesures par M. l'évêque d'Autun*. Paris: Imprimerie nationale.

Ten, A. (1996). *Medir el metro. La historia de la prolongación del arco de meridiano Dunkerque-Barcelona, base del Sistema Métrico Decimal*. Valencia: Universitat de València / CESIC

Ten, A. (2000). *Gabriel Císcar y su Memoria elemental sobre los nuevos pesos y medidas decimales fundados en la naturaleza*. Valencia: Corts Valencianes.

COMUNICACIONS

INTEGRANDO PROCESOS DE LEARNING ANALYTICS USANDO APPLETS DE GEOGEBRA Y JAVASCRIPT

Juan Gutiérrez-Soto[1] – Carlos Valenzuela[2]
juan.gutierrez-soto@uv.es – carvaga86@hotmail.com
David Arnau[1] – Olimpia Figueras[2]
david.arnau@uv.es – figuerao@cinvestav.mx
[1]Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València- València
[2] Cinvestav - Ciudad de México

Modalitat: Comunicació
Nivell educatiu: Secundària
Paraules clau: GeoGebra, JavaScript, applets, learning analytics, fracciones

RESUMEN

En este trabajo mostramos un ejemplo de integración de procesos de learning analytics en un applet de GeoGebra con subrutinas escritas en JavaScript. El objetivo es poder recopilar parte de la información resultante de la interacción estudiante/applet de una forma automática. A partir de un applet de GeoGebra, describimos el proceso necesario para incrustarlo en una página web, añadiendo preguntas y la posibilidad de descargar datos sobre los procesos usados por los alumnos durante la interacción estudiante/applet. El applet que hemos utilizado como ejemplo tiene como objetivo ubicar fracciones en la recta numérica.

0. INTRODUCCIÓN

En los últimos años, los datos que están disponibles públicamente en la red han aumentado exponencialmente. Este crecimiento ha dado lugar a interesarse en las tecnologías para la recogida de información, que pretenden analizar esa gran cantidad de datos y ofrecer productos personalizados para cada usuario (Greller y Drachsler, 2012).

La combinación de esa gran cantidad de datos junto con las tecnologías para su recogida y análisis podría ser utilizada en la educación para mejorar la calidad, la eficiencia y la eficacia de los procesos de enseñanza.

En este mismo sentido, en educación últimamente se están utilizando herramientas digitales en vez de o al mismo tiempo que el lápiz y papel, como libros digitales, aplicaciones en tabletas, applets de GeoGebra, etc. Estas herramientas digitales no solo proporcionan la misma información que obteníamos en papel y lápiz sino que además permiten obtener datos sobre cómo cada estudiante interactúa con esos programas.

En este sentido, en la primera conferencia sobre learning analytics en 2011 se definió el concepto de learning analytics como la medición, recopilación, análisis y presentación de datos sobre los estudiantes, sus contextos y las interacciones que allí se generan con el fin de comprender el proceso de aprendizaje que se está desarrollando y optimizar los entornos en los que se produce (Siemens y Gasevic, 2012).

En este trabajo pretendemos integrar procesos de learning analytics en un applet

de GeoGebra. Se ha considerado GeoGebra ya que es una herramienta comúnmente utilizada en la comunidad de profesores. Además, permite la generación de applets que se pueden incrustar en páginas web. Otro aspecto interesante de GeoGebra es la posibilidad de programar subrutinas en JavaScript que permiten comprobar la validez de las respuestas de los estudiantes, generar mensajes de error, dar ayudas y guardar gran cantidad de información en la hoja de cálculo.

Más allá de las posibilidades en la interacción estudiante/applet que ofrecen las subrutinas de JavaScript es de destacar el hecho de que permiten recoger de una manera no invasiva las acciones de los alumnos en tiempo real durante la interacción que éstos tienen con el applet. Dicho registro posibilita el análisis de las respuestas y los procesos usados por los alumnos durante la interacción estudiante/applet. Esta información puede emplearse para la caracterización de las actuaciones de los estudiantes y para la identificación de estrategias de resolución de los alumnos.

1. Construcción del applet de GeoGebra

El applet que hemos desarrollado está basado en otro construido por Fernando Díaz llamado "Sitúa la fracción en la recta", que se puede encontrar en el siguiente enlace público:

https://www.geogebra.org/m/Kb7ggwMP

El objetivo del applet "Sitúa la fracción en la recta" es que el alumno sitúe en la recta numérica una fracción dada (Fig. 1), moviendo el punto rojo. Si el punto está situado correctamente, el applet proporciona el mensaje "Correcto!!", mientras que si no lo está no devuelve ningún mensaje. En el momento en que el alumno quiera cambiar la fracción a buscar, debe apretar al botón "Otra fracción". La fracción es generada aleatoriamente, con numerador entre -10 y 10 y denominador entre 0 y 10. El applet muestra una recta numérica entre los números -4 y 4 con la partición de cada unidad en tantos trozos como el denominador de la fracción dada.

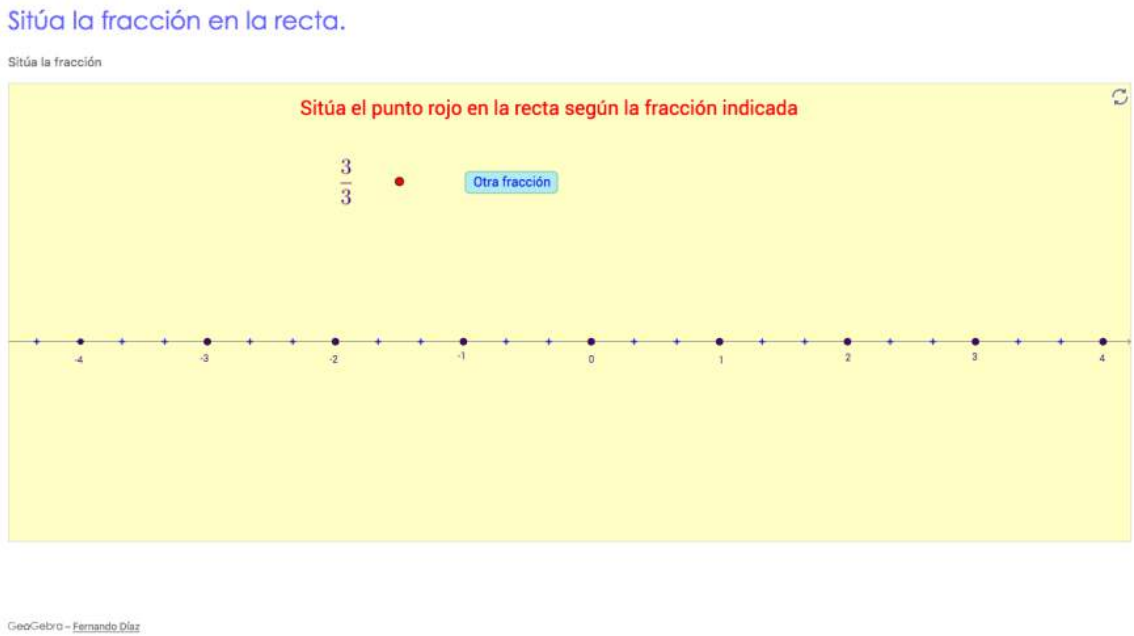


Figura 1: Applet de Fernando Díaz

Para permitir un análisis, desde el punto de vista del aprendizaje y la enseñanza, de las acciones del estudiante necesitamos añadir elementos que nos permitan incrementar la retroalimentación y hacer una recogida de datos exhaustiva. En particular, queremos que el nuevo applet:

- Proporcione al alumno un aviso de error cuando la posición sea errónea y un aviso de correcto cuando la posición sea correcta.
- Almacene las posiciones incorrectas donde el estudiante ha situado el punto rojo, para una fracción dada.
- Almacene el tiempo que ha dedicado el alumno para dar una respuesta y, de manera general, en situar correctamente la fracción en caso que lo consiga.

El almacenamiento de la interacción con el applet se guardará en la hoja de cálculo de GeoGebra de forma ordenada.

El applet modificado que contiene estos elementos se puede visitar en www.uv.es/gusojuan/7/7.html. En la Fig. 2 se muestra el nuevo applet, en el que se ha modificado el intervalo de la recta numérica para centrar la situación de enseñanza-aprendizaje en el campo de los números positivos. Para comenzar clicamos en el botón INICIO.

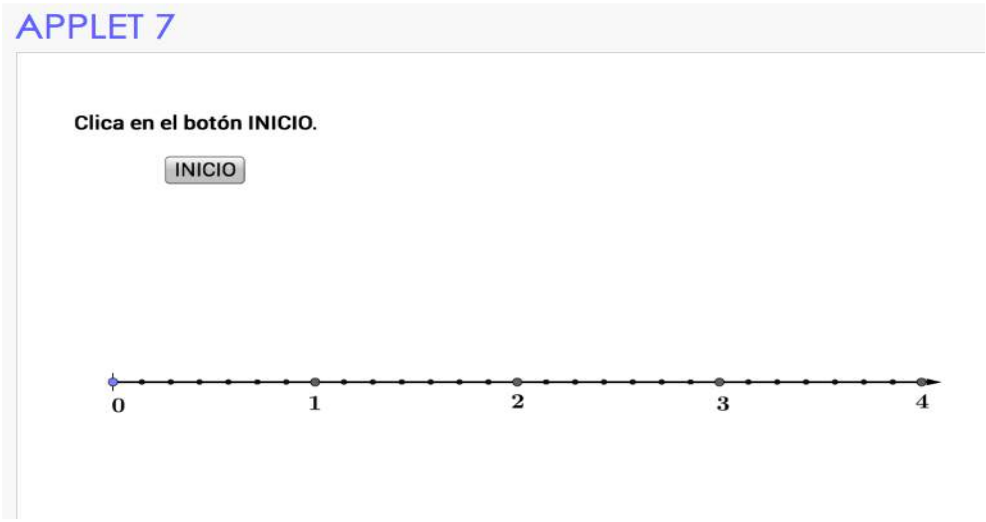


Figura 2: Primera pantalla del Applet 7 construido por nosotros.

Para iniciar la actividad se debe hacer clic en el botón INICIO. La subrutina de JavaScript asociada a esta acción tiene las siguientes funcionalidades:

- Pide al sistema el tiempo en el que se ha apretado el botón (horas, minutos y segundos). Este tiempo servirá como tiempo inicial para hallar el tiempo que ha tardado el estudiante en ubicar una fracción correcta o erróneamente.

```
momentoActual= new Date()
hora=momentoActual.getHours()
minuto=momentoActual.getMinutes()
segundo=momentoActual.getSeconds()
```

Figura 3: Comandos de JavaScript dentro de GeoGebra que registran la hora actual.

- Determina la fracción a encontrar. Para ello asigna un entero aleatorio entre 1 y 10 al denominador y al numerador otro entero entre 0 y 4 veces el denominador.

```
var Numerador=ggbApplet.getValue("Numerador")
var Denominador=ggbApplet.getValue("Denominador")
Denominador=Math.floor(Math.random()*10 +1)
Numerador=Math.floor(Math.random()*4*Denominador)
ggbApplet.setValue("Numerador",Numerador)
ggbApplet.setValue("Denominador",Denominador)
```

Figura 4: Comandos de JavaScript que genera las fracciones aleatoriamente.

- Inicializa las variables de la hoja de cálculo donde vamos a introducir todos los valores de tiempo, numerador y denominador de la fracción a encontrar, numerador y denominador de la prueba que ha realizado el alumno. Además, guarda el tiempo en la primera fila de la hoja de cálculo.

```
for (i = 0; i < 50; i++) {
ggbApplet.setValue("A"+i,0)
ggbApplet.setValue("B"+i,0)
ggbApplet.setValue("C"+i,0)
ggbApplet.setValue("D"+i,0)
ggbApplet.setValue("E"+i,0)
ggbApplet.setValue("F"+i,0)
ggbApplet.setValue("G"+i,0)
ggbApplet.setValue("H"+i,0)
}

ggbApplet.setValue("A1",0)
ggbApplet.setValue("B1",0)
ggbApplet.setValue("C1",0)
ggbApplet.setValue("D1",0)
ggbApplet.setValue("E1",0)
ggbApplet.setValue("F1",hora)
ggbApplet.setValue("G1",minuto)
ggbApplet.setValue("H1",segundo)
```

Figura 5: Comandos de JavaScript dentro de GeoGebra que inicializan los valores de la hoja de cálculo y registran el tiempo inicial en la hoja de cálculo.

- Hace visibles los botones VERIFICA TU RESPUESTA y OTRA FRACCIÓN.

```
ggbApplet.setVisible("botón6",false)
ggbApplet.setVisible("botón1",true)
ggbApplet.setVisible("botón5",true)
```

Figura 6: Comandos de JavaScript dentro de GeoGebra que muestra los botones VERIFICA TU RESPUESTA y OTRA FRACCIÓN y esconde el botón INICIO.

Una vez hemos clicado en el botón INICIO, aparece una nueva pantalla (ver Fig. 7) con la instrucción “Mueve el punto rojo y sitúalo en la recta para representar la fracción indicada. Repite 5 veces”. Además, aparece la representación escrita de la fracción y un punto rojo que hay que mover a la posición en la recta numérica en la que se ubicaría la fracción.

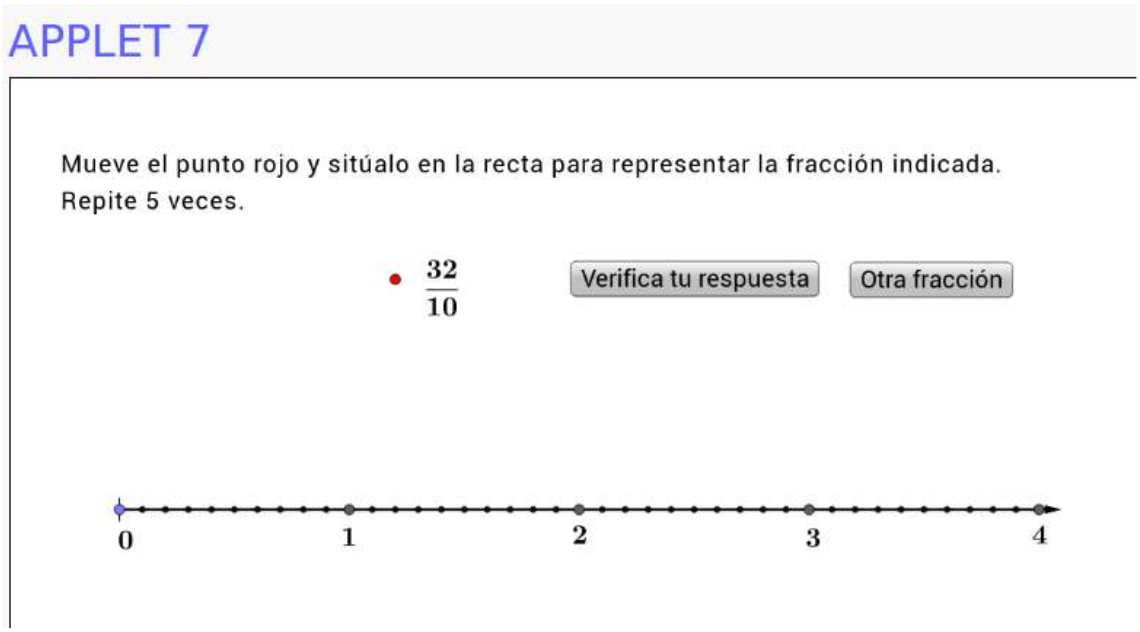


Figura 7: Segunda pantalla del Applet 7, una vez se ha clicado al botón INICIO.

El estudiante debe situar el punto rojo en la recta para representar la fracción dada y clicar en el botón VERIFICA TU RESPUESTA. Este botón tiene las siguientes funcionalidades:

- Guarda el tiempo al apretar el botón, de la misma forma que se hizo en el botón INICIO (ver Fig. 3)

- Guarda en la hoja de cálculo las variables tiempo, numerador y denominador de la fracción a encontrar, numerador y denominador de la fracción de la prueba que ha realizado el alumno (Fig. 8)

```
ggbApplet.setValue("A"+contador_filas,contador_problema)
ggbApplet.setValue("B"+contador_filas,Numerador)
ggbApplet.setValue("C"+contador_filas,Denominador)
ggbApplet.setValue("D"+contador_filas,Numeradorprueba)
ggbApplet.setValue("E"+contador_filas,Denominador)
ggbApplet.setValue("F"+contador_filas,hora)
ggbApplet.setValue("G"+contador_filas,minuto)
ggbApplet.setValue("H"+contador_filas,segundo)
```

Figura 8: Comandos de JavaScript que guardan las variables de proceso en la hoja de cálculo.

- Proporciona un mensaje al alumno sobre si la posición es correcta o errónea (Fig. 9). En este caso, hemos decidido que si la diferencia entre la fracción a encontrar y la que el alumno ha probado es menor que 0,05, entonces la posición es correcta. El valor de la distancia se halla como la distancia entre los puntos (fracción dada por el problema, 0) y (fracción dada por el alumno,0) en la recta numérica. En función de la evaluación que realiza el applet, el estudiante recibe un mensaje de respuesta (Fig. 9). En la Fig. 10 mostramos los comandos en JavaScript que deciden si aparece una ventana emergente u otra.



Figura 9: Ventanas emergentes que indican que el estudiante no ha representado correctamente la fracción (izquierda) o que lo ha hecho correctamente (derecha).

```
var distancia = ggbApplet.getValue("distancia")
if (Math.abs(distancia<=0.05))
{alert ("Enhorabuena. Prueba con otra fracción")
}
else{
alert("No es correcto, sigue buscando.")
}
```

Figura 10: Comandos de JavaScript que deciden si la posición dada por el estudiante es correcta o no y que envía un aviso mediante una ventana emergente.

En la Fig. 11 se muestra un ejemplo de cómo se almacenaría en la hoja de cálculo la interacción del estudiante con el applet cuando se le propone ubicar la fracción 5/3 en la recta numérica. La primera fila contiene los datos guardados por el botón INICIO que nos indican el tiempo inicial (12h 55min 36s). Las siguientes filas nos muestran información sobre los diferentes intentos correctos o fallidos del estudiante al posicionar las fracciones tras hacer clic en el botón VERIFICA TU RESPUESTA. En concreto, este estudiante ha realizado tres intentos, dos erróneos y uno correcto.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	0	0	0	0	0	12	55	36
2	1	5	3	6	3	12	55	45
3	1	5	3	4	3	12	55	52
4	1	5	3	5	3	12	55	55

Figura 11: Hoja de cálculo de GeoGebra con los datos obtenidos al ubicar la fracción 5/3 en la recta numérica.

La columna A nos indica el número de problema, que cambia en el momento que se cambia de fracción (en este caso es el problema número 1). La columna B y C representan el numerador y denominador de la fracción a encontrar, respectivamente (5 y 3 en este caso). En la columna D y E se muestra el numerador y denominador de la posición a la cual el estudiante ha movido el punto rojo. El denominador siempre es el mismo que el dado en la fracción a ubicar. El numerador es la parte entera de multiplicar el denominador por la coordenada x del punto rojo. En nuestro caso, para el primer intento (fila 2), el punto rojo tenía las coordenadas (1.99,0) y por tanto, el numerador calculado es 6. Las columnas F, G y H nos indican los tiempos inicial (fila 1) y de cada intento (resto de filas).

Si el estudiante quiere cambiar la fracción, bien porque ha conseguido ubicarla correctamente o bien porque después de varios intentos no lo ha conseguido, debe clicar en el botón OTRA FRACCIÓN cuya funcionalidad es generar otra fracción aleatoria, de la misma forma que se hizo en el botón INICIO (ver Fig. 4) y aumentar los contadores del número de problema.

2. APPLET DE GEOGEBRA INCRUSTADO EN UN FICHERO HTML

La incrustación del applet en un archivo HTML nos permitirá plantear preguntas de respuesta escrita o realizar indicaciones para que los alumnos reflexionen sobre diversas características de las fracciones. El archivo HTLM también permitirá almacenar toda la información generada, tanto en la interacción con el applet, como las respuestas a las preguntas, en un único fichero texto local para su descarga y posterior análisis.

El programa GeoGebra permite la opción de descargar la hoja de trabajo fuera de línea en un fichero comprimido ZIP. Una vez descomprimido el fichero ZIP, el applet se encuentra incrustado en un fichero HTML. Para poder añadir preguntas y poder descargar información tanto de las preguntas como del applet, es necesario modificar el fichero HTML añadiendo comandos en JavaScript, que permiten la comunicación de capa GeoGebra con la capa HTML. De esta forma, se consigue obtener los valores guardados en la hoja de cálculo del applet. A continuación listamos los comandos en HTML y JavaScript que hemos añadido al fichero HTML.

El primer paso consiste en crear un enlace para poder descargar la información de la interacción estudiante/applet en un fichero texto. Los alumnos clicarán en este enlace al terminar la actividad. Los comandos se muestran en la Fig. 12.

```
<a id="download" href="#" download="" style="font-size:150%; text-align:center;
color:red;">Una vez contestado a las preguntas, clica aquí</a>
```

Figura 12: Comandos en HTML para añadir un enlace que descargará la interacción alumno/applet para cada alumno en un fichero texto.

El segundo paso es añadir preguntas. En este applet hemos añadido cuatro preguntas que pretenden que los alumnos muestren sus conocimientos sobre el orden de las fracciones y la representación de las fracciones equivalentes. Las preguntas planteadas son:

1. ¿Cuál es la FRACCIÓN MAYOR que se puede representar como un punto en la parte de la recta numérica que se muestra en la pantalla?
2. ¿La fracción que diste como respuesta en la pregunta 1 se puede escribir de otras formas? ¿Cuáles?
3. ¿Cuál es la FRACCIÓN MENOR que se puede representar como un punto en la parte de la recta numérica que se muestra en la pantalla?
4. ¿La fracción que diste como respuesta en la pregunta 3 se puede escribir de otras formas? ¿Cuáles?

En la Fig. 13 mostramos los comandos HTML que añaden las cuatro preguntas y los campos para responder. El comando *textarea* añade un campo en la página web para que el alumno pueda escribir la respuesta.

```
  <span> 1. ¿Cuál es la FRACCIÓN MAYOR que se puede representar como
un punto en la parte de la recta numérica que se muestra en la
pantalla? </span>
    <textarea rows=1 id="content_01"> </textarea><br>
    <span> 2. ¿La fracción que diste como respuesta en la pregunta 1
se puede escribir de otras formas? ¿Cuáles?</span>
    <textarea rows=1 id="content_02"> </textarea><br>
  <span> 3. ¿Cuál es la FRACCIÓN MENOR que se puede representar como
un punto en la parte de la recta numérica que se muestra en la
pantalla?</span>
    <textarea rows=1 id="content_03"> </textarea><br>
  <span> 4. ¿La fracción que diste como respuesta en la pregunta 3 se
puede escribir de otras formas? ¿Cuáles?</span>
    <textarea rows=1 id="content_04"> </textarea><br>
```

Figura 13: Comandos en HTML que añaden las cuatro preguntas y los campos donde responder.

El tercer paso es guardar toda la información de cada estudiante en variables JavaScript, tanto las respuestas a las preguntas como los datos almacenados en la hoja de cálculo del applet de GeoGebra. Para organizar la información, indicamos que se guarde en un fichero texto que se llama applet07.txt. Todo esto se consigue añadiendo los comandos en JavaScript de la Fig. 14:

```
   if (content_01==" " || content_01=="" || content_02==" " ||
content_02=="" || content_03==" " || content_03=="" || content_04==" "
|| content_04=="") {alert('Debes contestar a las preguntas')}
   else{

downloadLink.href= 'data:application/manifest,'+'$applet07_01
$'+encodeURIComponent(content_01)+'$applet07_02$'+encodeURIComponent
(content_02)+'$applet07_03$'+encodeURIComponent(content_03)
+'$applet07_04$'+encodeURIComponent(content_04)+'$applet07_HC
$'+encodeURIComponent(content_HC);
  var filename =  'applet07.txt';
  downloadLink.setAttribute('download',filename);
  }
  });
</script>

  content_HC=content_HC+'$';
  content_HC=content_HC+document.ggbApplet.getValue(B_hc);
  content_HC=content_HC+'$';
  content_HC=content_HC+document.ggbApplet.getValue(C_hc);
  content_HC=content_HC+'$';
  content_HC=content_HC+document.ggbApplet.getValue(D_hc);
  content_HC=content_HC+'$';
  content_HC=content_HC+document.ggbApplet.getValue(E_hc);
  content_HC=content_HC+'$';
  content_HC=content_HC+document.ggbApplet.getValue(F_hc);
  content_HC=content_HC+'$';
  content_HC=content_HC+document.ggbApplet.getValue(G_hc);
  content_HC=content_HC+'$';
  content_HC=content_HC+document.ggbApplet.getValue(H_hc);
  content_HC=content_HC+'$';
};
};
```

```
<script>
var downloadLink = document.querySelector('#download');
downloadLink.addEventListener('click',function()
{
var content_01 = document.querySelector('#content_01').value;
var content_02 = document.querySelector('#content_02').value;
var content_03 = document.querySelector('#content_03').value;
var content_04 = document.querySelector('#content_04').value;
var contador_filas = document.ggbApplet.getValue('contador_filas');
var content_HC='';
if (contador_filas >= 1) {
for (i=1;i<=contador_filas;i++)
{
 var A_hc = 'A'+i;
 var B_hc = 'B'+i;
 var C_hc = 'C'+i;
 var D_hc = 'D'+i;
 var E_hc = 'E'+i;
 var F_hc = 'F'+i;
 var G_hc = 'G'+i;
 var H_hc = 'H'+i;
```

Figura 14: Comandos en JavaScript que guardan la información de la respuestas y de la interacción estudiante/applet en el fichero texto applet07.txt.

Una vez el alumno ha clicado en el enlace y descargado el fichero applet07.txt, se guardará localmente para su posterior análisis.

En la Fig. 15 se muestra un ejemplo de respuesta dada por un estudiante ficticio cuyas respuestas serían las mostradas en la Fig. 11:

```
$applet07_01$ 4/1
$applet07_02$ 8/2
$applet07_03$ 0
$applet07_04$ 0/2
$applet07_HC$
0$0$0$0$12$55$36$
1$5$3$6$3$12$55$45$
1$5$3$4$3$12$55$52$
1$5$3$5$3$12$55$55$
```

Figura 15: Contenido del fichero texto applet07.txt para un estudiante inventado.

Estas respuestas se pueden organizar de la siguiente manera:

Respuesta a la pregunta 1: 4/1

Respuesta a la pregunta 2: 8/2

Respuesta a la pregunta 3: 0

Respuesta a la pregunta 4: 0/2

# problema	Numerador problema	Denominador problema	Numerador alumno	Denominador alumno	Tiempo		
					hh	mm	ss
0	0	0	0	0	12	55	36
1	5	3	6	3	12	55	45
1	5	3	4	3	12	55	52
1	5	3	5	3	12	55	55

Tabla 1: Respuestas del alumno ordenadas en una tabla.

En definitiva, el alumno ha sido capaz de contestar bien a las cuatro preguntas y ha hecho dos intentos fallidos y uno correcto al ubicar la fracción 5/3 en la recta numérica. En los dos primeros intentos ha representado las fracciones 6/3 y 4/3 en vez de 5/3. El tiempo empleado ha sido de 9 segundos en el primer intento, 7 segundos en el segundo y 3 segundos en el último.

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Greller, W., y Drachsler, H. (2012). Translating Learning into Numbers: A Generic Framework for Learning Analytics. *Educational Technology & Society, 15* (3), 42–57.

Siemens, G., y Gasevic, D. (2012). Guest Editorial - Learning and Knowledge Analytics. *Educational Technology & Society, 15* (3), 1–2.

AGRAÏMENTS

Los autores agradecen la financiación recibida a través del proyecto EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER), y de los proyectos GV/2016/118 y GVPrometeo/2016/143 de la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport de la Generalitat Valenciana.

MATHS & CRAFTS: UNA MANERA D´APRENDRE ANGLÈS EN MATEMÀTIQUES

Marta Argudo Ortiz
martargudo@gmail.com
Col·legi Sagrada Familia P.J.O - València

Modalitat: Comunicació
Nivell educatiu: Secundària
Paraules clau: CLIL, metodologia, geometria, recursos manipulatius

RESUM

Esta comunicació tracta una experiència de bilingüisme en l'assignatura de matemàtiques (especialment en el bloc de geometria) amb alumnat de 1er ESO.

Aquest projecte denominat Maths & Crafts seguix la metodologia CLIL (Content and Language Integrated Learning) que afavorix l'ús de l'anglès de forma natural ja que els alumnes es centren en els continguts que li'ls impartixen i no tant en l'idioma.

Es presentarà el vocabulari matemàtic en anglès i la forma d'introduir-ho, a més de la metodologia, activitats i recursos utilitzats.

1. QUÈ ÉS EL MÈTODE CLIL?

CLIL són les sigles en anglès de Content and Language Integrated Learning que significa Aprenentatge Integrat de Continguts en Llengua Estrangera (AICLE). Aquest mètode afavorix l'aprenentatge d'una llengua de forma natural, com una ferramenta de comunicació i no sols com una assignatura. Per a treballar en una classe amb el mètode CLIL ens centrem més en el vocabulari que volem que l'alumnat aprenga que en les estructures gramaticals, que es treballaran més profundament en la classe de l'assignatura específica, al nostre cas l'anglès.

Volem que l'alumne siga protagonista del seu propi aprenentatge per això les activitats a l'inici són més senzilles, i a poc a poc es va augmentant el grau de dificultat, per a evitar la frustració de l'alumne al treballar en una llengua diferent de la materna, a més l'aprenentatge és més interactiu i autònom ja que es sol treballar en grups o parelles, desenvolupant treballs per descobriment e investigació i usant materials manipulatius i TICs. Una sessió amb metodologia CLIL ben plantejada hauria de disposar els següents elements, d'acord amb les 4Cs del Currículum (Coyle 1999) :

- **Contingut***:* Avançant en el currículum de la matèria, refermant les destreses i comprensió dels temes tractats.
- **Comunicació**: Utilitzant la llengua per a aprendre mentres s' aprèn la llengua en si mateixa, a més d'aprendre vocabulari específic de la matèria que s' impartix amb aquesta metodologia.
- **Cognició**: Desenvolupant les estratègies cognitives que enllacen la formació de conceptes (abstractes i concrets), els coneixements i la llengua, per a si potenciar el concepte d'aprendre a aprendre de l'alumnat.

- **Cultura**: Permetent l'exposició de diferents punts de vista i compartint el coneixement i els avanços que cada alumne va fent, afavorint així que cada alumne siga més conscient d'un mateix i dels altres.

L'aprenentatge de llengües estrangeres sempre ha sigut l'assignatura pendent dels espanyols, i en un món globalitzat conèixer una llengua estrangera és imprescindible, sobretot l'anglès que actualment és requerit en un 70% de les ofertes laborals. Richard Vaughan opina que hem d'aprofitar l'etapa escolar per a que els alumnes aprenguen anglès i ho usen ja que després de la pubertat es fa més difícil l'aprenentatge. El mètode CLIL intenta superar les limitacions dels plans d'estudi tradicionals evolucionant fins a la integració curricular, el que li dóna a la llengua estrangera un ús significatiu ja que no és un objectiu únic d'aprenentatge sinó que té un doble objectiu, usem la llengua per tant la estem aprenent i al mateix temps treballem les matemàtiques d' una manera que l' alumne es mou, sent les matemàtiques, les manipula i les relaciona amb el món que els rodeja.

2. COM VA SORGIR I EN QUÈ CONSISTEIX EL PROJECTE MATHS & CRAFTS?

Al començament del curs 2013/2014, el col·legi Sagrada Família PJO, on s'ha realitzat esta experiència, va rebre la proposta de tindre un Auxiliar de Conversació en Anglès enviat per la Conselleria d'Educació durant tot el curs en totes les etapes educatives. Este fet unit a la idea de fer un canvi metodològic en les matemàtiques de 1er ESO per fer l'assignatura més atractiva als alumnes usant materials manipulatius, TICs, treballs d'investigación... va fer que creàrem el projecte Maths & Crafts.

Este projecte es va realitzar durant tot un curs escolar, en una sessió de 55 min per setmana amb alumnat de 1ºESO. Principalment es basa en treballar els blocs d'aritmètica i sobretot de geometria utilitzant com a llengua de comunicació l'anglès.

Maths & Crafts va presentar dos novetats respecte a com s'impartia l'assignatura de Matemàtiques al col·legi:

La primera novetat com ja he dit és que s'impartia en anglès, gràcies a l'auxiliar de conversació en anglès que Conselleria va concedir al col·legi vam poder introduir sense cap problema el vocabulari necessari per a cada sessió (no més de 7 paraules noves per sessió) i treballar durant tota la sessió en aquest idioma. El tipus de metodologia va afavorir el que l'assignatura s'impartira en anglès ja que no eren necessàries llargues explicacions de nous conceptes per part del professor, sinó que els alumnes anaven aprenent els nous continguts conforme anaven realitzant el taller de la sessió. Al principi de cada classe se li entregava a l'alumnat un full del vocabulari que s'anava a utilitzar en la sessió, i ho practicàvem durant uns 5/10min, després de fer el professor una breu explicació feiem el taller, i al final una fitxa per a avaluar si l'alumnat havia sigut capaç d'aconseguir les competències de cada sessió.

La segona novetat va ser la metodologia i els recursos que vam utilitzar, cada sessió era totalment pràctica fomentant l'autonomia en l'aprenentatge i la col·laboració i cooperació entre companys ja que moltes de les sessions van ser en grup, voliem una metodologia activa i participativa que fomentara que els alumnes foren els protagonistes de les matemàtiques que estaven aprenent. Per a això es van utilitzar recursos manipulatius, la majoria d'ells creats pels propis alumnes, a

més de recursos digitals com l'ordinador de l'aula o la pissarra digital interactiva.

3. OBJECTIUS DEL PROJECTE

Els principals objectius del projecte són:

- Capacitar a l'alumne/a perquè adquirisca les destreses matemàtiques necessàries en 1erESO, parcialment en anglès.
- Utilitzar la llengua anglesa no sols en les classes específiques d'anglès, sinó també en altres matèries, de manera que es convertisca en un instrument, no en un fi en si mateixa.
- Incorporar la terminologia matemàtica tant en espanyol com en anglès al llenguatge habitual a fi de millorar el rigor i la precisió en la comunicació.
- Integrar l'ensenyament de les matemàtiques en un marc més ampli, com és el currículum integrat, de manera que superem els tradicionals compartiments estancs del coneixement.
- Capacitar a l'alumnat per a funcionar en el món actual a través del coneixement de les dades numèriques i geomètriques de l'entorn, en distintes unitats, formes i sistemes.
- Fomentar l'aprenentatge de l'assignatura a través de les TIC i la manipulació, des d'un punt de vista recreatiu.
- Despertar la curiositat de l'alumnat i fer-lo protagonista del seu propi aprenentatge.
- Fomentar el treball en equip, la cooperació i col·laboració entre companys.

4. MATERIALS MANIPULATIUS I TICS.

Per a poder donar les classes en anglès per descomptat no podien tractar-se de classes magistrals amb llargues explicacions per part del professor, per tant des del principi el professor es va centrar en ser el guia dels alumnes perquè estos pogueren ser els vertaders protagonistes del procés d'ensenyança-aprenentatge, per a això en totes les sessions utilitzarem materials manipulatius o les TICs ja que açò incentiva la creativitat, autonomia, participació activa i cooperació entre companys.

Han sigut molts els pedagogs i matemàtics que han emfatitzat en la necessitat d'aprendre fent, manipulant i inclús jugant:

Per a Piaget i Inhelder a partir de l'acció sobre els objectes els xiquets aprenen , ja que la manipulació permet fer representacions mentals que ajuden a la construcció i la interiorització de conceptes.

Al igual que per a Puig Adam que establix que "... no hi ha aprenentatge on no hi ha acció i que en definitiva, ensenyar bé ja no és transmetre bé, sinó saber guiar l'alumnat en la seua acció d'aprenentatge".

A més dels materials manipulatius hem de tindre en compte l'ús de les TICs, en este projecte hem treballat en diverses sessions amb el programa de geometria dinàmica GeoGebra, l'avantatge més clar que oferix este programari d'acord amb Mora J.A. és que la geometria deixa de ser estàtica i es pot manipular, podem veure la geometria des d'altres visions i interactuar amb ella. Amb açò aconseguim un

dels objectius bàsics del projecte Maths & Crafts, fer a l'alumne protagonista del seu propi aprenentatge augmentant la seua autonomia i iniciativa.

5. EXEMPLES D'ACTIVITATS

A continuació mostrem algunes de les activitats realitzades en el projecte durant el curs 2013/2014:

Activitat 1: MAGIC MATHS

Esta va ser la primera sessió del projecte, vam voler introduir el vocabulari bàsic de matemàtiques en anglès i fer una classe divertida per a aconseguir que els alumnes s'implicaran en el projecte des d'un primer moment, per a això realitzem uns trucs de *matemàgia* en els que els alumnes només necessitaven fer unes simples operacions, després de fer cada truc reflexionàvem sobre els continguts matemàtics utilitzats.



Figura 1: una de les diapositives de la presentació utilitzada per a la sessió.

Material:

- ordinador i projector
- llapis i paper

Vocabulari de la sessió:

• Equals	igual
• To sum / To add	sumar
• + plus	més
• To subtract / To difference	restar
• − minus	menys
• To divide by	dividir
• To multiply by	multiplicar
• × times	per

Objectius específics:

- Conèixer el vocabulari bàsic matemàtic en anglès (sumar, restar...)
- Millorar el càlcul mental dels alumnes.
- Cridar l'atenció dels alumnes utilitzant unes matemàtiques recreatives.

Enllaços d´interès:

- http://www.slideshare.net/martuxi9/math-magic-1st (presentació amb els trucs de *matemàgia*)

Activitat 2: KIRIGAMI

Esta sessió la dividim en dos parts: en la primera els vam donar als alumnes un foli en brut i doblegant i fent només un tall en el paper havien d'aconseguir una de les figures, classificades en tres nivells de dificultat, com les que es mostren a continuació i que apareixen en un article de la revista SUMA escrit pel Grup Alquerque de Sevilla (s'inclou en els enllaços d'interès)

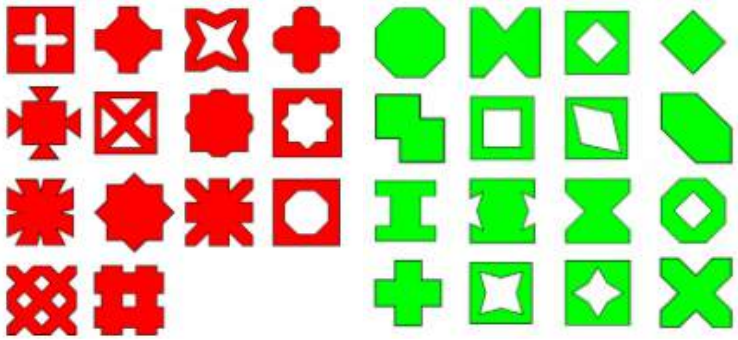


Figura 2: Patrons geomètrics que els alumnes havien d'aconseguir doblegant i tallant.

En la segona part, la més creativa, havien de doblegar (sempre per la meitat) les vegades que volgueren el quadrat de paper i realitzar els talls que volgueren per a crear la figura que ells volgueren. La majoria es van donar compte ràpid de què com més vegades doblegaven el paper més eixos de simetria tenia la seua figura, i per tant més detalls i originalitat tenia. A més els alumnes també van haver de trobar la mesura de l'angle que hi havia entre dos eixos de simetria adjacents, i entre tots van obtindre que era $\frac{180\,°}{nº\ eixos\ \ de\ \ simetria}$.



Figura 3: exemples de les creacions amb kirigami dels alumnes.

Material:

- ordinador i projector
- paper brut, paper de colors, tisores, llapis, regla.

Vocabulari de la sessió:

- Fold/Bend doblegar
- Symmetry simetria
- Angle angle
- Point punt
- Axis/Axes eix/eixos
- Adjacent axes eixos adjacents

Objectius específics:

- Reconèixer quan una figura plana és simètrica.
- Trobar els eixos de simetria d'una figura simètrica.
- Relacionar el nombre d'eixos de simetria amb l'angle que formen entre ells.
- Construir una figura amb diversos eixos de simetria.

Enllaços d´interès:

- http://revistasuma.es/IMG/pdf/59/055-058.pdf (article revista SUMA)

6. CONCLUSIONS

Els beneficis d'este projecte que es duc a terme durant dos cursos escolars, van ser notables per a l'alumnat. Primer pel glossari de vocabulari matemàtic en anglès que es van crear ja que la majoria de les paraules apreses les utilitzaven en totes les sessions, i un idioma s'aprèn quan s'usa.

Segon perquè el canvi de metodologia els va fer veure les matemàtiques des d'una visió més pràctica i divertida, van comprovar que les matemàtiques es poden tocar i crear, i que no tot és càlcul i algoritmes estancs.

És veritat que al principi als alumnes els va costar adaptar-se al projecte, i complir la norma que el vocabulari de la sessió havien de comunicar-ho en anglès tant amb els seus companys com amb els professors, les primeres sessions només deien les paraules de la sessió en anglès i en la resta de conversació parlaven en castellà, però a poc a poc es van anar soltant a l'utilitzar l'anglès quan volien preguntar o establir alguna conclusió.

També va suposar un canvi per a ells el fet de que el professor només explicarà l'activitat en 5/10 minuts i després foren ells els que havien d'esbrinar com es feien la majoria de coses i analitzar els resultats que obtenien, alguns alumnes inclós li deien al professor que per què no els volia explicar com es feia, o perquè no els deia a que resultat havien d'arribar. Però igual que amb l'idioma, amb el pas de les sessions els alumnes es van anar fent més autònoms, desenvolupant el seu pensament i raonament matemàtic i arribant abans als resultats esperats.

Al finalitzar ambdós cursos se'ls va entregar un qüestionari als alumnes per a analitzar els resultats del taller, que activitats els havien agradat més, si creien que havien aprés més amb esta metodologia, que opinaven de que el projecte fora en anglès... I la gran majoria van valorar molt positivament Maths & Crafts i van demanar tornar a realitzar el projecte el curs següent.

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Arranz J.M., Losada R., Mora J.A., Sada M. (2011). *Realidades de GeoGebra.* Revista SUMA, 67, pp. 7-20.

Coyle, D. (2007). *Content and language integrated learning: Towards a connected research agenda for CLIL pedagogies*. International Journal of Bilingual Education and Bilingualism 10(5), 543-562.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1975). *Psicología del niño*. Ediciones Morata. Madrid (España).

Pérez Torres I. (2016). CLIL/AICLE. http://www.isabelperez.com/clil.htm Consultat 15/07/2016

Planas, N. & Setati, M. (2009). *Bilingual Students using their Languages in the Learning of Mathematics*. Mathematics Education Research Journal 21(3), 36-59.

Puig Adam, P. (1956). *Didáctica matemática heurística: 30 lecciones activas sobre temas de enseñanza media*. Madrid: Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral.

PROGRAMA PILOT APROFUNDEIX 2015-2016: INFORMACIÓ ENCRIPTADA

Carlos Segura Cordero - Elena Thibaut Tadeo
segura_car@gva.es - thibaut_ele@gva.es
CEFIRE específic d'àmbit científic, tecnològic i matemàtic - València

Modalitat: Comunicació
Nivell**:** Secundària
Paraules clau**:** Aprofundeix, criptografia, codis

RESUM

Durant el curs 2015-2016 es va posar en marxa un programa pilot Aprofundeix a la Comunitat Valenciana. A València es va realitzar un programa reduït de quatre sessions, una de les quals tractava sobre criptografia i codis. En aquest treball presentarem el desenvolupament d'aquesta sessió, així com la seua relació amb la resta de les sessions. La proposta s'emmarca dins d'un repte global en el qual els alumnes, com a investigadors d'una organització secreta al servei del govern, han d'anar resolent en equip diversos enigmes relacionats amb la transmissió d'una malaltia letal. També explicarem les implicacions del programa Aprofundeix en el sistema educatiu valencià i com els professors de Matemàtiques podran implementar projectes amb materials originals propis o amb materials existents ja desenvolupats en altres comunitats.

1. REFERENTS: ELS PROGRAMES D'ENRIQUIMENT CURRICULAR

El curs 2015-2016 des de Conselleria d'Educació se'ns va encarregar, juntament amb altres assessors d'àmbit científic-tecnològic del Servei de Formació del Professorat, dissenyar un projecte "Aprofundeix Comunitat Valenciana" per a desenvolupar tallers per alumnes d'aprofundiment en coneixements de Ciències, Tecnologia i Matemàtiques. Els programes d'enriquiment curricular que varem prendre com a referent són programes d'educació no formal, és a dir, que no estan dirigits a l'obtenció de cap grau del sistema educatiu reglat. Estan fora de l'àmbit escolar formal, encara que puguen realitzar-se en els centres educatius, però sempre en horari extraescolar.

En particular, el nostre referent per al disseny del programa "Aprofundeix CV" varen ser els programes d'enriquiment de les competències en STEM (Ciències, Tecnologia, Enginyeria i Matemàtiques), que complementen l'educació formal amb experiències d'aprenentatge actiu, basades en la recerca i l'experimentació (Inquiry Based Learning).

Els objectius d'aquest tipus de programes, i que nosaltres hem fet nostres, són els següents:

- *Objectiu 1*: Incrementar l'interès i reforçar actituds positives dels estudiants de STEM. Per a açò es tracta d'oferir experiències motivadores i descobrir en els alumnes el plaer del coneixement científic i de l'aprenentatge actiu. Estudis com el del projecte ROSE (Sjøberg y Schreiner, 2010) demostren que l'actitud positiva cap a les Ciències incrementa l'autoconfiança dels

alumnes i per tant els seus resultats, a més d'influir a llarg termini en l'elecció de la seua carrera professional.

- *Objectiu 2*: Atendre a l'alumnat d'alt rendiment en STEM i permetre desenvolupar el seu talent a través d'activitats obertes, que complementen els continguts de classe, amb temes actuals, atractius i que presenten reptes complexos. A la Comunitat Valenciana hi ha accions puntuals en aquest sentit, però es pretén sistematitzar un espai per a l'excel·lència en els centres públics.
- *Objectiu 3*: Contribuir a la cohesió social i equitat en l'àmbit STEM, considerant que investigacions com les desenvolupades per la Fundació La Caixa, Everis i el FECYT en "Estudio sobre vocaciones científicas. ¿Cómo podemos estimular una mente científica?" proven que la realització d'activitats extraescolars en entorns socioeconòmics desfavorits suposa un increment en l'interès en les matèries de l'àmbit STEM del 9,5%. Un programa extraescolar d'enriquiment genera una oferta extraescolar gratuïta i oberta.

Podem trobar programes d'aquests tipus en multitud de paises al voltant de món. En concret, en la UE existeixen programes específics que promouen i potencien els Clubs de Ciència. En el informe Eurydice "La enseñanza de las ciencias en Europa: políticas nacionales, prácticas e investigación" es poden consultar aquestes iniciatives. Per exemple:

> *"En el **Regne Unit**, el programa de Ciències, Tecnologia, Enginyeria i Matemàtiques (STEM), que va començar en 2004 amb una durada prevista de 10 anys, tenia com a objectiu augmentar les competències STEM dels estudiants per a proporcionar als treballadors les habilitats que necessiten en el mercat laboral; ajudar a mantenir la competitivitat global del Regne Unit; i convertir al Regne Unit en un líder mundial en recerca i desenvolupament científics.*
>
> *El Programa STEM té onze àrees de treball (conegudes com a programes d'acció) que se centren en la contractació de professors, la formació permanent, les activitats de millora i enriquiment, el desenvolupament curricular i la infraestructura. Cada àrea de treball està dirigida per una organització capdavantera especialista, que treballa conjuntament amb el Centre Nacional STEM. Aquest centre es va crear en 2009. Els seus objectius principals són: servir de seu per a la major col·lecció del Regne Unit quant a recursos educatius i d'aprenentatge per a l'ensenyament de STEM, la qual cosa facilitarà als professors de les matèries STEM l'accés a un gran desplegament de materials de suport; i reunir a diferents actors de l'àmbit STEM amb la missió conjunta de potenciar l'ensenyament de STEM, i així recolzar el Programa STEM."*

En Espanya alguns del programes d'enriquiment que s'han dut a terme són:

- Programa PIIISA: Projecte d'iniciació a la recerca i Innovació en Secundària a Andalusia.
- El gust per investigar (UJI Castelló).
- ESTALMAT. Estímul del Talent Matemàtic.
- Campus científics d'estiu. Per exemple: VLC/Campus.

- Olimpíades Matemàtiques, de Física, Química, etc.
- Aprofundeix Andalusia.
- Aprofundeix del Ministeri d'Educació.

El primer referent és, naturalment, el programa Aprofundeix del Ministeri, amb tallers extraescolars per a alumnes amb alt rendiment. Es van desenvolupar campaments en diferents llocs d'Espanya, entre ells Gandia, i també tallers durant el curs escolar a Ceuta i Melilla. En particular, un d'aquests tallers tracta sobre Matemàtiques des de diferents perspectives que eixamplen el currículum: és el *Ven x + Matemáticas*, dirigit a alumnes de 4t d'ESO. Es contextualitzen les Matemàtiques en el món real i en la seua relació amb altres àmbits del saber en 9 sessions de 3 hores. Va ser encarregat a la Federació Espanyola de Professors de Matemàtiques i també traduït al català per a la SEMCV i la Feemcat.

El Ministeri, a més, va convidar a les comunitats autònomes a que desenvoluparen els tallers proposats i ampliaren el programa. Així ho va fer Andalusia, amb un programa molt ambiciós de tallers extraescolars. Hi ha desenes de centres que són seu d'aquests tallers, elegits mitjançant una convocatòria, i centenars de tallers Aprofundeix, que qualsevol professor pot dissenyar i presentar en convocatòria per a la seua elecció. Pensem que la logística d'aquest programa i la seua estructura en xarxa resulta molt interessant i profitosa per implantar-la en la Comunitat Valenciana.

2. El programa Aprofundeix a la Comunitat Valenciana

Durant el curs 2015-2016 es va realitzar a la Comunitat Valenciana un programa pilot Aprofundeix en l'àmbit de Ciències, Tecnologia i Matemàtiques. El programa va consistir en la realització de quatre tallers extraescolars i extracurriculars dirigits a l'alumnat amb interès en les àrees científiques. El programa pilot es va realitzar a Oriola, Castelló i València, amb diferents tallers i professors.

A Oriola es van realitzar en el MUDIC (Museu Didàctic i Interactiu de Ciències de la Vega Baixa del Segura), per a 20 alumnes de primer d'ESO seleccionats per professors de cinc instituts de la Vega Baixa, i els tallers van ser:

- Taller Robòtica i Impressió 3D
- Certamen de Ciències Experimentals de la Vega Baixa del Segura
- Taller Dalton. Meteorologia i canvi climàtic
- Taller Daguerre: De la fotografia estenopeica a la digital.

A Castelló els tallers es van realitzar en la UJI, per professors d'aquesta universitat, dirigits a 20 alumnes de 1r de Batxillerat seleccionats per professors de cinc instituts de la província de Castelló. Aquests tallers van emprar la metodologia CLIL, sumant la competència lingüística. Els temes dels tallers van ser:

- Mathematics through movies and TV
- Focusing on Physics
- Engaging Natural Science: Digging Deeper
- Autonomous Mobile Robots.

A València ho varem desenvolupar l'equip d'assessors que coordinàvem el programa. Es van realitzar quatre sessions dedicades a les àrees de Matemàtiques, Tecnologia, Biologia i Física. En aquest cas els quatre tallers es van replicar en quatre centres, en horari de divendres a la vesprada en tres instituts i dissabte de matí en un d'ells, abastant a 80 alumnes de 4t d'ESO (20 per seu). Les seus van ser:

- IES Lluis Vives de València
- IES L'Eliana
- IES Enrique Tierno Galván de Moncada
- IES Veles e Vents de Torrent.

Aquestes quatre seus van rebre alumnat de 18 instituts de secundària agrupats segons criteri de proximitat.

3. Plantejament del projecte Aprofundeix a València

Les quatre sessions del programa pilot *Aprofundeix* a València estan relacionades per un fil conductor. Es tracta d'investigar, des de diferents camps científics, sobre una sèrie de fets estranys que comprometen la salut de la població. Els professors de l'equip a València ens plantejarem què temes anàvem a tractar per a treballar sobre la història. En Matemàtiques ens vam proposar parlar sobre criptografia i codis, ja que és un tema actual, que està lligat al món tecnològic en el qual viuen els adolescents, i que és susceptible de crear situacions de misteri i intriga que servisquen de motivació.

La presentació del projecte es pot veure en: https://pilotoprofundizacv.wordpress.com/

Cadascuna de les sessions té una durada de 3 hores. Els tallers tractaven els següents temes:

- Estudi de l'agent infecciós: Comportament animal davant d'exposició dels agents nocius.
- Dispersió de fàrmacs: Estudi de la física de l'aire i de l'aigua.
- Tecnologia per a la dispersió de fàrmacs: Neumàtica.
- Transmissió de la informació: missatges encriptats.

Aquesta situació permet simular equips multidisciplinaris que resolen problemes en cada àmbit STEM. Aquest enfocament metodològic és idoni per projectes d'àrees integrades.

4. Desenvolupament de la sessió de Matemàtiques

La sessió està gamificada en una sèrie de reptes en cadena fins a poder enviar un codi final de vital importància. La sessió es desenvolupa en l'aula d'informàtica, que simula ser el departament de seguretat en les comunicacions d'una agència secreta.



Comencem la sessió amb el plantejament d'una frase encriptada en codi César ROOT 13.

ENTRADA 1

El departamento de seguridad y comunicaciones ha recibido un archivo junto a esta nota:

PVSENQB PRFNE QRFCYNMNZVRAGB RF YN PYNIR

Pensamos que está relacionado con el robo de patentes.

El archivo pide una contraseña numérica. ¿Cuál puede ser ese número?

FICHERO 1

Els preguntem com creuen que s'ha xifrat, induint al fet que pensen quins mètodes utilitzarien ells per a xifrar fàcilment un missatge.

Després d'un temps de reflexió i propostes en veu alta, proporcionem als alumnes l'enllaç a un simulador http://www.cryptoclub.org/tools/caesar_cipher.php per a facilitar-los la faena.



Han de veure quina és la mecànica del xifrat i provar claus. Al final descobreixen que es tracta d'un desplaçament posicional: a cada lletra se li assigna una posició, i la clau és 13 per al nostre missatge, perquè es desplacen 13 posicions. Els preguntem per què 13 és una bona clau, amb la intenció de que descobreixen les avantatges de treballar amb simetria, en un abecedari sense ñ. La resposta és que el xifrat i desxifrat proporciona la mateixa solució. El xifrat per desplaçament César permet introduir nocions bàsiques d'aritmètica modular. Els assajos amb desplaçaments cap a davant i cap a darrere permet assolir intuïtivament aquests conceptes.

¿QUÉ ES EL CIFRADO CÉSAR?

Desplazar cada letra 13 posiciones en el alfabeto. En el cifrado César, llamado así porque lo ideó Julio César, el desplazamiento era de 3 letras. Este tipo de cifrado se llama **por sustitución**, porque sustituye cada letra por otra.

Si a cada letra le asignamos un número, podemos utilizar las matemáticas para calcular cuál será la letra en el mensaje cifrado.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Un desplazamiento se puede expresar como una suma:

c: letra cifrada

x: letra del mensaje original $\qquad c = x + a$

a: desplazamiento

De esta manera, por ejemplo, la letra G ($x = 6$), se convertirá en la letra S ($c = 6 + 13 = 19$)

Pero ¿qué ocurre cuando queremos transformar por ejemplo la U?

U $\qquad x = 21 \qquad c = 21 + 13 = 34$

¡No tenemos 34 letras!

13 és la contrasenya per a accedir a un arxiu amb informació sobre aritmètica modular que s'introdueix sense aprofundir en conceptes complexos.

Esto se soluciona utilizando la "**aritmética del reloj**"

13:0

1:00



Las horas se repiten. Cuando llegamos a las 13:00 horas, decimos que son la 1.

Eso es así porque el reloj sólo tiene 12 horas. En Matemáticas decimos que el reloj funciona "**módulo 12**" y que la lectura de la hora en realidad sólo tiene en cuenta el **resto** de las divisiones entre 12. A la "aritmética del reloj2 se le llama **aritmética modular**

En nuestro caso, para las letras, trabajamos "módulo 26". Y nuestra fórmula para el cifrado César se expresa:

$$c = x + a \ (mod\ 26)$$

Entonces, ¿qué podemos hacer cuando queremos transformar la U?

U $x = 21$ $c = 21 + 13 = 34$

34 dividido entre 26, no da un resto igual a 8. Esto se expresa en aritmética modular:

$$c = 21 + 13 \equiv 8 \ (mod\ 26)$$

Con lo que la U se transformará en la I.

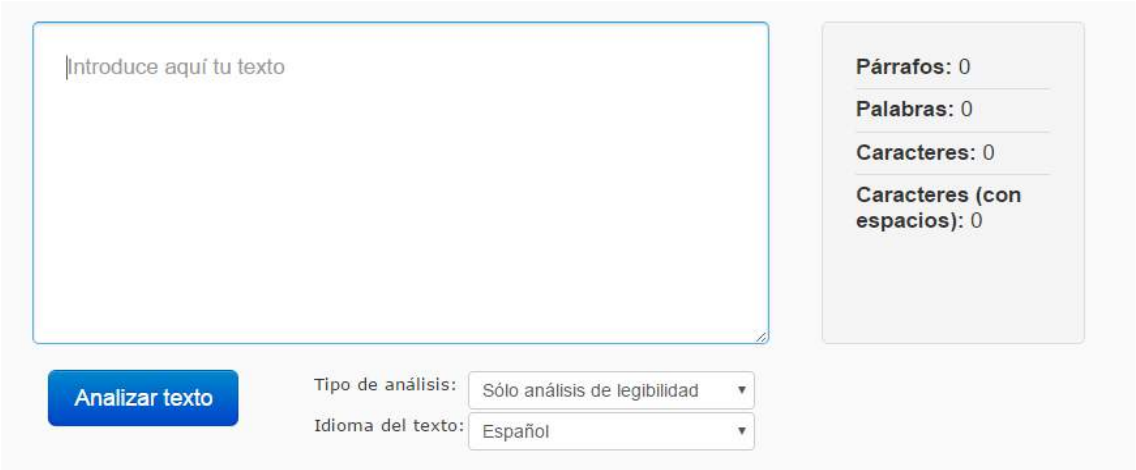
Si contamos la Ñ, ¿en qué módulo trabajaríamos?

En aquest arxiu es planteja també als alumnes un nou enigma per a resoldre mitjançant el mètode d'anàlisi de freqüència. El text xifrat procedeix de *Epsilones*.

SBLY AFL FWY IL UYC VYDQGYC VEC ZYILBYCYC AFL SYWIFSLW EU ÑYVPBL EU EBDL K E UE SQLWSQE LC LU ILCLY IL LGEIQBCL IL UE GQIE SYDQIQEWE SYW CF ECZLBLME IYUYBYCE K CF GESQY ILCLCZLBEWDL IL LCSEZEB E UEC SEILWEC IL ILCLYC CQLVZBL SEVPQEWDLC EUPLBD LQWCDLQW

Aquesta vegada el mètode de xifrat és per substitució: cada xifra és substituïda per una altra sense una regularitat, la qual cosa té com a avantatge i desavantatge alhora complicar el procés. Comentem exemples en contes de Poe i Conan Doyle. Com desxifrava Sherlock Holmes? Mitjançant la comparació de les freqüències en el text codificat amb les freqüències de la llengua en el que està expressat.

Se'ls donen eines online per a esbrinar les freqüències de cada lletra, i se'ls guia en la utilització de tècniques per a desxifrar el missatge. Una de les ferramentes és un comptador de caràcters. I altre és emprar en un processador de text l'eina de "substitució".

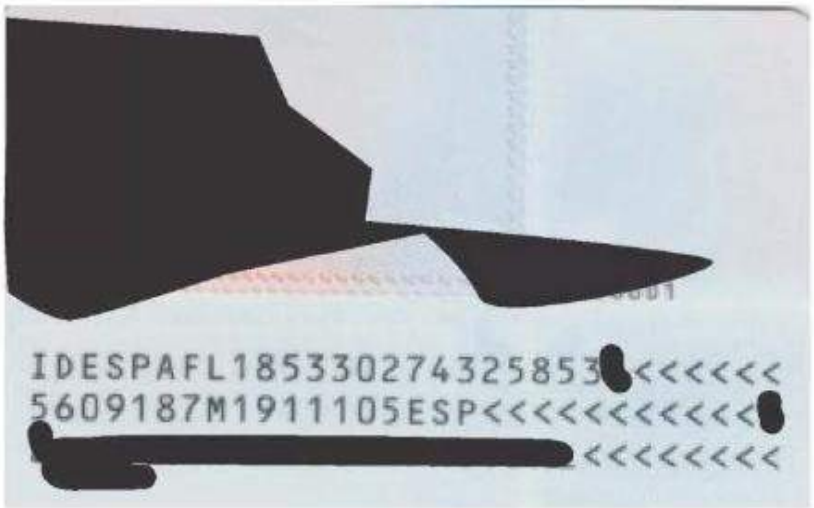


La cita desxifrada és la següent:

> *"Creo que uno de los motivos más poderosos que conducen al hombre al arte y a la ciencia es el deseo de evadirse de la vida cotidiana con su aspereza dolorosa y su vacio desesperante de escapar a las cadenas de deseos siempre cambiantes." Albert Einstein.*

La disciplina científica de l'autor de la frase, *FÍSICA*, és la clau per al següent enigma.

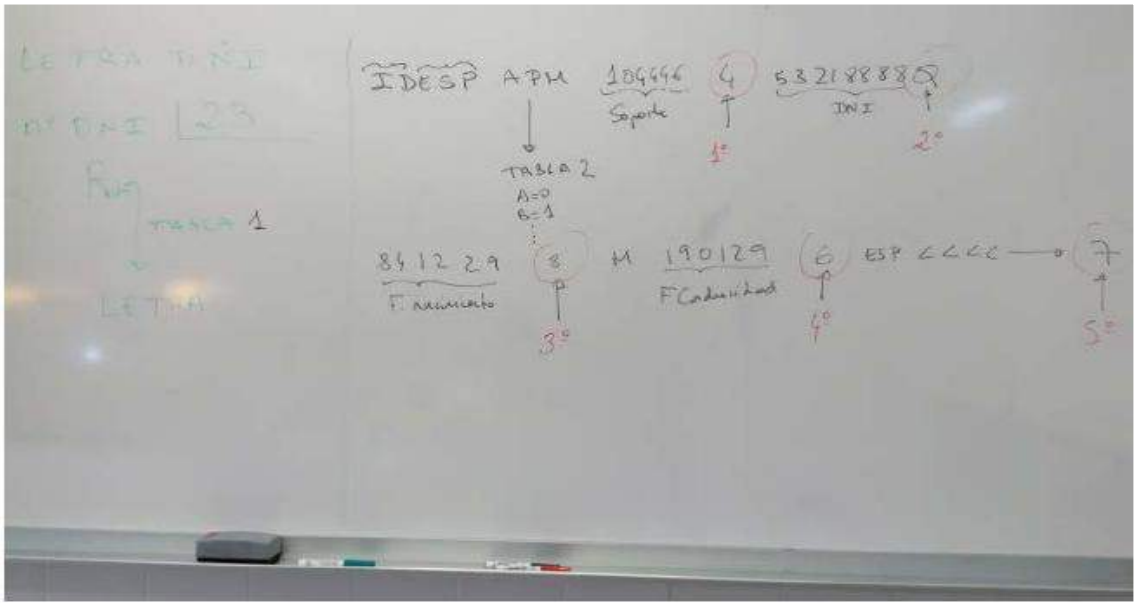
El següent repte consisteix en descobrir el nombres esborrats de certs documents d'identitat.



Amb aquesta activitat introduïm nocions bàsiques de Teoria de Codis: els expliquem que els dígits del DNI, igual que els de l'IBAN o els codis de barres, tenen xifres que serveixen de control, la qual cosa permet descobrir immediatament si una d'aquestes seqüències conté una errada. Una llegenda urbana que circula entre els joves (i no tan joves) és que el nombre més a la dreta del DNI, és la quantitat de persones amb el mateix nombre. Donar a conèixer la veritat sobre aquestes xifres de control permet desfer aquest rumor i raonar l'inconsistència de certes idees populars.

Durant el desenvolupament d'aquest repte, l'alumnat aprèn quins són els 5 dígits de control d'un DNI, i que la lletra també és una altra xifra de control.

Les xifres de control es calculen fent ús de l'aritmètica modular i les seues propietats. En el cas del DNI, tots els dígits de control es calculen fent una suma ponderada mòdul 10 amb els pesos 7, 3 i 1. Per a la lletra només s'ha de dividir entre 23, i amb una taula d'equivalències s'ha de canviar aquest nombre per la lletra corresponent. És interessant debatre a l'aula el perquè s'ha escollit el 23, nombre primer, i no 26 o 27.



La seqüència amb una lletra i tres nombres, *L0712*, és la contrasenya per accedir al següent repte. En el següent repte els alumnes han de treballar sobre els codis de barres. Se'ls presenten diversos codis associats a un producte i hauran de descobrir quin d'ells té el codi incorrecte. Hauran d'utilitzar els càlculs del dígit de control dels codis de barres GTIN-13 per a comprovar-ho. La contrasenya de l'enigma anterior els servirà per a trobar la fórmula.



De nou, l'aritmètica modular ens dóna la resposta.

Si las cifras de un código de barras son las siguientes:

$$a_{13}a_{12}a_{11}a_{10}a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1$$

Deberán cumplir:

$$a_{13} + 3a_{12} + a_{11} + 3a_{10} + a_9 + 3a_8 + a_7 + 3a_6 + a_5 + 3a_4 + a_3 + 3a_2 + a_1 \equiv 0 \pmod{10}$$

Es treballa mòdul 10 també, però aquesta vegada utilitzant els pesos 3 i 1. Aquests valors tenen un xicotet problema i és que si es canvien dues xifres consecutives, hi ha certs casos en el quals no podrien detectar l'errada.

Suposen que tenim el nombre correcte i en la posició n apareixen les xifres a_n i a_{n+1}. Quan fem el càlcul per trobar si es correcte, ens trobaren que en la posició n i n+1, estan multiplicats per 3 i per 1:

$$\ldots 3\cdot a_n + 1\cdot a_{n+1} + \ldots$$

Si aquestes xifres es canvien quedaria el càlcul:

$$\ldots 3\cdot a_{n+1} + 1\cdot a_n + \ldots$$

El que esperem és que aquest càlcul no siga múltiple de 10, es a dir, congruent amb 0, mòdul 10. Per això, si es resten aquestes dues expressions, el que ens haurien de trobar és un nombre que no poguera ser de cap manera múltiple de 10.

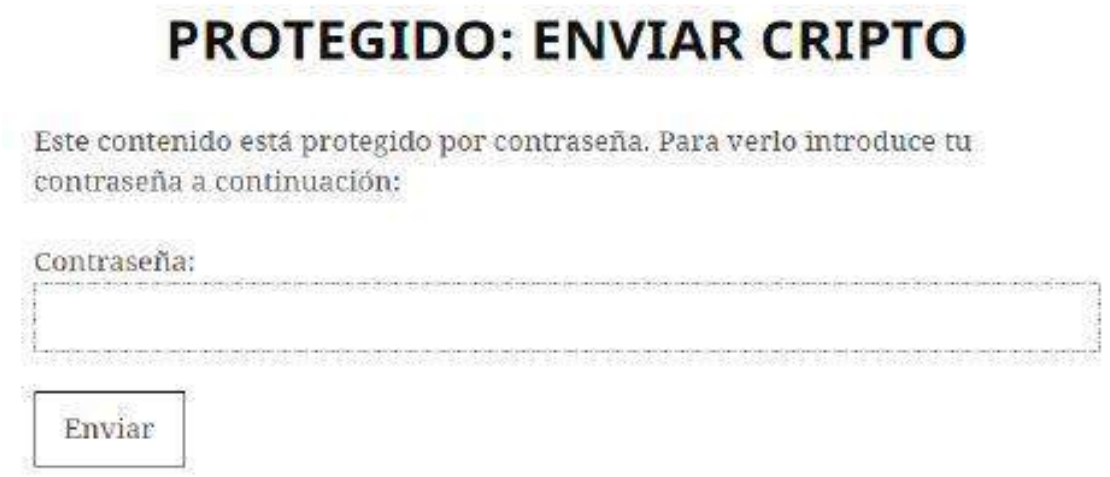
$$3\cdot a_n + 1\cdot a_{n+1} - 3\cdot a_{n+1} - 1\cdot a_n = 2\cdot(a_n - a_{n+1})$$

Però el resultat que obtenim pot ser múltiple de 10. Quan la diferència entre xifres siga 5, aquest codi no podrà detectar l'errada. Es a dir, si el nombres consecutius són 0 i 5, 1 i 6, 2 i 7, 3 i 8, 4 i 9.

En el nostre exemple hem canviat un 8 per un 0 en el codi de l'AIGUA, amb la qual cosa està assegurat que podran detectar que aquest producte és el que han d'utilitzar com a clau per a la següent activitat.

Finalment hauran d'utilitzar un xifrat Vigenère. La seua clau és el nom del producte amb codi de barres erroni, *AIGUA*. El xifrat Vigenère és un refinament del Codi César, perquè encara que cada lletra se substitueix també pel seu valor segons la posició a l'alfabet, el desplaçament ja no es fa sumant una xifra, sinó sumant a cada lletra els valors successius de les xifres que corresponen a la paraula clau.

Els alumnes han de desxifrar el codi que els apareix en el blog, però açò implica que raonen i descobrisquen que desxifrar implica restar la paraula en lloc de sumar. Al final obtenen una seqüència genètica que han d'omplir per arribar al missatge SESSIÓ SUPERADA.



Al mateix temps obtenen accés a una activitat d'ampliació com a premi per als més ràpids: es tracta de codificar i descodificar amb matrius 2x2.

Aquest mètode i exemple procedeix d'un article de Cortés López i Calbo Sanjuán (2003). Ofereix un bon context per a introduir les matrius, fins i tot abans de segon de batxillerat si emprem les de 2x2. El mètode consisteix, primer, en transformar el missatge escrit amb les seues equivalències entre lletres i posicions numèriques, i després aquesta seqüència numèrica se separa en parelles que es prenen com a vectors 2x1 i sobre ells s'aplica la matriu 2x2 que es tria com a clau.

Per a desxifrar, es fa el mateix amb la inversa. Com són matrius 2x2, els alumnes poden buscar i calcular la inversa d'aquesta matriu amb un sistema de dos equacions. És interessant debatre sobre l'elecció de la matriu-clau, ja que si no té inversa, no es pot desxifrar el missatge. Es poden discutir les característiques de la matriu-clau i introduir el concepte de determinant.

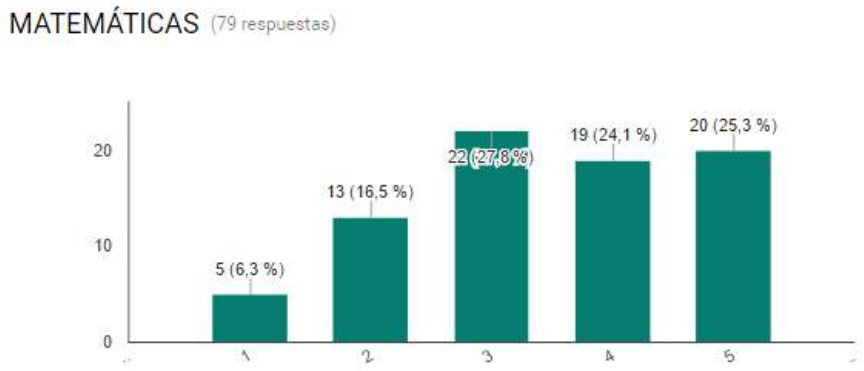


5. Avaluació de la sessió de Matemàtiques

L'equip organitzador va decidir avaluar el programa pilot a través de l'anàlisi d'enquestes online a alumnes i professors responsables dels alumnes. En general l'acolliment del programa va ser molt bo.

Es poden consultar els resultats ací: http://www.ceice.gva.es/ca/web/formacion-profesorado/profundiza-cv

La sessió de Matemàtiques va tenir un bon acolliment, sobretot entre aquells alumnes que mostraven un interès previ per les matemàtiques. Aquest és el gràfic de les respostes:



S'aprecia que l'interès està distribuït entre els nivells alts (1: "No em va interessar gens" fins a 5: "Em va interessar molt"), per la qual cosa es pot deduir que a la majoria de l'alumnat participant li van interessar els temes tractats. Per a matisar les respostes dels alumnes s'han de tenir en compte les opinions qualitatives que van expressar en el formulari. Aquestes opinions oscil·len entre el "No em va interessar gens o molt poc" fins a "M'agraden molt les Matemàtiques i d'açò no sabia gens. Ha sigut molt interessant".

6. Futur del programa Aprofundeix en l'àrea de Matemàtiques

Està previst que el Programa *Aprofundeix Comunitat Valenciana* continue desenvolupant-se durant el curs 2016-2017 i posteriors. És una bona ocasió per a plantejar diversos projectes en l'àrea de Matemàtiques que complisquen amb les expectatives d'aquell sector de l'alumnat que vulga ampliar coneixements.

La constitució de seminaris de treball *Aprofundeix* per a reflexionar sobre metodologies i continguts propis de l'àrea de Matemàtiques pot ser un germen d'innovació i bones pràctiques que servisquen per a potenciar i donar valor a les Matemàtiques, així com oferir oportunitats per a aquell sector de l'alumnat interessat en aquesta àrea.

A la fi de curs es va celebrar un acte de lliurament de diplomes a tots els participants del tres províncies en el programa pilot. L'acte de lliurament es va realitzar amb presència d'autoritats en el Saló d'actes de Conselleria i va comptar amb una xerrada motivadora d'un científic jove valencià de carrera molt prometedora.

Referències bibliogràfiques

Belle, T. J. (1982). *Formal, non-formal and informal education: A holistic perspective of lifelong learning*. International Review of Education, 28, 159-175.

Bravo, P., Ferrando, J. and Martínez , A. (1994). *Complementos de matemática discreta* . España: Universidad Politécnica de Valencia.

Ceice.gva.es. (2016). *Aprofundeix CV - Generalitat Valenciana*. [online] Available at: http://www.ceice.gva.es/ca/web/formacion-profesorado/profundiza-cv [Accessed 14 Oct. 2016].

Cortés López, J.C., Calbo Sanjuán, G. (2003). *Aplicación de las matrices invertibles en criptografía*. Ensayos: Revista de la Facultad de Educación de Albacete, nº 18, p. 279-284.

En.wikipedia.org. (2016). *International Bank Account Number*. [online] Available at: http://en.wikipedia.org/wiki/International_Bank_Account_Number [Accessed 14 Oct. 2016].

Epsilones.com. (2016). *Epsilones - Laboratorio*. [online] Available at: http://www.epsilones.com/paginas/laboratorio/laboratorio-014-descifradoifrecuencias.html [Accessed 14 Oct. 2016].

Esteban Romero, R. (2016). Algunos secretos del documento nacional de identidad español: una aplicación de la aritmética modular a códigos detectores de errores. *Modelling in Science Education and Learning*, 9(2), p.59.

Eurydice (2012). Science Education in Europe: National Policies, Practices and Research. European Union: Bruselas.

Fuster Capilla, R. (2009). *Matemàtica discreta*. València: Editorial UPV.

Gómez Urgellés, J. (2010). *Matemáticos, espías y piratas informáticos*. Barcelona: RBA.

Lpsi.eui.upm.es. (2016). *Software de Practicas*. [online] Available at: http://www.lpsi.eui.upm.es/SInformatica/software.htm [Accessed 14 Oct. 2016].

Mecd.gob.es. (2016). *Programa de profundización de conocimientos para los alumnos con mayor capacidad y motivación para aprender "Profundiza" - Ministerio de Educación, Cultura y Deporte*. [online] Available at: http://www.mecd.gob.es/educacion-mecd/areas-educacion/comunidades-autonomas/programas-cooperacion/profundiza.html [Accessed 14 Oct. 2016].

Prensa.lacaixa.es. (2016). [online] Available at: http://prensa.lacaixa.es/obrasocial/show_annex.html?id=42754 [Accessed 14 Oct. 2016].

Schneier, B. (1996). *Applied cryptography*. New York: Wiley.

Sjøberg, S., Schreiner, C. (2010). *The ROSE project: an overview and key findings*. [pdf] En: http://roseproject.no/network/countries/norway/eng/nor-Sjoberg-Schreiner-overview-2010.pdf

Venxmas.fespm.es. (2016). *Ven x más*. [online] Available at: http://venxmas.fespm.es/?lang=ca [Accessed 14 Oct. 2016].

Vera López , A. and Esteban Romero, R. (1995). *Problemas y ejercicios de matemática discreta* . Bilbao: Antonio Vera López.

PROBLEMES AMB ELS NEGOCIS

Marta Santandreu - Moisés Sendra
marta@escuelajardin.org - moises@escuelajardin.org
Carlos Castillo - Luis Rosado
carlos@escuelajardin.org - luis@escuelajardin.org
Óscar ferrando - Mª José Salvador
oscar@escuelajardin.org - mariajose@escuelajardin.org
Angèlica Nadal
angelica@escuelajardin.org
Escola Jardí de l'Ateneu - Sueca
Col·laborador: Juan Miguel Ribera

Modalitat: Comunicació
Nivell educatiu: Primària
Paraules clau: Matemàtiques, innovació, problemes, enunciats, negocis

RESUM

El projecte en sí pretén millorar la comprensió i resolució dels problemes de matemàtiques apropant els enunciats a l'alumnat, que és el responsable de la seua elaboració. Generem una col·lecció de problemes on els comerços i negocis de la localitat són els protagonistes dels enunciats, i elaborem un llinre-quadern on apareixen reflexats els blocs temàtics del currículum de l'assignatura per al nivel 5é de primària. Entre cada bloc temàtic, un repte. S'inclouen també "problemes per a valents", on els cursos superiors (6é i 1r d'eso) són col·laboradors.



0. INTRODUCCIÓ

Dins de l'aprenentatge de les matemàtiques, una de les destreses que els alumnes han d'assolir és la resolució de problemes. Cada vegada més, la cultura matemàtica està més reconeguda, i els problemes que es puguen resoldre a l'aula haurien de ser suficients per dotar l'alumne de les eines necessàries per a resoldre un problema real en la seua vida laboral futura.

Però malauradament, no és així. Els fets mostren que els alumnes fallen en la part de resolució de problemes dins d'una unitat didàctica, no estableixen connexió amb allò que s'ha explicat a classe i no saben aplicar els coneixements a casos pràctics; si més no, els costa molt. Els motius, que analitzem més endavant, són diversos i depenen de cada alumne.

Sí que és cert, però, que en contextos diferents a l'aula, els alumnes mostren, sense adonar-se, gran capacitat per resoldre situacions que requerixen d'habilitat matemàtica. Adonar-se que esta àrea no és un àmbit tancat o allunyat de la realitat és la finalitat del projecte que presentem.

Problemes amb els negocis?

L'equip de docents de l'àrea de matemàtiques dels últims cursos de primària (5è i 6è) i el primer curs de secundària, en successives reunions, coincidiren en la necessitat de crear un recull de problemes amb enunciats que foren familiars a l'entorn de l'alumne, i que plantejaren situacions reals, amb protagonistes i dades reals en la seua redacció.

Sorgeix la idea de plantejar que els diferents comerços i negocis de la localitat poden representar situacions que abracen la totalitat dels continguts de l'àrea de matemàtiques, i és aquí on comença l'aventura que expliquem en els apartats següents, en la qual, de manera conjunta, hem treballat professors de diferents etapes (primària amb secundària); alumnes de 5é, 6é i 1r d'eso; pares, mares i tutors legals; associació de comerciants de la localitat i el propi Ajuntament, des dels departaments d'Educació i Comerç.

I així, va ser senzill jugar amb les paraules per donar títol al projecte: **PROBLEMES AMB ELS NEGOCIS?,** representat per una imatge d'un **botiguer**, dissenyat pel departament de plàstica i artística.

1. OPORTUNITAT

La necessitat de millora

En totes les unitats didàctiques de les matemàtiques, la que més complicada resulta per a l'alumnat és la de resolució de problemes. És un fet que hem deduït des de vàrios punts de vista:

I) En la prova o control de la unitat, és on més errades hi ha.

II) En les proves externes de diagnòstic, és l'apartat amb pitjor puntuació

III) L'alumne no posa interès, principalment perquè l'enunciat no el motiva.

IV) Els problemes, en els llibres, vénen classificats per dificultat. L'alumne que no té seguretat, abandona directament la resolució dels que estan marcats com més difícils.

Si els problemes són una barreja de diferents unitats didàctiques, l'alumne sol preguntar "de quin tema és", donant per sentat que hi ha problemes "tipo" en cada unitat i que si la localitza, sabrà més o menys quin tipus de resolució requerix el problema.

L'enunciat, el problema

Els enunciats dels llibres de text plantejen situacions alienes a la realitat de l'alumne. Un dels objectius de la competència matemàtica és

comprendre situacions de l'entorn

és a dir, l'alumne ha **d'aprendre matemàtiques per entendre el món en què viu**. El seu futur el portarà a realitats on ha de saber aplicar les eines adequadament, i en aquest moment ja ha de saber ser crític amb les dades i fer les seues aportacions.

Així, la reflexió des de l'equip docent de l'àrea de matemàtiques planteja elaborar un **banc de problemes** amb enunciats que plantejen situacions que l'alumne pot viure en el seu dia a dia o bé que els siguen familiars, adaptades al seu nivell.

Pensàrem que els millors cursos per començar amb aquest projecte eren 5é i 6é de primària, per la manera que més avant s'explica de com s'ha portat a terme la iniciativa. I comptem amb 1r d'eso com a curs col·laborador, que proposa problemes d'ampliació. Decidim també fer una barreja, és a dir, no classificar de menys a més els problemes segons la dificultat.

2. INNOVACIÓ

Sobre el marc teòric

D'acord amb la nostra concepció sobre aprendre matemàtiques, "conèixer" o "saber" matemàtiques va més enllà de repetir definicions o ser capaç d'identificar propietats de nombres, magnituds, polígons altres objectes en principi propis de la matemàtica. La persona que sap matemàtiques ha de ser capaç d'emprar i/o desxifrar el llenguatge i conceptes matemàtics per resoldre problemes.

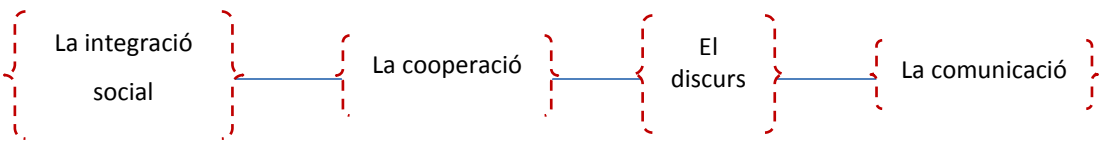
> *"Les matemàtiques són com un joc; tenen unes regles i amb elles es pot resoldre qualsevol exercici. La dificultat està en saber quina eina emprar en cada moment per resoldre un problema real"*
>
> *Contem els mestres en les classes*

El paper de la resolució de problemes és essencial si volem aconseguir un aprenentatge significatiu de les matemàtiques. Quan resol un problema, l'alumne dota de significat a les pràctiques matemàtiques assajades en els exercicis, i és ahí quan compren la seua finalitat. Ahí es dóna resposta a la gran pregunta dels alumnes

> *"I això què està explicant... per a què serveix??*
>
> *Pregunten els alumnes*

D'aquesta importància neix la necessitat de convertir la resolució de problemes en una font de *motivació* per a l'alumne, i no una pràctica carregada i llunyana. Un supòsit bàsic del constructivisme de Piaget és *l'aprenentatge per adaptació a un medi*. Certament, el coneixement progressa com a resultat de la construcció personal de l'alumne quan s'enfronta a tasques problemàtiques. Els docents que formem part d'aquesta metodologia, emmarquem l'error i la dificultat dins d'un aprenentatge constructivista: dels errors s'aprèn i les dificultats se superen.

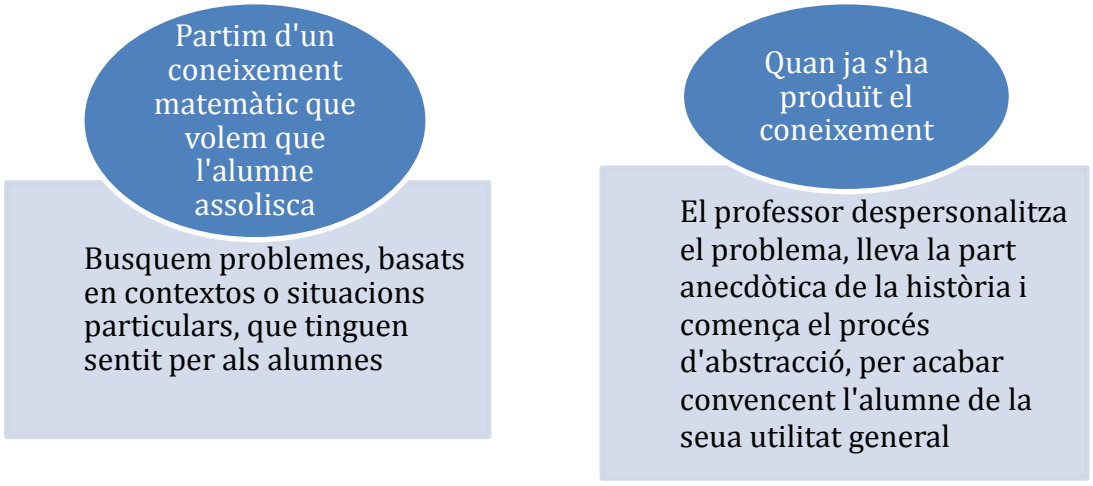
Com a afegit, la instrucció de la matemàtica significativa atribueix un paper clau a



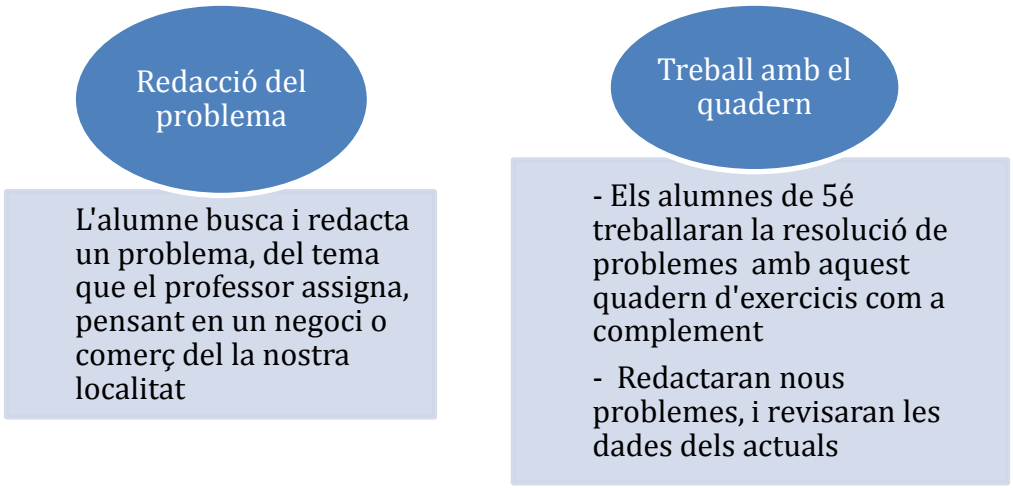
Sobre la innovació

En l'interès de l'equip docent per millorar la part de resolució de problemes, tenim l'origen d'aquest projecte. En el moment de la redacció d'aquestes línies, el projecte està engegat en la seua primera fase: el recull de problemes que formaran el quadern d'exercicis.

La part innovadora que li correspon al professor es pot tractar en els següent passos.



La part innovadora de la qual se'n beneficia l'alumne consisteix sobretot en un treball actiu, tant en el moment de preparació del producte final d'aquest projecte com en el seu ús en les sessions de matemàtiques. No és aquest un projecte tancat una vegada imprès el producte final; s'ha de renovar cada curs amb la pretensió d'actualitzar dades i ampliar la metodologia a cursos inferiors i superiors.



Estratègia i cronograma

Incorporem en aquest esquema el cronograma del curs 15/16 amb el que pretenem desenvolupar en el curs 16/17, per a una millor comprensió de l'estratègia del projecte.

Octubre/ novembre 2015	Els professors detectem, un curs més, com de difícil resulta per als alumnes la part de resolució de problemes dins de l'àrea de matemàtiques. En successives reunions, arribem a la conclusió que la incomprensió per part de l'alumnat està en la redacció dels enunciats. Si plantegem situacions que els són familiars, els alumnes saben emprar les eines per resoldre-les. Pensem que una bona font de problemes, que pot abarcar tot el currículum de matemàtiques (ara centrats en els cursos de 5é i 6é), són els negocis de la localitat. Partim el temari en vuit grans blocs: Números naturals Números positius i negatius Números decimals Potències Fraccions Percentatges Mesures (longitud, pes i capacitat) Perímetres, àrees i volums A més, proposem incloure la secció Problemes per a Valents i, entre cada unitat, un repte matemàtic.
Desembre 2015	Contactem amb l'Ajuntament de Sueca, amb la Regidoria de Comerç. Ens faciliten el contacte de l'Associació Arrima't (associació de serveis i comerç de Sueca), des d'on ens faciliten un ampli llistat de comerços i negocis de la ciutat, i es comprometen a recolzar la iniciativa i a ajudar en la seua difusió. Els professors responsables d'este projecte elaborem una circular, que llancem pels mitjans de difusió del centre (reds socials, web, correus electrònics a les famílies...) on informem sobre el procediment que ha de seguir el negoci en cas de voler formar part d'esta iniciativa (vore annex I)
Vacances de Nadal 2015/2016	Com a únic deure de vacances, els alumnes de 5é i 6é han de redactar dos problemes cadascú, del tema que se li ha assignat (fem vuit grups d'alumnes i assignem un bloc temàtic a cadascun), pensant en un negoci o comerç de la localitat. Els alumnes de 1r d'eso, que participen com a curs col·laborador, també se'ls assigna la mateixa tasca. Els seus problemes seran els de l'apartat "Problemes per a Valents".

Gener 2016	El professorat de primària i del departament de ciències de secundària participem en un curs d'actualització matemàtica. En una de les sessions contem la iniciativa en els problemes, i convidem a un dels professors (antic alumne del centre i actualment doctor en matemàtiques per la UV) a dissenyar reptes matemàtics, que aniran entre les unitats didàctiques. Aquestos reptes també tenen un enunciat familiar per a l'alumnat del centre, perquè estaran basats en dades de l'edifici: el jardí, el pati, les aules...
Gener/febrer 2016	Els professors revisem els enunciats i comprovem que s'ajusten al tema que demanem i que les dades són coherents. Classifiquem els problemes per blocs temàtics i comencem a donar forma al quadern d'exercicis. Des del departament de plàstica, apareix la imatge oficial del quadern (vore la tapa d'aquest projecte). El dia 12 de febrer, en col·laboració amb Arrima't i des de les instal·lacions del centre, oferim una roda de premsa, a la qual assisteixen els mitjans de premsa i ràdio que ens ajuden a difondre el projecte (en el vídeo adjunt a este escrit apareixen mostres del dia de la presentació i dels anuncis en premsa).
Març 2016	Els alumnes tenen assignada la mateixa tasca que en les vacances de Nadal. En esta segona fase de recollida de problemes, notem una milloria en la redacció de l'enunciat; els familiars s'han implicat i els negocis han col·laborat.
Abril/Maig 2016	Segona revisió i classificació dels nous problemes lliurats pels alumnes. Comencem amb el disseny del llibret i contactem amb una empresa gràfica de la localitat per a la seua impressió una vegada acabat.
Juny/juliol 2016	Comprovem que apareixen tots els negocis que han volgut implicar-se, de manera altruista, en esta iniciativa. Cada comerç és protagonista d'un o més exercicis del quadern. Acabem l'edició del quadern en format digital. En el moment de redactar estes línies, estem pendents de fer una prova d'impressió per vore el producte final. Per augmentar la difusió del programa, i per compartir la idea i l'experiència amb altres centres, l'equip docent implicat ens inscrivim en les "XII Jornades d'Educació Matemàtica" que organitza la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana (semcv), dins de les quals presentarem una comunicació per exposar el treball. Amb aquesta organització hem col·laborat activament en les olimpíades matemàtiques,

	de les quals forem seu en la seua 25 edició a nivell comarcal i provincial. Els nostres alumnes, de 5é a 4t d'eso, hi participen tots els cursos.

Per al proper curs 16/17

Projecte d'Innovació Educativa

Previsions

Setembre 2016	Impressió del llibre-quadern. En comunicació amb els altres centres de la localitat, els demanem el nombre d'alumnes en 5é de primària per lliurar un per alumne. En total necessitarem uns 350 exemplars, que imprimirà un dels negocis col·laboradors de la localitat. El dia 23 de setembre, en les instal·lacions de l'Ateneu de Sueca, tenim previst un acte de presentació, on convidem als centres que participen i animem a la resta a sumar-se al projecte; als centres educatius; a les associacions de comerciants i a les autoritats municipals que recolzen el projecte. Està previst, si el pressupost així ho permet, donar a cada comerç una distinció (pegatina) que col·loquen en un lloc visible del seu comerç i que els identifica com a participant.
Octubre a Maig 2016/2017	Els alumnes treballen amb el llibre la resolució de problemes, conforme avancem amb les unitats didàctiques. Els professors prenem nota del desenvolupament de la tasca, per confirmar si, efectivament es compleix l'objectiu principal: **millorar la resolució del problemes d'enunciat.** Al mateix temps, anotem aspectes de millora. Començarà, paral·lelament, de nou el procés: contactarem amb els negocis, els alumnes redactaran nous problemes, elaborarem nous reptes, i ampliarem la metodologia a 6é de primària.
Juny/juliol 2017	Revisió, avaluació i actualització del projecte.

Metodologia activa. L'alumne en el centre del procés

De l'estratègia explicada anteriorment, junt al cronograma, es desprèn la participació activa de l'alumne. No només de l'alumne, sinó també del seu entorn més proper.

En una primera fase, la implicació dels alumnes i la família, que, en veure la il·lusió de l'alumne per portar els problemes encomanats pels professors, ajuda en la redacció i presenta situacions molt originals; a més a més, algunes famílies que tenen negoci s'involucren més encara.

En una segona fase, amb el producte ja elaborat (el quadern de problemes), són els alumnes els principals protagonistes perquè els han de resoldre.

I com a possible tercera fase, després de l'avaluació del projecte, es planteja la possibilitat d'ampliar la metodologia a cursos superiors (6é de primària) o inferiors en primària. Així, tornen a ser els alumnes (i el seu entorn) els protagonistes d'una nova edició del quadern.

3. SOSTENIBILITAT

Viabilitat econòmica i millores[1]

Les despeses del projecte són, en gran part, degudes a la impressió dels exemplars del quadern que estem elaborant. Pretenem que el quadern arribe a tots els alumnes de 5é de primària de tots els col·legis de Sueca.

El format del quadern no està pensat per a ser emprat (no es resolen els problemes en el mateix quadern). Només hi figuren els enunciats i els reptes. Tanmateix, considerem que és un material fungible atenent a tres raons principals:

- El format imprés no és un llibre amb tapes dures sinó un senzill quadernet que anirà en la motxilla de l'alumne. Només els viatges a casa i a l'escola s'encarregaran del seu desgast.
- Els problemes variaran, en advertir millores o introduir nous negocis que s'hi vulguin afegir a la iniciativa en cursos posteriors. Els alumnes del proper curs que estiguin en 5é i 6é de primària redactaran nos enunciats i/o milloraran els actuals.
- Els reptes matemàtics, que s'intercalen entre les unitats didàctiques, van a tindre un eix vertebrador cada curs.

  Les millores que pretenem perduren en el temps, no són tant els quaderns en sí com la metodologia de la qual volem fer partícip a l'alumnat. La millora principal no és, doncs, cap producte material, sinó introduir a l'alumnat en una manera diferent de vore la resolució de problemes, de donar un sentit pràctic a la teoria matemàtica.

4. TRANSPARÈNCIA

La metodologia que s'exposa en aquest projecte, i, sobre tot, el fet d'involucrar l'entorn més proper de l'alumnat és perfectament extensiva a altres àrees. Allà on es detecte una dificultat en l'aprenentatge, si es redissenya la manera de procedir i es motiva amb situacions on els alumnes es defenen amb més o menys soltura, es perd la por a aprendre. En un pas posterior, quan el professor ho considera, es dóna el pas a situacions més abstractes. En eixe moment s'avalua si l'adquisició del coneixement s'ha produït.

[1] Aportem aquest punt perquè hem presentat el projecte a la convocatòria de les ajudes de la Conselleria d'Educació

També, com no, en l'aventura "Problemes amb els negocis?" hem volgut involucrar a altres centres. En un moment del procés ens posem en contacte amb els equips docents dels centres de la localitat i els oferim la possibilitat de treballar amb el quadern de problemes. En un futur, pot ser, tots els alumnes de 5é de primària de la localitat podrien participar i intercanviar reptes i problemes d'enunciat, o treballar amb equips formats per alumnes de diferents centres. Seria una iniciativa bonica que uniria a alumnes de la mateixa edat i diferents realitats en un projecte comú que, a més, beneficia el comerç local en tant en quant des de menuts, els xiquets i les xiquetes poden conèixer els negocis del seu poble, i no només els més propers al seus respectius barris.

En aquesta línia, en esta primera edició, els reptes matemàtics tenen una temàtica comuna: el nostre centre; és a dir, els enunciats dels reptes versen sobre diferents aspectes del centre, respectant els continguts de cada unitat didàctica. Però en la propera edició, la que anirem elaborant al llarg del curs 16/17, cada repte tindrà com a protagonista un centre educatiu de la localitat.

5. PARTICIPACIÓ

De la metodologia explicada es conclou que aquest projecte d'innovació permet i fomenta:

La participació	Els alumnes són els que elaboren els enunciats, per blocs temàtics. El fet senzill que saben que els seus problemes formaran part d'un llibre i que altres companys els han de resoldre és per a ells una gran satisfacció
Treball cooperatiu	Els alumnes treballen sempre en grups. Cada grup, per torns, és responsable d'aportar un recull de problemes a cada bloc temàtic. Quan els porten a classe, els resolen entre ells i s'ajuden mútuament. La finalitat és que tot el grup presente els problemes el millor possible, per tant s'esforcen per a que tots els components presenten els problemes el millor possible
Participació dels agents implicats:	
Professorat	Contacta amb les associacions i comerciants de la localitat. Supervisa la tasca dels alumnes Dissenya el contingut del quadern, atenent al currículum vigent Contacta amb l'empresa responsable de la impressió Utilitzarà el material com a complement a l'aula. Avaluarà la viabilitat d'esta metodologia i proposarà millores en la següent edició

Alumnat	Responsable directe de la redacció dels problemes Beneficiari directe, també, d'esta metodologia cooperativa
Famílies	Ajuden en la redacció dels problemes. Donat que l'elaboració dels problemes ha sigut la tasca que s'ha manat en vacances de Nadal i Pasqua, les famílies han tingut temps per involucrar-se més. Algunes famílies són protagonistes dels enunciats, representant així els seus negocis i comerços.
Entorn sociocultural	De la lectura d'aquest projecte es dedueix que l'entorn, representat en este cas pels comerciants de la ciutat, és un agent actiu i important. La seua col·laboració desinteressada, prèvia autorització, és fonamental per al desenvolupament del projecte.

6. INCLUSIÓ

El projecte garanteix accions que fomenten la igualtat d'oportunitats, la integració i la inclusió, dels alumnes i de tots els agent anteriorment citats que s'impliquen.

El fet de treballar en equips és ja una pràctica educativa basada en la integració; no només portem a terme esta pràctica en l'elaboració d'aquest producte (el quadern de problemes), sino també a les classes ordinàries.

Els alumnes sempre treballen repartits en grups heterogenis i en les assignatures de llengües i matemàtiques (el cas que ens ocupa), sempre hi ha dos professors a l'aula, acció que permet fomentar la inclusió i dotar d'igualtat d'oportunitats per a l'aprenentatge.

7. PLURILINGÜISME

El present projecte garanteix l'adquisició de la competència comunicativa de l'alumne, en totes les seues fases:

- en l'elaboració de l'enunciat
- en la comprensió dels problemes

El quadern està redactat íntegrament en valencià, perquè és la llengua que majoritàriament es parla a la nostra localitat, tant pels alumnes com pels representants dels comerços i negocis, així com pel professorat i famílies.

El projecte ajuda a la normalització del valencià, en tant en quant els alumnes han de portar els enunciats ben redactats i després seran llegits pels comerciants. En algun cas s'empra algun localisme popular, comú entre els xiquets i xiquetes.

Tanmateix, no descartem emprar la llengua castellana o anglesa en un futur, com a proposta de millora.

8. AVALUACIÓ

El projecte compta amb un pla d'avaluació, encara pendent de l'elaboració amb una rúbrica. Els apartats, però, sí els podem detallar:

Avaluació de la competència matemàtica	La millora de la competència matemàtica, concretament en el seu apartat de resolució de problemes, s'ha de veure millorada; emprem els controls i proves d'avaluació
Avaluació de la metodologia a classe	El professor ha de notar un major interès per la resolució de problemes
Avaluació de la metodologia del projecte	Com que el projecte està pensat per a perdurar en el temps com una pràctica matemàtica habitual, i com que pretenem extendre'l a cursos inferiors i superiors, es fa necessari l'avaluació de tots els passos que composen la creació d'este quadernet
Avaluació de l'impacte	Mitjançant enquestes, pretenem avaluar l'acolliment del projecte per part dels comerços i dels altres centres de la localitat i demanem opinions de millora
Avaluació de la participació del professorat	Avaluarem la pràctica docent en reunions periòdiques de l'equip, i es proposen propostes de millora
Avaluació de la participació de l'alumnat	Avaluem el treball en equip i la millora en la redacció i presentació dels problemes. Considerem les propostes de millora que puguen aportar els alumnes, o les seues famílies

9. ALGUNES FOTOGRAFIES



La Ribera

Un colegio de Sueca logra que los niños aprendan matemáticas con localismos

▶ Los alumnos se sienten estimulados para resolver problemas planteados con enunciados suecanos

Aprenden a la vez que se fomenta el comercio tradicional

▶ Tanto el presidente de la asociación de comerciantes Arrimo't, Tony Landete, como el concejal de educación, Vicent Baldoví, aplaudieron la idea. «La Escola Jardí ha sabido desde los problemas acercar a los niños a los comercios, haciendo de un problema una solución de convivencia», dijo Landete. Por su parte, el edil Baldoví, destacó el carácter participativo del novedoso proyecto que «fusiona la educación con el comercio, ya la vez fomenta el consumo local». Cabe señalar que ya hay más de cincuenta comercios interesados en participar en esta novedosa experiencia en la localidad. EVA MELERO

Acto de presentación del proyecto celebrado ayer.


Arrima't
al comerç de Sueca
ESCOLA
JARDÍ

MEDIDAS PARA ENSEÑAR A MEDIR: PROBLEMAS DE FERMI PARA INTRODUCIR LA MEDIDA DE MAGNITUDES

Irene Ferrando - Marta Pla
irene.ferrando@uv.es - marta.pla@uv.es
Departament de Didàctica de Matemàtica UV - València

Modalitat: Comunicació
Nivell educatiu: Multinivell
Paraules clau: Medida, estimación, modelización

RESUMEN

Los problemas de estimación de magnitudes no abarcables, también conocidos como problemas de Fermi, permiten a los estudiantes desarrollar, en contextos reales y más o menos cercanos a su realidad, argumentos que ponen en juego sus conocimientos relativos a conceptos geométricos. En particular, estos problemas enfrentan a los alumnos a trabajar la medida de magnitudes. En nuestra comunicación presentamos una secuencia de tareas que pueden ser planteadas tercer ciclo de Educación Primaria o primer ciclo de ESO, a través de las cuales los alumnos trabajarán la medida de magnitudes de forma contextualizada.

0. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

La medida de magnitudes es una parte fundamental de los contenidos básicos que los alumnos deben trabajar a lo largo de su escolaridad y, además, es uno de los que, en su vida adulta, puede resultar más útil (Van den Heuvel-Panhuizen, M y Buy, 2008). Sin embargo es frecuente ver que los alumnos, incluso en edades adultas, tienen dificultades relacionadas con la estimación, la elección de la unidad y el cambio de unidades. Según Chamorro (2001) esto puede ser debido a que, en los libros de textos, la relación entre unidades se presenta de forma algorítmica, sin dejar opción a que el alumno la descubra o la experimente, otorgando más importancia a la memorización que a la comprensión.

Una buena forma de dar a los alumnos la posibilidad trabajar la medida de magnitudes a través de problemas de estimación de grandes cantidades (PEGC), también conocidos como problemas de Fermi, en honor al físico Enrico Fermi (1901-1954). Siguiendo la definición de Ärleback y Bersgten (2009), los problemas de Fermi son problemas no estándar que requieren que los estudiantes hagan suposiciones sobre el enunciado y el contexto del problema y que estime cantidades relevantes antes de obtener la solución del problema (normalmente a través de cálculos aritméticos simples).

Una característica de este tipo de problemas es su accesibilidad ya que éstos pueden ser trabajados en distintos cursos y los alumnos los aborda con mayor o menor complejidad en función de sus conocimientos de conceptos y procedimientos matemáticos (Kittel y Marxer, 2005, citado en Ärleback y Bersgten, 2009). Así, la propuesta que presentamos ha sido implementada con estudiantes de la Facultad de Magisterio, que debían resolver una serie de PEGC -contextualizados en entornos de su realidad- y reflexionar sobre cómo desarrollar esos mismos problemas con alumnos de tercer ciclo de EP.

En esta comunicación no pretendemos realizar un análisis exhaustivo de la experiencia realizada con alumnos universitarios sino, más bien, centrarnos en presentar una propuesta didáctica basada en una serie de cinco PEGC a través de los cuales se trabajan conceptos de medidas de diferentes magnitudes tales como longitud, área, tiempo o volumen. La estimación de estas magnitudes se considera una acción compleja que involucra distintas habilidades, como la comprensión del concepto de unidad, la imagen mental de la unidad, la comparación de objetos, la iteración de la unidad, la selección y el uso de estrategias para hacer estimaciones (Hildreth, 1983).

1. PROPUESTA DIDÁCTICA

Al enfrentarse a la resolución de PEGC los alumnos adaptan los procedimientos en función de diferentes aspectos tales como la magnitud implicada o el contexto del problema (Gallart et al. 2015). Basándonos en esta idea, la propuesta que hemos diseñado consta de cinco problemas de Fermi que comparten una característica común, todos ellos tienen un enunciado cercano a la realidad de los alumnos pero difieren en los contextos y las magnitudes que deben utilizarse en su resolución. Además, en todos los casos el enunciado consta de una única pregunta, la intención es que el procedimiento para llegar a la solución no sea indicado de antemano, ya que la riqueza de este tipo de problemas radica en que hay diversas formas y razonamientos para llegar a la solución.

Problema de Fermi 1: los ladrillos del campus de Tarongers

El campus de Tarongers de la UV está formado por diversas edificaciones cuyas fachadas son de ladrillo caravista. ¿Podéis estimar el número de ladrillos que han sido necesarios para cubrir todas las fachadas del campus?



Este primer problema permite desarrollar diferentes estrategias que implican el cálculo de áreas y o longitudes y, en algunos casos, la densidad.

Problema de Fermi 2: la fuente del mirador

En el cruce de la avenida de Tarongers con la entrada a Valencia hay una rotonda con un mirador y una fuente. Como ya sabéis en Valencia llueve pocas veces, pero cuando llueve, lo hace con mucha intensidad. Si se repiten los datos de la última gota fría se pueden alcanzar



intensidades alrededor de los 25,5 L/m^2 (según los datos del 22/09/14). Imaginad que, por una avería, dejan de funcionar los sumideros de la fuente de la rotonda, ¿cuánto tiempo tardaría en desbordarse?

El segundo problema es algo más complejo que el anterior ya implica la relación entre diferentes magnitudes: área, capacidad, volumen, longitud y tiempo.

Problema de Fermi 3: la mascletà



Como seguro que sabéis, cada año, a partir del día 1 de marzo y hasta el día 19, se dispara a las 14h una mascletà en la Plaza del Ayuntamiento de Valencia. Siempre asiste mucha gente pero, sin duda, la máxima afluencia se alcanza durante los días de la semana fallera. ¿Cuánta gente se acerca a la plaza del ayuntamiento a escuchar el ruido atronador de los petardos durante todo el mes de marzo?

Este problema pretende que los alumnos desarrollen estrategias relativas a la estimación de la cantidad de unidades (personas) en un espacio limitado. Es un problema clásico y las resoluciones esperadas por los alumnos han sido ampliamente estudiadas en diversos trabajos (citar alguno de los de Lluís). No todas ellas ponen en juego los mismos conceptos y procedimientos pero, en casi todos los casos los alumnos trabajan distancias, áreas y densidad

Problema de Fermi 4: la ofrenda de flores



Uno de los actos más multitudinarios de la semana fallera es la ofrenda de flores. Falleros de toda la provincia se acercan hasta la plaza de la Virgen animados por sus inseparables bandas de música. Hay dos caminos para acceder a la plaza, por la calle San Vicente o por la calle de la Paz. ¿Cuántas personas desfilan por delante del número 11 de la calle San Vicente durante los dos días que dura la ofrenda?

El cuarto problema, aunque también consiste en la estimación del número de personas, difiere del tercero en el hecho se desplazan a una velocidad que se puede considerar constante. Lo procedimientos de resolución implican trabajar con longitudes, áreas y velocidades.

Problema de Fermi 5: el jardín del Túria



El jardín del Túria es un parque que ocupa el lecho del río Túria y que tiene una extensión de unas 110ha. Es el jardín urbano más grande de España y también el más visitado. Esto se debe, entre otras cosas, a que recorre toda la ciudad y, por tanto, se convierte en una vía verde ideal para desplazarse cómodamente a pie, corriendo o en bicicleta. A lo largo de su extensión hay bastante diversidad de vegetación ¿podrías estimar el número aproximado de árboles que hay entre el puente de Nuevo Centro y el Pont del Regne (justo después del parque Gulliver)?

El quinto y último problema consiste en estimar el número de árboles que hay en un espacio determinado. Para su resolución se trabaja con la medida de longitudes y de áreas.

Respecto a la metodología más adecuada para desarrollar este tipo de tareas, a través de la experiencia desarrollada en la Facultad de Magisterio y basándonos en otras experiencias similares (Albarracín y Gorgorió, 2014, Gallart et al. 2015), consideramos que es adecuado que éstos sean resueltos en grupos. Puede resultar interesante dejar en primer lugar que los alumnos realicen un plan de solución individual y que, a continuación, hagan la resolución en grupos de tres o cuatro personas. Además, conviene que los alumnos tengan acceso a diferentes herramientas informáticas tales como navegadores en los que buscar información o aplicaciones para calcular distancias o áreas (google maps, por ejemplo). En la experiencia realizada en magisterio los alumnos resolvieron las tareas en horario extraescolar, de forma que, dado que todos ellos están contextualizados en entornos geográficamente cercanos, pudieron realizar tareas de medición para completar sus resoluciones.

2. Discusión y conclusiones

Resulta contradictorio que los estudiantes tengan dificultades precisamente con aquellos procedimientos matemáticos que también son aplicables en el ámbito extraescolar, sin embargo, precisamente por eso, los profesores los damos por conocidos o los dejamos para otras disciplinas. La discontinuidad que a menudo existe entre disciplinas se puede superar proponiendo a nuestros alumnos tareas contextualizadas que pongan en juego procedimientos interdisciplinares, de esta forma permitiremos que los alumnos encuentren por sí mismos el sentido de los contenidos matemáticos que, de otra forma, suelen resultarles ajenos.

La medida de magnitudes es uno de estos contenidos, pese a que los procedimientos asociados a la medida son recurrentes en la vida cotidiana (pensar, por ejemplo, en la estimación), los alumnos tienen serias dificultades para medir, escoger la unidad de medida adecuada o pasar de unidad a otra. Los

problemas de Fermi enfrentan a los alumnos a poner en juego directamente estos procedimientos en contextos muy cercanos ya que, para resolver, deben medir (con todas las dificultades que esto puede implicar), operar y, por último, validar si la solución obtenida es o no razonable. Este último aspecto, característico de la resolución de problemas, toma una relevancia particular en el caso de los problemas de Fermi ya que el contexto real proporciona a los alumnos un marco idóneo para poder validar sus soluciones.

Pese a todo, tal y como observamos en la experiencia desarrollada con alumnos de la Facultad de Magisterio, los estudiantes, acostumbrados a enfrentarse a tareas matemáticas cerradas, se sienten desconcertados cuando la pregunta a responder no tiene respuesta única y el camino para llegar a ella no sigue procedimientos estándar. Sin embargo, una vez superado el desconcierto inicial, los estudiantes fueron capaces de desarrollar soluciones complejas que implicaban procedimientos y conceptos relativos a la medida de magnitudes. En cualquier caso, no es sorprendente que los alumnos, independientemente de su nivel académico, encuentren algunas dificultades en este tipo de tareas ya que implican procesos más complejos que otras más formales que sólo requieren una resolución matemática. En los problemas de Fermi (que están en línea con las tareas de modelización), los alumnos deben enfrentarse a identificar cuáles son las herramientas matemáticas que son necesarias en la resolución (matematizando el problema real), a continuación deben realizar un trabajo matemático con esas herramientas y, por último, deben ser capaces de interpretar y validar la solución obtenida en el contexto real de problema.

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics, 86*(1), 79–96.

Ärlebäck, J.B. and Bergsten, C. (2009) *On the Use of Realistic Fermi Problems in Introducing Mathematical Modelling in Upper Secondary Mathematics.*Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies. pp 597-609

Baxter, Mark, National Research and Development Centre for Adult Literacy and Numeracy (NRDC), corp creator. (2006) *Measurement wasn't taught when they built the pyramids - was it? : the teaching and learning of common measures in adult numeracy : April 2006.* Recuperado de http://dera.ioe.ac.uk/22315/1/doc_3019.pdf

Chamorro, M. C. (2001). Las dificultades en la enseñanza-aprendizaje de las magnitudes en Educación Primaria y ESO. En *Dificultades del aprendizaje de las Matemáticas*. (pp. 80-122). Madrid: M.E.C.

Gallart, C., Ferrando, I., Albarracín, L., García-Raffi, L. M. y Gorgorió, N. (2015). Una herramienta para la caracterización de modelos producidos en la resolución de problemas de fermi. En *Investigación en educación Matemática* XIX, 269-278.

Gallart C., Ferrando I. y García-Raffi, L. M. (2015a). Análisis competencial de una tarea de modelización abierta. *Números, 88, 93-103*.

Hildreth, D. J. (1983). The use of strategies in estimating measurements. The Arithmetic Teacher, 30(5), 50-54.

Kittel, A., and Marxer, M. (2005). *Wie viele Menschen passen auf ein Fussballfeld?* Mit Fermiaufgaben individuell fördern. Mathematik Lehren, Aug 2005, 131, 14–18.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. and Buys, K. (eds) (2008) *Young children learn measurement and geometry*. Sense Publishers, Rotterdam/Tapei Recuperado de https://www.sensepublishers.com/media/1295-young-children-learn-measurement-and-geometry.pdf

GAMIFICACIÓN EN MATEMÁTICAS DE TERCERO DE ESO

Mayte Briz Alabau
mayte.briz@salesianos.edu
Colegio Salesiano San Juan Bosco - València

Modalitat: Comunicació
Nivell educatiu: Secundària
Paraules clau: Gamificació, motivació, metodología, recursos

RESUMEN

La gamificación es un recurso que se utiliza en educación. Consiste en aplicar los elementos y mecánicas del juego con el objetivo de motivar y fidelizar a los alumnos con la materia. En este trabajo haré una introducción sobre esta metodología y presentaré varios ejemplos prácticos, centrándome en "El misterio de Diofanto". Es un juego por equipos en el que los alumnos resuelven varios retos que les llevarán a enfrentarse a una prueba final: descifrar el enigma que se muestra en la tumba de Diofanto. La actividad la hemos llevado a cabo con alumnos de tercero de ESO, en la unidad didáctica de resolución de ecuaciones de primer y segundo grado y problemas. Expondré la experiencia, explicaré los motivos por los cuales la consideramos un ejemplo de gamificación en las aulas y plantearé posibles propuestas de mejora.

0. INTRODUCCIÓN TEÓRICA SOBRE GAMIFICACIÓN

a. *¿Por qué usar juegos?*

Con el objetivo de que las clases no sean tediosas, ineficaces o poco participativas, los docentes buscamos continuamente nuevas metodologías para el aula.

Algunos de los objetivos perseguidos tanto en secundaria como en el ámbito universitario es **motivar a los estudiantes y lograr que se comprometan con las asignaturas**. En este contexto **el uso de juegos como herramientas de aprendizaje** se presenta como una opción a estudiar y desarrollar debido a su habilidad para enseñar y reforzar conocimientos y habilidades propias del área de las matemáticas como es la resolución de problemas, el trabajo en equipo o el análisis de información. Los juegos tienen el poder de motivar; son extremadamente participativos, y a menudo, nos gusta jugar sólo por el placer de ganar o participar sin recibir ninguna recompensa.

b. *¿Qué es la gamificación?*

La Gamificación en educación es la utilización de elementos y mecánicas del juego para mejorar el compromiso y la motivación de los alumnos.

c. *Un poco de historia*

Tal y como cuentan en su libro *Gamificación en las aulas universitarias* los autores Ruth Contreras Espinosa y Jose Luis Eguia de la universidad autónoma de Barcelona, el concepto de gamificación fue definido por Deterding, Dixon, Khaled y Nacke en el artículo *Gamification: Toward a definition* en 2011, se refiere al uso de elementos de diseño de juegos en contextos que no son de juego. Hablamos de un campo relativamente nuevo pero con un rápido crecimiento. El primer uso y

documentación del término se realizó en el año 2008, pero este no fue generalizado sino hasta el segundo semestre de 2010. Se presume que fue Nick Pelling quién introdujo el término mucho antes, en el año 2003, cuando escribió un trabajo como consultor para una empresa de fabricación de hardware.

Se ve un aumento en la cantidad de artículos científicos publicados, solo es cuestión de ver un par de revisiones bibliográficas centradas en la educación. Véase por ejemplo la revisión de Hamari, Koivisto, y Sarsa, publicada en 2014 y titulada *Does Gamification Work? A literature review of empirical studies on gamification* en la que se muestran 24 artículos publicados en los últimos dos años.

d. *Principios de la gamificación*

Los principios de gamificación descritos por Mark van Diggelen (2012), sugieren que, el proceso de Gamificación se puede resumir en 10 puntos:

1. Tipos de competición: Jugador versus jugador, Jugador versus sistema y/o Solo.

2. Presión temporal: Jugar de forma relajada o jugar con el tiempo en.

3. Escasez: La escasez de determinados elementos puede aumentar al reto y la jugabilidad

4. Puzzles: Problemas que indican la existencia de una solución

5. Novedad: Los cambios pueden presentar nuevos retos y nuevas mecánicas que dominar

6. Niveles y progreso

7. Presión Social: El rebaño debe saber lo que hace.

8. Trabajo en equipo: puede ser necesario la ayuda de otros para conseguir avanzar

9. Moneda de cambio: Cualquier cosa que puede ser intercambiada por otra de valor, será buscada.

10. Renovar y aumentar poder: Permite añadir elementos motivacionales al jugador.

e. *Elementos de la gamificación*

En “La sorprendente verdad sobre qué nos motiva”, Daniel Pink (Pink, 2010) nos explica que para conseguir esta motivación intrínseca hay que tener en cuenta tres elementos:

- El usuario debe tener la autonomía para poder decidir qué acciones quiere hacer y de qué manera. Esto significa que debe disponer de una gran cantidad de opciones para que pueda escoger las más adecuadas.
- Cada una de las tareas presentadas debe estar establecida con una finalidad determinada y muy bien clarificada. Las acciones son motivadores si tienen un sentido, si se les puede encontrar una relación directa con la finalidad que persigue el usuario.
- Y por último es necesario que todos los usuarios tengan la capacidad de poder resolver la tarea planteada. Normalmente los usuarios no tienen la

misma competencia, y por este motivo será necesario plantear diferentes niveles de dificultad. De esta forma cada uno de ellos podrá encontrar tareas que les supongan un reto.

f. *Mecánicas*

Y por último hay las mecánicas. Son los ingredientes que permitirán conseguir todo lo que se ha planteado anteriormente y deben estar a su servicio para conseguirlo. Existen listas con las mecánicas más habituales, pero siempre suelen quedarse cortas con toda la cantidad de opciones que se pueden utilizar.

Algunas de estas mecánicas y que tienen una vinculación directa con los contenidos trabajados en el aula son:

- Retos definidos. Jugar es entender cada propuesta como un reto que se quiere superar voluntariamente. Para conseguir que los alumnos de una formación vivan la experiencia como un juego es necesario que sepan qué retos tienen que asumir en cada momento y de esta forma puedan centrar sus esfuerzos en superarlos.
- Estados de victoria. Pero no hay suficiente con saber qué se debe hacer, sino que el sistema gamificado deberá permitir saber automáticamente cuándo un usuario ha superado una prueba satisfactoriamente. En este sentido, y esto también lo aprendemos de los videojuegos, el feedback instantáneo está íntimamente relacionado con la motivación intrínseca para querer resolver un reto.
- Gestión de recursos. Un jugador es consciente de todos los recursos que tiene en la mano, y decide usarlos según su criterio. Esto hace que un sistema gamificado permita que haya diferentes caminos para llegar a un objetivo definido.
- Los *boss* finales. En un juego, la progresión del aprendizaje se hace lentamente. Cada nuevo reto integra los conocimientos que hemos aprendido anteriormente hasta llegar a un *boss* final, un reto muy difícil donde se pone a prueba si se han adquirido las habilidades necesarias para superarlo.
- Las recompensas. Cada reto superado permite que el usuario desbloquee caminos o habilidades nuevas que puede usar para superar lo nuevo que se presente. Estas recompensas modifican el avatar que define cada usuario como jugador y mejoran su estatus. En el momento en que las recompensas sean significativas, aumenta la motivación de los usuarios para conseguirlas.
- El papel del azar. En casi todos los juegos hay un mínimo componente de azar. El azar está asociado a la sorpresa que permite generar que los usuarios vivan unos picos de interés, y una forma de asociarlo en un proyecto gamificado es asociarlo directamente con la narrativa.

g. *Moodle*

La introducción del moodle en todos los ámbitos de la formación permitirá crear tareas autocorregidas y el feedback instantáneo. Esto sumará puntos a la

motivación de los alumnos que verán como sus tareas se ven recompensadas inmediatamente.

Se introducirán eventos aleatorios al principio de cada clase o durante el periodo entre clases a través del Moodle, que permitirán que el alumnado se mezcle para hacer sus trabajos o que puedan conseguir realizar ciertas actividades que solo estarán visibles durante un periodo corto de tiempo.

h. *Competiciones saludables en enseñanza*

Aunque en la actualidad sigue vigente la discusión sobre si una competición puede ser o no un buen método docente, en lo que sí parece haber consenso es en ciertas características que una actividad competitiva en el aula ha de tener para ser beneficiosa o al menos no ser perjudicial para los estudiantes (Thousand, 1994; Yu et al., 2002; Shindler, 2007). En esta sección se comentan algunas de esas características, que están relacionadas con la definición de "competición saludable" dada por Shidler (2007): una actividad corta en la que los premios de los vencedores no son substanciales y que tiene que estar enfocada en el proceso de aprendizaje en vez de en los resultados (clasificaciones) finales.

En primer lugar, los premios para los vencedores deben ser simbólicos o de baja relevancia (caramelos y aplausos), con el fin de que los esfuerzos de los estudiantes sean intrínsecos y no dirigidos a ganar en la competición. Cuando se ofrece una recompensa excesivamente valiosa por ganar, se hace que la victoria sea lo importante y que los estudiantes tiendan a centrarse en alcanzarla a toda costa, aunque se provoquen desequilibrios significativos en el esfuerzo y aprendizaje de los miembros de un equipo. En particular, altas calificaciones, cosas materiales de valor, y privilegios de cualquier tipo han de evitarse. A pesar de ello, es conveniente mantener un premio para los vencedores, que será visto por los estudiantes como un objetivo a alcanzar de forma colaborativa y les motivará para poner un esfuerzo extra no sólo como interés personal, sino también como interés de todos los compañeros de su equipo.

En particular, altas calificaciones, cosas materiales de valor, y privilegios de cualquier tipo han de evitarse. A pesar de ello, es conveniente mantener un premio para los vencedores, que será visto por los estudiantes como un objetivo a alcanzar de forma colaborativa y les motivará para poner un esfuerzo extra no sólo como interés personal, sino también como interés de todos los compañeros de su equipo. Esto no significa que los estudiantes no puedan obtener una calificación en la asignatura por su trabajo en la actividad. Por supuesto, además de los objetivos de aprendizaje, las calificaciones representan un incentivo importante para que los estudiantes den lo mejor de sí mismos. En este sentido, el alcanzar los objetivos de aprendizaje ha de prevalecer sobre la obtención de altas calificaciones.

En segundo lugar, la competición ha de ser corta. Una excesiva duración de la misma haría incrementar la sensación de prominencia y disminuiría la sensación de intensidad y diversión.

La competición, por otra parte, debe ser lo suficientemente larga para evitar la desmotivación de los estudiantes provocada por unos resultados iniciales malos, y permitir que todos los participantes tengan una buena oportunidad de ganar hasta el final de la actividad.

Resumiendo y listando todas las características discutidas, se podría concluir que una competición saludable en enseñanza debería:

- ser emprendida por un premio de valor simbólico,
- ser realizada en un periodo de tiempo relativamente corto,
- proporcionar diversidad de temáticas y tareas a realizar,
- ofrecer y dar la sensación a todos los participantes de tener oportunidad de ganar, y
- asignar un valor visible al proceso, calidad y evaluación del aprendizaje.

2. UN EJEMPLO DE GAMIFICACIÓN EN LAS AULAS DE 3º ESO: EL MISTERIO DE DIOFANTO

a. *Justificación*

El curso pasado tuvimos que rehacer las programaciones de los cursos impares por la entrada en vigor de la LOMCE. Aprovechamos la ocasión para introducir actividades competenciales y más motivadoras en todos los temas.

Hay áreas como geometría, funciones o estadística y probabilidad donde es relativamente fácil aprovechar los contenidos para explicar fenómenos de la vida real. Por ejemplo, en estadística analizamos y representamos con excel datos del INE relativos a sostenibilidad dentro de un proyecto multidisciplinar de educación medioambiental. En el análisis de funciones, aprovechamos gráficos de las pruebas pisa para deducir información. En el caso del álgebra, decidimos utilizar el juego para amenizar la práctica de las operaciones con polinomios y la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

En el caso de las operaciones con polinomios, les dimos a cada grupo una “tabla de autoindefinidos” a rellenar con monomios en vez de con letras. Se llama “polinomis encreuats” y han de completarla con el resultado de la operación. Ver ANEXO I

En el caso de las ecuaciones, decidimos elaborar un juego de pistas en las que los alumnos deberían descifrar un misterio. Para ello, deben resolver ecuaciones y problemas.

Se trata de un juego por equipos en el que todos pueden desvelar el misterio pero la velocidad cuenta a la hora de obtener más o menos puntos, lo que les da una u otra posición en la clasificación. No tiene por qué perder ningún equipo si superan los retos.

b. *Descripción del juego*

"El pare de l'àlgebra i les equacions és Diofanto. A ell li agradaven molt els misteris i en el seu honor plantegem este repte. Primer haureu de resoldre una equació cada membre del grup de manera individual. Teniu 5 minuts. Després anireu al grup inicial i amb la solució de les vostres tres equacions obrireu un cadenat. Dins del cadenat, hi ha una equació gràfica que haureu de resoldre el grup. Quan la tingueu resolta, ens entregueu la solució i vos la canviarem pel repte final: desxifrar el misteri que va escriure Diofanto per a la seua tomba. Acepteu el repte?

Heu d'entregar les tres equacions individuals, l'equació gràfica i el misteri de Diofanto. Els tres primers equips tindran un 10 i la resta un 9. Si no ho aconseguiu resoldre en classe podeu obtindre com a màxim un 5. Sort"

c. *Elementos del juego*

Carta de presentación: Se le entrega a cada grupo una carta donde se les explica el juego.

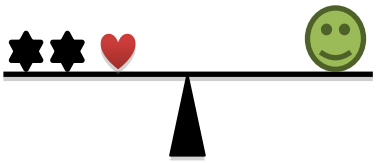
Ecuaciones: Se le reparte a cada miembro del grupo una ecuación. Las ecuaciones son distintas para cada alumno y todas tienen solución entera. Se trata de ecuaciones de primer y segundo grado con o sin denominador y en algún caso con identidades notables. Como hay distinto grado de dificultad en las ecuaciones, podemos asignar las más difíciles a alumnos con más recursos y las más fáciles a los alumnos que más les cuesta.

Ecuaciones con balanzas: Se trata de ecuaciones gráficas. Las ecuaciones con balanzas ayudar a entender el concepto de ecuación e igualdad sin utilizar las operaciones con monomios.

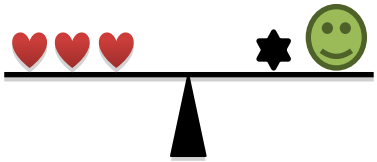
Las reglas para resolverlas son similares a las que utilizamos para resolver ecuaciones creando ecuaciones equivalentes más sencillas.

Ejemplo 1:

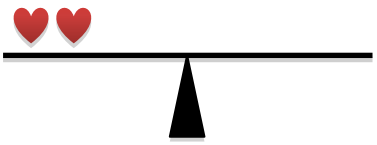
Ecuación 1:



Ecuación 2

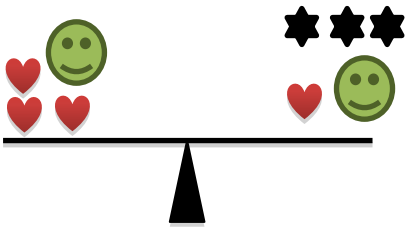


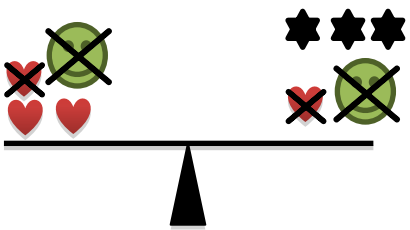
Pregunta: ¿Qué hemos de colocar para equilibrar la balanza?



Solución:

Si le damos la vuelta a la ecuación 1 y le sumamos la 2 obtenemos que dos corazones equivalen a tres estrellas:



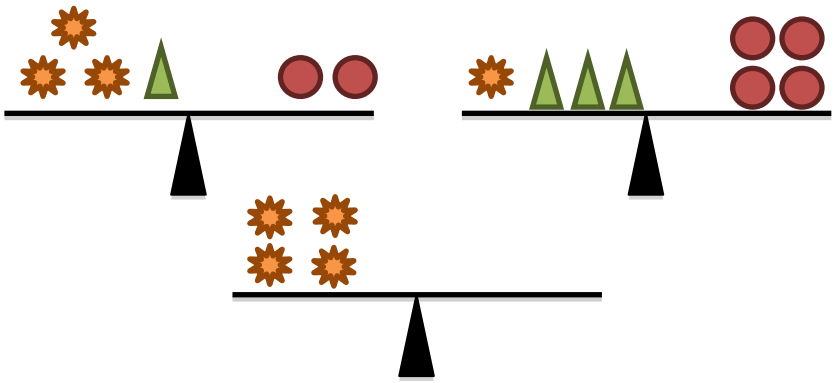


Los conceptos de sumar ecuaciones y de restar elementos a ambos lados de la igualdad son procedimientos que utilizamos para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones, por lo que nos ayudará a explicar el tema a los alumnos.

Recomiendo practicar más ejercicios con balanzas antes de enfrentarnos a la resolución del misterio porque si no será un reto demasiado difícil y producirá abandono y desmotivación para la mayoría.

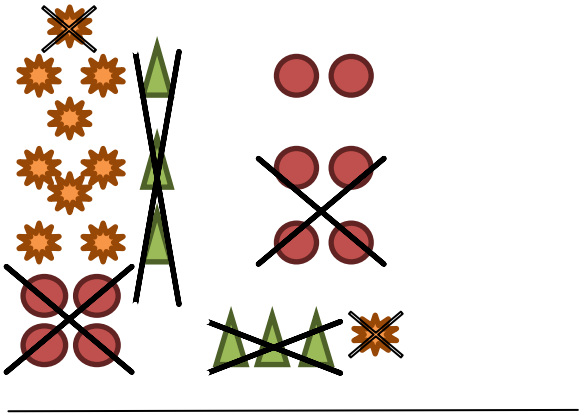
Ejemplo 2:

Ecuación 1 Ecuación 2:



Solución:

3 veces la ecuación 1 más una vez la ecuación 2 dada la vuelta nos da:



8 estrellas **2 círculos**

Por lo tanto la solución es que 4 estrellas equivalen a 1 círculo.

Este procedimiento se acerca mucho a la resolución de sistemas de ecuaciones por el método de reducción. Como lo explicaremos en el siguiente tema, podremos retomar este ejercicio como introducción al algoritmo de resolución de sistemas por reducción.

Candados

Se trata de candado de combinación numérica de tres cifras.

Cada miembro del grupo aporta su o sus soluciones de la ecuación que le ha tocado y entre todos van probando la combinación ganadora pues desconocen el orden.




Caja del juego

Todos los elementos del juego (Cartas inicial y final, candados, ecuaciones y gráficas) se llevan al aula en una caja antigua para ambientar el juego.

Misterio final

Una vez los alumnos han resuelto las tres ecuaciones individuales y la ecuación de las balanzas, las llevan al profesor y este las cambia por el misterio final, en el que tendrán que averiguar cuántos años vivió Diofanto según la inscripción de su lápida.

La carta contiene el enigma y una breve presentación de la obra de Diofanto. Se puede ver en el anexo II y el enigma dice así:

Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: los números pueden mostrar, ¡oh maravilla! la duración de su vida. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte, de vello se cubrieron sus mejillas. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad.

¿Cuántos años vivió Diofanto?

d. *Elementos del currículo*

En este juego trabajamos la resolución de ecuaciones de primer grado, ecuaciones de segundo grado sencillas y con identidades notables, las ecuaciones gráficas con balanzas (que nos servirán para introducir la resolución de sistemas de ecuaciones por el método de reducción y para explicar qué son ecuaciones equivalentes) y los problemas que se resuelven a través de una ecuación ecuaciones.

e. *Principios, elementos y mecánicas de gamificación que se hacen presentes en el misterio de Diofanto*

I. Principios de la gamificación

Según los principios de gamificación descritos anteriormente este juego cumple los siguientes:

1. Tipos de competición: Jugador versus jugador (el tiempo determina la posición en la clasificación) y Jugador versus sistema (todos los grupos pueden ganar si resuelven el misterio).
2. Presión temporal: Jugar con el tiempo en contra.

3. Escasez: No hay escasez de elementos.
4. Puzzles: Problemas que indican la existencia de una solución. Todos los retos son problemas que tienen solución.
5. Novedad: Los cambios pueden presentar nuevos retos y nuevas mecánicas que dominar. No hay.
6. Niveles y progreso. Una vez hemos superado el nivel de ecuaciones individual pasamos al nivel de ecuaciones con balanazas y una vez superado este al nivel del misterio de la tumba de Diofanto.
7. Presión Social: El resto de grupos van sabiendo por el panel la posición del resto de grupos.
8. Trabajo en equipo: puede ser necesario la ayuda de otros para conseguir avanzar. En este caso todo el juego es por equipos.
9. Moneda de cambio: Cualquier cosa que puede ser intercambiada por otra de valor, será buscada. No hay.
10. Renovar y aumentar poder: Permite añadir elementos motivacionales al jugador. No hay.

II. Elementos de la gamificación

Para conseguir esta motivación intrínseca hay que tener en cuenta tres elementos:

- El usuario debe tener la autonomía para poder decidir qué acciones quiere hacer y de qué manera. Esto significa que debe disponer de una gran cantidad de opciones para que pueda escoger las más adecuadas. Este apartado no se cumple en el juego y por tanto lo tendremos en cuenta en las opciones de mejora.
- Cada una de las tareas presentadas debe estar establecida con una finalidad determinada y muy bien clarificada. Las acciones son motivadores si tienen un sentido, si se les puede encontrar una relación directa con la finalidad que persigue el usuario. En este caso los alumnos saben por qué practicamos ecuaciones y saben que la resolución de cada reto les permite pasar al siguiente.
- Y por último es necesario que todos los usuarios tengan la capacidad de poder resolver la tarea planteada. Normalmente los usuarios no tienen la misma competencia, y por este motivo será necesario plantear diferentes niveles de dificultad. De esta forma cada uno de ellos podrá encontrar tareas que les supongan un reto. Aquí tenemos ecuaciones distintas para cada grupo y para cada alumno, por lo que podremos ajustarlas a sus capacidades.

III. Mecánicas

Las mecánicas. Son los ingredientes que permitirán conseguir todo lo que se ha planteado anteriormente y deben estar a su servicio para conseguirlo. Algunas de estas mecánicas y que tienen una vinculación directa con los contenidos trabajados en el aula son:

- Retos definidos. Jugar es entender cada propuesta como un reto que se quiere superar voluntariamente. Para conseguir que los alumnos de una formación vivan la experiencia como un juego es necesario que sepan qué retos tienen que asumir en cada momento y de esta forma puedan centrar sus esfuerzos en superarlos. Se cumple porque los alumnos saben que tres retos han de superar.
- Estados de victoria. Pero no hay suficiente con saber qué se debe hacer, sino que el sistema gamificado deberá permitir saber automáticamente cuándo un usuario ha superado una prueba satisfactoriamente. Se cumple porque resolver bien las ecuaciones nos permite abrir el candado y por tanto sabemos que lo hemos hecho bien, al entregar la ecuación de balanzas al profesor, este, en el momento, la corrige y les entrega el misterio de Diofanto.
- Gestión de recursos. Un jugador es consciente de todos los recursos que tiene en la mano, y decide usarlos según su criterio. Esto hace que un sistema gamificado permita que haya diferentes caminos para llegar a un objetivo definido. Esto no se cumple. El juego es muy dirigido. Lo veremos en las opciones de mejora.
- Los *boss* finales. En un juego, la progresión del aprendizaje se hace lentamente. Cada nuevo reto integra los conocimientos que hemos aprendido anteriormente hasta llegar a un *boss* final, un reto muy difícil donde se pone a prueba si se han adquirido las habilidades necesarias para superarlo. En este caso podría ser el misterio final de Diofanto.
- Las recompensas. Cada reto superado permite que el usuario desbloquee caminos o habilidades nuevas que puede usar para superar lo nuevo que se presente. En nuestro caso el paso de etapa seria la recompensa.
- El papel del azar. En casi todos los juegos hay un mínimo componente de azar. El azar está asociado a la sorpresa que permite generar que los usuarios vivan unos picos de interés, y una forma de asociarlo en un proyecto gamificado es asociarlo directamente con la narrativa. En nuestro caso el azar no interviene.

f. *Moodle*

La introducción del moodle en todos los ámbitos de la formación permitirá crear tareas autocorregidas y el feedback instantáneo. Esto sumará puntos a la motivación de los alumnos que verán como sus tareas se ven recompensadas inmediatamente.

Se introducirán eventos aleatorios al principio de cada clase o durante el periodo entre clases a través del Moodle, que permitirán que el alumnado se mezcle para hacer sus trabajos o que puedan conseguir realizar ciertas actividades que solo estarán visibles durante un periodo corto de tiempo. Esto lo utilizamos en todos los temas del curso pero hasta el momento, no lo hemos utilizado directamente para este juego. Lo veremos en las propuestas de mejora.

g. *Elementos de una competición saludable que se cumplen en este juego:*

- Ser emprendida por un premio de valor simbólico. En este caso es la nota.

- Ser realizada en un periodo de tiempo relativamente corto. En este caso la sesiones de clase son tres. Podría alargarse en casa unos días si añadimos la posibilidad de ganar puntos anteriormente como veremos en las opciones de mejora.
- Proporcionar diversidad de temáticas y tareas a realizar. La temática es única pero dentro de esto, han de resolver ecuaciones ordinarias, ecuaciones con balanzas y el problema final.
- Ofrecer y dar la sensación a todos los participantes de tener oportunidad de ganar. Todos pueden ganar.
- Asignar un valor visible al proceso, calidad y evaluación del aprendizaje. En este caso podemos poner este tipo de ecuaciones en el examen de la unidad y además obtienen buena nota si asumen y descifran los retos.

h. *Futuros retos como propuestas de mejora*

- Mejorar el sistema con puntos.
- Alargar el juego con más ecuaciones y problemas.
- Intentar que los alumnos puedan elegir distintos caminos.
- Traer de casa comodines de casa.
- Asignar premios/insignias.

Teniendo en cuenta estas ideas, se propone añadir un sistema de puntos.

La nota dependerá de los puntos acumulados y no solo de la rapidez.

Los puntos se conseguirán:

- ✓ Resolviendo en poco tiempo los retos, cada uno de ellos. Cuanto más rápido lo resuelvan más puntos ganan.
- ✓ Resolviendo los retos sin ayuda del profesor. Con ayuda no sumamos tantos puntos.
- ✓ Se pueden traer puntos extra de casa resolviendo un test de moodle. Cada uno de los miembros del equipo puede aportar puntos haciendo su propio test.
- ✓ Puede añadirse otra etapa más en la que cada miembro del grupo elija qué tipo de reto resolver.

- Mejorar el panel del ranking.

  Se proyectará un tablero ambientado en el misterio de Diofanto y los grupos irán sumando ahí los puntos para que sea visible por el resto de equipos. Hasta ahora se hacía en la pizarra o en voz alta.

- Asignar roles.

Se pueden asignar los roles típicos de los trabajos cooperativos: El secretario, el que pregunta las dudas y entrega los retos al profesor y el moderador.

3. OTROS RECURSOS DE GAMIFICACIÓN

a. *Kahoot*

Kahoot es una plataforma de aprendizaje mixto basado en el juego, permitiendo a los educadores y estudiantes investigar, crear, colaborar y compartir conocimientos.

Tiene un componente social. Están alentando el intercambio y la colaboración a través de concursos, debates y encuestas. Puede jugarse online o a través de los teléfonos móviles. Individual o en grupo. Su filosofía es que la gente de todo el mundo debe compartir su contenido educativo para que otros jueguen en las aulas de todo el mundo.

b. *Knowre*

Es una plataforma desarrollada a modo de juego que se desarrolla a lo largo de toda una región por la que nuestros protagonistas van a ir pasando y en donde será necesario ir poniendo en práctica sus conocimientos adquiridos para resolver los problemas matemáticos que les van saliendo al paso. La plataforma actualmente se encuentra en fase beta y tiene colgados contenidos referente álgebra.

c. *Math game time*

Math Game Time es un portal donde puedes encontrar numerosos juegos interactivos, videos y documentos imprimibles diseñados para desarrollar las habilidades matemáticas de los niños. La web, propiedad de una empresa estadounidense, ha contado con la colaboración de un nutrido grupo de profesores para validar los juegos. Sus recursos van dirigidos a alumnos de Infantil, Primaria y primer ciclo de Secundaria. Aunque todos sus contenidos están en inglés, puede constituir una gran herramienta para que trabajes en clase los diversos temas curriculares de la asignatura de Matemáticas.

d. *Retomates*

Sitio web pensado para disfrutar de las matemáticas mediante juegos interactivos. Dispone retos, problemas, relatos y un módulo de gestión de grupos para profesores. Se pueden plantear también torneos y campeonatos. Está desarrollada por un profesor de matemáticas.

e. *Buzzmath*

BuzzMath es una plataforma online en inglés que facilita tanto la enseñanza como el aprendizaje de las matemáticas a través de diferentes ejercicios interactivos con gran atractivo visual.

f. *Plickers*

Aplicación gratuita que nos permite crear test de respuestas múltiples y aplicarlas en el aula con feedback instantáneo.

Se proyecta la pregunta en clase y los alumnos responden levantando su tarjeta de código bidi. Según esté orientada, la respuesta será a, b, c o d.

Cada alumno tiene su código, por lo que no sabrán qué están respondiendo sus compañeros.

El docente escanea los códigos en clase con su smarthphone y en el momento se sabe cuántos y quiénes han respondido correctamente.

Web: https://plickers.com/

g. *Edmodo*

Red social pensada para la educación.

Web: https://www.edmodo.com/

h. *Classcraft*

Permite transformar las clases en un juego de rol.

Web: https://www.classcraft.com/es/

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Aula Planeta. Servicio integrado de contenidos curriculares. (2014). *Aula planeta, innovamos para una educación mejor*. Recuperado de http://www.aulaplaneta.com

Contreras Espinosa, Ruth y Eguia, Jose Luis (2016). *Gamificación en aulas Universitarias*. Editorial Bellaterra. Institut de la Comunicació, Universitat Autònoma de Barcelona. Recuperado de http://incom.uab.cat/download/eBook_incomuab_gamificacion.pdf

Fernando Rodríguez y Raúl Santiago (2015). *Gamificación*. Editorial Grupo océano.

Juan V Conde, Oriol Borrás Gené *Guía de gamificación para moodle*. Gabinete de Tele-Educación de la Universidad Politécnica de Madrid. Recuperado de http://serviciosgate.upm.es/docs/asesoramiento/Gamificar_Moodle.pdf

JUGO, plataforma online de gamificación. (2013). *Gamificación*. Recuperado de http://www.gamificacion.com

Murua Cuesta, Eder (2013). *Análisis de la Gamificación como concepto aplicable en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en 4º de ESO*. (Trabajo Fin de Master). Universidad internacional de La Rioja, facultad de Educación. Recuperado de http://reunir.unir.net/handle/123456789/2056

ANEXO 1

POLINOMIS ENCREUATS

Fes les operacions horitzontals i col·loca el resultat ordenat en les files.
Per comprovar que està bé, et donem la suma de les columnes.

	A	B	C	D
1				
2				
3				
4				
5				
6				

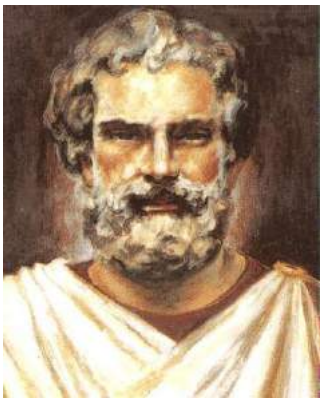
$P(x) = 2x^3 - x^2 + 7$	$T(x) = -x^3 + x - 1$
$S(x) = -x^3 + 2x^2 + 2x$	$Q(x) = x - 1$
$V(x) = 2x^2 + 1$	$W(x) = x^2 - 1$

Operació Horizontal	Suma Vertical
1. $P(x) + T(x)$	$A = 5x^3$
2. $T(x) - S(x)$	$B = -4x^2$
3. $Q(x) \cdot V(x)$	$C = -3x$
4. $W(x) \div Q(x)$	$D = 16$
5. $(2x - 1)^2$	
6. $P(x) - [2W(x) + Q(x)]$	

ANEXO II

Diofanto de Alejandría Es considerado "el padre del álgebra".

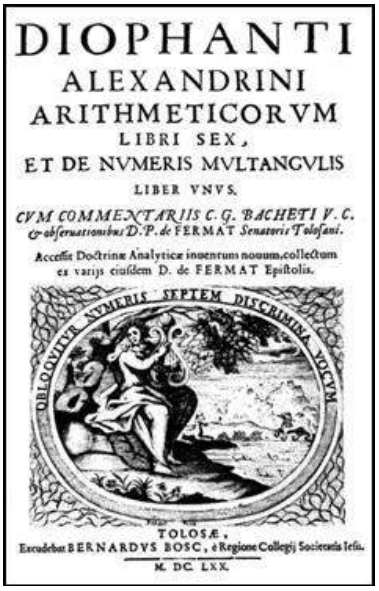
Nacido en Alejandría, de él nada se conoce con seguridad sobre su vida, salvo su edad con la que falleciera; esto, gracias al epitafio redactado en forma de problema y conservado en la antología griega.



Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: los números pueden mostrar, ¡oh maravilla! la duración de su vida· Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte, de vello se cubrieron sus mejillas· Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada· Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años· De todo esto se deduce su edad·

Obra

El matemático alejandrino debe su renombre a su obra *Arithmetica*. Este libro, que constaba de trece libros de los que sólo se han hallado seis, fue publicado por Guilielmus Xylander en 1575 a partir de unos manuscritos de la universidad de Wittenberg, añadiendo el editor un manuscrito sobre números poligonales, fragmento de otro tratado del mismo autor.


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& observationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum
ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.
TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

En esta obra realiza sus estudios de ecuaciones con variables que tienen un valor racional (ecuaciones diofánticas), aunque no es una obra de carácter teórico sino una colección de problemas, adecuados para soluciones enteras.

¿Cuántos años vivió Diofanto?

EL USO DE LOS PROBLEMAS DE PATRONES GEOMÉTRICOS PARA LA INTRODUCCIÓN DEL ÁLGEBRA EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA[1]

Eva Arbona - Mª José Beltrán-Meneu
earpi@alumni.uv.es - maria.jose.beltran@uv.es
Ángel Gutiérrez - Adela Jaime
angel.gutierrez@uv.es - adela.jaime@uv.es
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de València - València

Modalidad: Comunicación
Nivel educativo: Primaria
Palabras clave: Pre-álgebra, Ecuaciones lineales, Patrones geométricos, Altas capacidades matemáticas, Educación Primaria

RESUMEN

El objetivo de esta comunicación es presentar la secuencia de actividades empleada con un estudiante superdotado de 9 años, que había finalizado 4º de Educación Primaria, con el fin de explorar los problemas de patrones geométricos como una posible forma de introducir y trabajar el pre-álgebra con estudiantes de Educación Primaria con alta capacidad matemática. Esta secuencia ha sido dividida en tres etapas diferenciadas (iniciación a la generalización, introducción de conceptos algebraicos y aplicación) y ha permitido al estudiante realizar la transición de la aritmética al álgebra con facilidad y, además, ser capaz de aplicar los conceptos adquiridos a otros contextos.

DESCRIPCIÓN DETALLADA DEL CONTENIDO DEL TRABAJO

Las aulas escolares del siglo XXI se caracterizan, principalmente, por la gran diversidad de estudiantes que albergan en ellas. Por este motivo, la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de Calidad Educativa (LOMCE), en su modificación de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE), establece que los centros escolares realizarán las adaptaciones curriculares necesarias para asegurar que el alumnado que requiera una atención educativa diferente a la ordinaria –entendiendo como tal a aquellos que presentan necesidades educativas especiales, dificultades específicas de aprendizaje, TDAH, altas capacidades, incorporación tardía al sistema educativo o condiciones personales o de historia escolar– pueda alcanzar el máximo desarrollo posible de sus capacidades personales.

Sin embargo, esta diversidad propicia que los profesores, en general, tiendan a atender y ayudar a los alumnos que presentan alguna dificultad de aprendizaje, dejando olvidados a aquellos que sobresalen de la media y que, por desgracia, reciben escasa atención. Esto supone una gran problemática, pues

> La sociedad no se puede permitir el lujo de que en este siglo se nos sigan quedando niños sin atender, por la injusticia social que supone y por el "despilfarro" que significa no disponer de los alumnos de alta capacidad

[1] Esta investigación forma parte de los proyectos EDU2012-37259 (MINECO) y EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER) y ha sido realizada con una *Ayuda de Iniciación a la Investigación* de la Universitat de València.

> intelectual con una buena formación, cuando nuestro futuro como sociedad, como grupo, va a depender de los avances en el saber (Torrego, 2011, p. 9).

En consecuencia, es conveniente y necesario que, una vez detectados, se lleve a cabo un conjunto de acciones relacionadas, "fundamentalmente, en el contexto escolar y junto a otros/as agentes educativos, con el objetivo de potenciar todas las capacidades del alumnado" (Aretxaga, 2013, p. 46).

El estudio del álgebra puede servir como contexto para realizar una intervención educativa extracurricular en estudiantes de altas capacidades matemáticas de Educación Primaria. El álgebra es uno de los contenidos clave del currículum de matemáticas de la E.S.O., que, en Educación Primaria, puede ser abordado desde la perspectiva del pensamiento algebraico, el cual permite a los estudiantes operar con cantidades desconocidas sin necesidad de usar notaciones simbólicas alfanuméricas (Radford, 2011b).

Investigaciones recientes han mostrado que estudiantes de Educación Primaria, incluso de los primeros cursos, son capaces de iniciarse en el aprendizaje del pre-álgebra con la ayuda de los *problemas de patrones geométricos* (Cooper y Warren, 2011; Radford, 2011a; Rivera y Becker, 2011). Benedicto, Jaime y Gutiérrez (2015) definen los problemas de patrones geométricos como aquellos que

> presentan los primeros términos de una secuencia y piden calcular, por este orden, el término *inmediato* (el que sigue a los dados), un término *próximo* a los conocidos (de manera que se puedan utilizar tanto la representación geométrica como la aritmética para el cálculo de valores), un término *lejano* tal que, aunque esté asociado a un valor numérico, su representación gráfica sea costosa de llevar a cabo y sea más conveniente poner en marcha un proceso de generalización y, finalmente, formular una expresión (que se espera sea algebraica) para el término *general* de la secuencia. (p. 154)

En este contexto, hemos elaborado una secuencia de enseñanza-aprendizaje que permite la iniciación al álgebra de estudiantes con altas capacidades matemáticas mediante la resolución de problemas de patrones geométricos y, a través de la cual, hemos podido analizar los procesos de aprendizaje utilizados por un estudiante superdotado de 9 años. La secuencia está formada por un total de 40 problemas y ha sido dividida en tres etapas diferenciadas para favorecer el aprendizaje de los estudiantes, así como la consecución de los objetivos didácticos, que han sido establecidos de un modo gradual y que presentamos a continuación:

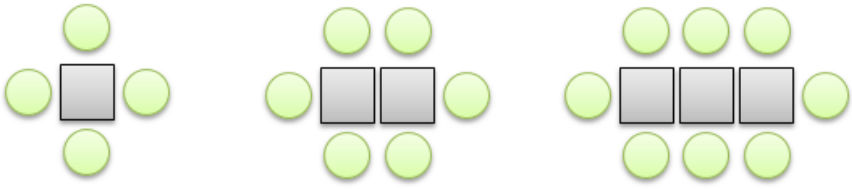
1) Realizar generalizaciones a través de problemas con patrones geométricos.
   - Generalizar relaciones directas.
   - Resolver relaciones inversas.
2) Adquirir y asimilar conceptos algebraicos básicos.
   - Comprender el significado de las letras en expresiones algebraicas, así como el significado de la terminología algebraica básica.
   - Transformar expresiones verbales en expresiones algebraicas.
   - Conocer y aplicar la jerarquía de las operaciones, así como el uso del paréntesis.
   - Resolver ecuaciones de primer grado de la forma $ax \pm b = c$.

3) Aplicar el álgebra en diversos contextos.
   - Transformar expresiones algebraicas mediante el uso de las operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división).
   - Resolver ecuaciones de primer grado de la forma $ax \pm b = cx \pm d$.
   - Resolver problemas de ecuaciones lineales con enunciado verbal.

La primera etapa está destinada al inicio del estudiante en la generalización mediante problemas de patrones geométricos, a través de la generalización de relaciones directas y la resolución de relaciones inversas. Para ello, diseñamos una secuencia de 20 problemas (figura 1), formados por los tres primeros términos de la secuencia del patrón geométrico y cinco tipos de cuestiones:

- Tres cuestiones de generalización directa, que permiten iniciar a los estudiantes en la formulación de expresiones generales mediante la identificación de patrones y relaciones. Estas cuestiones están ordenadas en función de la demanda cognitiva requerida y son las siguientes:
  - Una cuestión de generalización inmediata, que pide obtener un término inmediato de la figura.
  - Una cuestión de generalización cercana, que implica una mayor comprensión del patrón.
  - Una cuestión de generalización lejana, que implica una comprensión en profundidad del patrón.
- Dos cuestiones de relación inversa, que permiten introducir al estudiante en la inversión de operaciones y contextualizar su introducción en el mundo del álgebra. Diferenciamos dos tipos de cuestiones:
  - Una cuestión de relación inversa exacta, cuya solución numérica es un número natural que corresponde a un término de la secuencia.
  - Una cuestión de relación inversa inexacta, cuya solución numérica no es un número natural y, por tanto, no corresponde a ningún término de la secuencia.

Este sábado, María va a realizar una comida con sus amigos y familiares para celebrar que ha cumplido 12 años. Para ello, quiere calcular cuántas mesas y sillas le harán falta. Quiere sentarlos del siguiente modo:



1 mesa 2 mesas 3 mesas

Pero María tiene un problema: no sabe cuántos invitados acudirán a su fiesta. ¿Podrías ayudarle a calcular cuántos invitados cabrán en función de cuántas mesas coloque?

a) ¿Cuántos invitados cabrán con 6 mesas? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántos invitados cabrán con 15 mesas? ¿Cómo lo sabes?

c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos invitados cabrán con 50 mesas? ¿Cómo lo sabes?

d) Si hay 22 invitados, ¿cuántas mesas habrá? ¿Cómo lo sabes?

e) Si hay 35 invitados, ¿cuántas mesas habrá? ¿Cómo lo sabes?

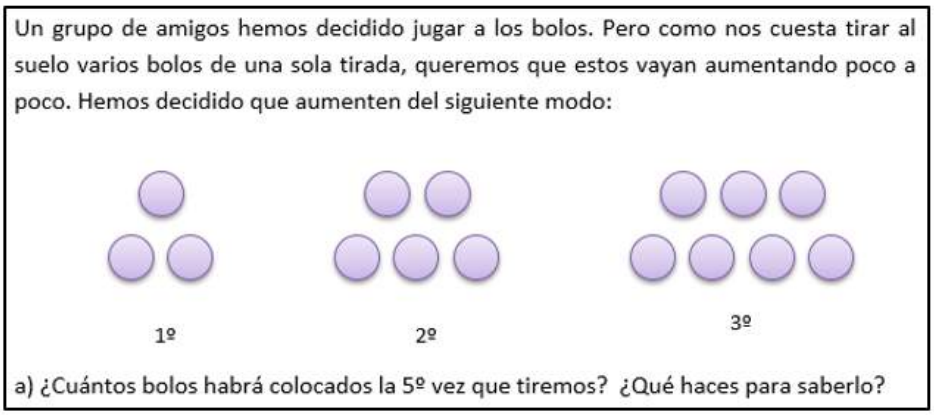
Figura 1

A partir de las estrategias de resolución descritas por García-Cruz y Martinón (1997) y García-Reche, Callejo y Fernández (2015), elaboramos una clasificación de las estrategias de resolución que podían surgir en la aplicación de los problemas de patrones geométricos diseñados. Para ello, diferenciamos entre las estrategias de las cuestiones de relación directa y las estrategias de las cuestiones de relación inversa:

- Estrategias en tareas de relación directa:
  - Según el procedimiento de resolución:
    - Visuales: mediante una descomposición geométrica del patrón.
    - Numéricas: transformando el patrón geométrico en un patrón numérico.
  - Según el procedimiento de cálculo:
    - Recuento: representando el patrón y contando los elementos que lo forman.
    - Recursiva: sumando sucesivamente la diferencia entre términos a un término conocido.
    - Funcional: formulando una expresión general.
    - Proporcional: identificando una proporcionalidad.
- Estrategias en tareas de relación inversa:
  - Ensayo y error con cálculos de relación directa: probando diferentes valores para el término.

- Inversión de las operaciones: aplicando la inversión de las operaciones aritméticas utilizadas en tareas de relación directa.
- Resolución de ecuaciones: planteando una ecuación.

En concreto, en las tareas de relación directa de esta etapa, el estudiante que participó en la investigación utilizó mayoritariamente estrategias visuales (figura 2) y funcionales (figura 3), como las que mostramos a continuación:

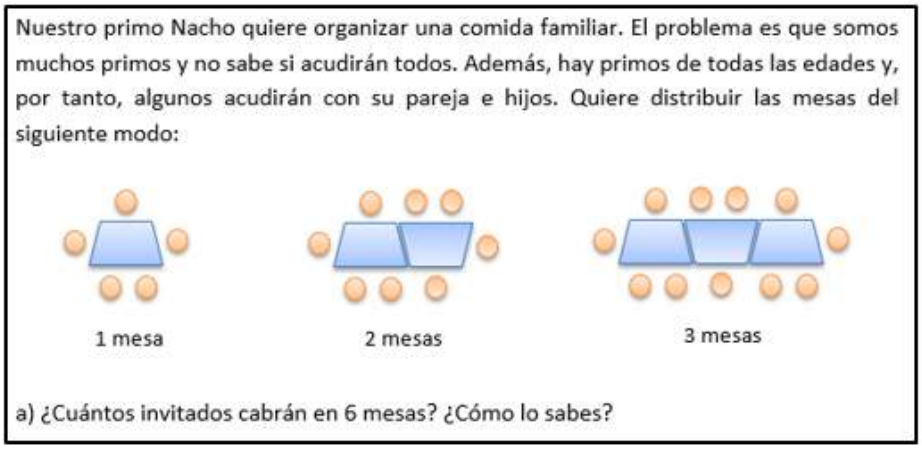


Estudiante: *La respuesta a es 11.*

Investigadora: *¿Por qué 11?*

Estudiante: *He descubierto, como en la otra, que, en la primera, hay una arriba y dos abajo. En la segunda, dos arriba y una más abajo, tres. Después, en la tercera, hay tres arriba y cuatro abajo. En la quinta son cinco arriba y seis abajo.*

Figura 2



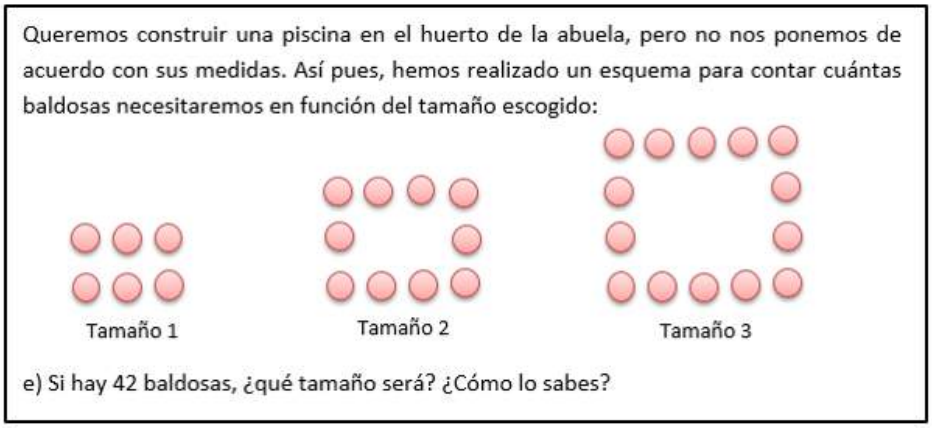
Estudiante: *Haces 3 o el número que sea por 3 y le sumas 2.*

Investigadora: *¡Muy bien! ¿Cómo se te ha ocurrido eso?*

Estudiante: *He hecho, en una mesa, los números de arriba, el 1 y el 2, 1x3=3. Después, en dos mesas, 3 abajo y 3 arriba, 2x3=6 y 3+3=6 y le tenemos que sumar aún estos dos. En las tres mesas, 5+4=9 y 3x3=9.*

Figura 3

En cuanto a las estrategias utilizadas en las tareas de relación inversa de esta etapa, el estudiante empleó una estrategia u otra en función de la expresión general utilizada previamente en las cuestiones de relación directa. Cuando la generalización era del tipo $y = ax \pm b$, usó la inversión de las operaciones (figura 4), invirtiendo, además, las operaciones en el orden correcto. Sin embargo, cuando la generalización era más compleja, como $y = ax + b(x \pm c) \pm d$, no fue capaz de invertir el orden de las operaciones y utilizó estrategias de ensayo y error (figura 5).



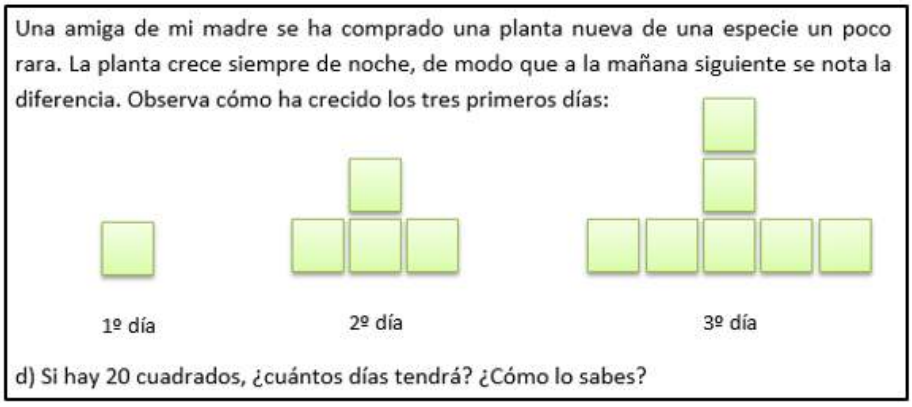
Estudiante: *Del número 10.*

Investigadora: *Muy bien. ¿Cómo lo has hecho?*

Estudiante: *Le he restado 2 a 42, me ha salido 40 y lo he hecho entre 4.*

Investigadora: *Muy bien.*

Figura 4



Estudiante: *Es el séptimo día a medianoche.*

Investigadora: *Vale. ¿Y cómo lo has sacado?*

Estudiante: *Primero he probado con 8 y no me ha dado. Después, he probado con 7 y tampoco me ha dado, me ha dado uno menos. Entonces, tenía que estar entre 7 y 8.*

Figura 5

La segunda etapa tiene como finalidad la introducción de conceptos algebraicos, como el significado de las letras, la transformación de expresiones verbales en

algebraicas y la resolución de ecuaciones lineales con ayuda de un software de balanzas (figura 6), a partir de problemas de patrones geométricos.

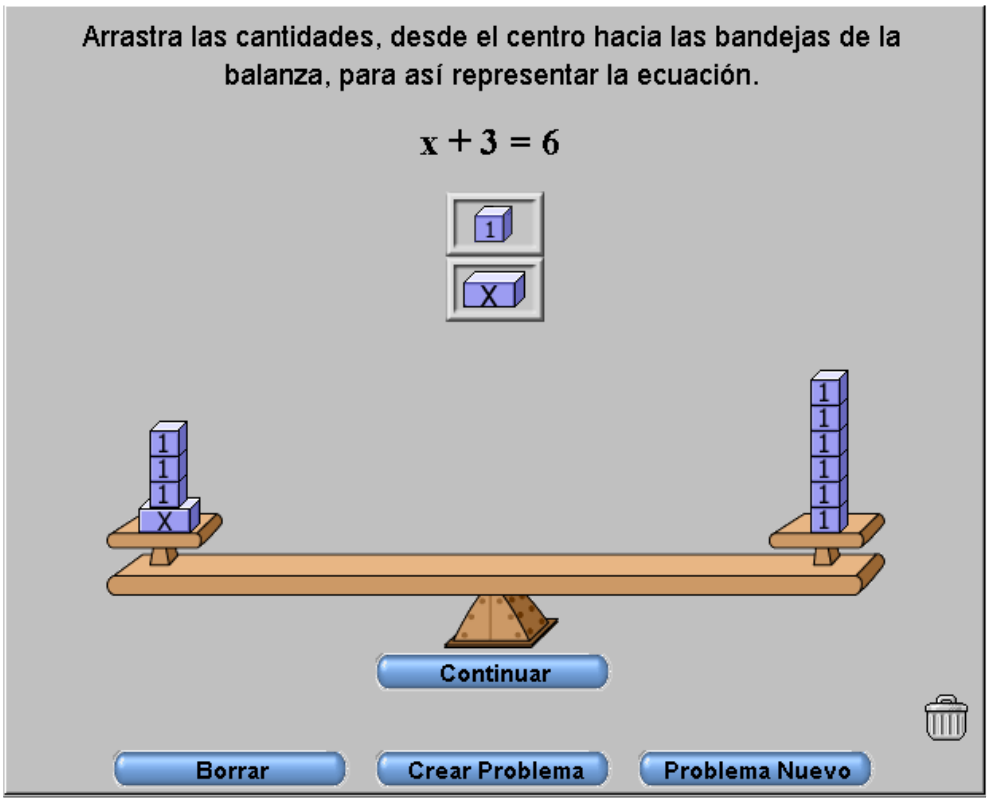


Figura 6

La tercera etapa pretende aplicar los conocimientos adquiridos y, por este motivo, ha sido dividida en dos subetapas: por una parte, una subetapa para la resolución de problemas de patrones geométricos en los que, previamente, el estudiante había presentado dificultades (figura 7), y, por otra parte, una subetapa donde transferir los conocimientos a otros contextos más dispares (figura 8).

Marc y su amigo quieren dibujar una urbanización con palillos. La dibujan del siguiente modo:



1 casa 2 casas 3 casas

a) Escribe la fórmula algebraica que utilizarías para calcular cuántos palillos necesitará en función del número de casas.

b) ¿Crees que podríamos escribir esta fórmula de un modo más simple? Escríbela.

c) Si hay 96 palillos, ¿cuántas casas dibujarán? ¿Cómo lo sabes?

Figura 7

Héctor y María han estado contando en clase cuántos colores de madera tiene cada uno. Héctor tiene el doble de María más 7. Si Héctor tiene 33 colores de madera, ¿cuántos tiene María?

Figura 8

En conclusión, el análisis de la resolución de los problemas presentados y del proceso de aprendizaje seguido por el estudiante en la secuencia descrita ha demostrado que esta secuencia ha permitido al estudiante realizar la transición de la aritmética al álgebra con facilidad a través de los problemas de patrones geométricos y, además, desarrollar las habilidades necesarias para aplicar los conceptos y conocimientos pre-algebraicos adquiridos a otros problemas de ecuaciones en contextos más variados. Asimismo, podemos destacar la introducción del álgebra a través de los problemas de patrones geométricos como un contexto adecuado y pertinente para realizar intervenciones educativas en estudiantes de altas capacidades matemáticas de Educación Primaria, ya que les permite desarrollar habilidades matemáticas como la generalización, la identificación de patrones y relaciones y la flexibilidad en el uso de estrategias.

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Aretxaga, L. (coord.) (2013). *Orientaciones educativas. Alumnado con altas capacidades intelectuales.* Vitoria: Departamento de Educación, Universidades e Investigación del Gobierno Vasco. Recuperado de http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43573/es/contenidos/informacion/dig_publicaciones_innovacion/es_escu_inc/adjuntos/16_inklusibitatea_100/100012c_Pub_EJ_altas_capacidades_c.pdf

Benedicto, C., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 153-162). Alicante: SEIEM.

Cooper, T. J. y Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalize: Models, representations and theory for teaching and learning. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 187-214). Berlín: Springer-Verlag.

García-Cruz, J. A. y Martinón, A. (1997). Actions and invariant schemata in linear generalising problems. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 289-296). Helsinki, Finlandia: PME.

García-Reche, A., Callejo, M. L. y Fernández, C. (2015). La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones lineales. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 279-288). Alicante: SEIEM.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, *BOE núm. 106*, de 4 de mayo de 2006.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa, *BOE núm. 295*, de 10 de diciembre de 2013.

Radford, L. (2011a). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En Ubuz, B. (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 17-24). Ankara, Turquía: PME.

Radford, L. (2011b). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 303-322). Heidelberg, Alemania: Springer.

Rivera, F. D. y Becker, J. S. (2011). Formation of pattern generalization involving linear figural patterns among middle school students: Results of a three-year study. En Cai, J. y Knuth, E. (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 323-366). Berlín: Springer.

Torrego, J. C. (Coord.) (2011). *Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo. Un modelo de respuesta educativa.* Madrid: Fundación SM. Recuperado de http://www.fundacionpryconsa.es/pdf/Altas_capacidades_y_aprendizaje_cooperativo.pdf

APLICACIÓ DE LES MATEMÀTIQUES AL NOSTRE ENTORN
RUTES MATEMÀTIQUES

Òscar Forner Gumbau
oforner@yahoo.es
IES Cap de l'Aljub - Santa Pola
Departament de Matemàtiques de la Universitat d'Alacant - Alacant

Modalitat: Comunicació
Nivell educatiu: Multinivell
Paraules clau: Matemàtiques, entorn, rutes, carrer i realitat

RESUM

Les Matemàtiques estan presents en molts aspectes fonamentals de la vida quotidiana. Una manera de mostrar la presència de les Matemàtiques al nostre entorn és la utilització de les Rutes Matemàtiques, les quals són una manera molt útil d'aplicar els coneixements matemàtics adquirits a l'aula a un entorn real. Amb aquestes, els alumnes veuen les Matemàtiques des d'un altre punt de vista més pràctic i a la vegada lúdic.

Les rutes es poden fer per a tot tipus de nivells de coneixements, des d'alumnes d'infantil a alumnes universitaris, encara que la utilització més habitual d'aquestes rutes és per a alumnes de Primària i Secundària. Evidentment, aquestes rutes es poden adaptar també als coneixements d'un públic general (no estudiants).

0. INTRODUCCIÓ

Al llarg de la vida dels estudiants l'assignatura de Matemàtiques està present, com a mínim, en tots els cursos d'ensenyament obligatori i malgrat que açò molts dels nostres alumnes no s'adonen de les matemàtiques que utilitzen de manera habitual en la seua vida quotidiana, ni s'adonen de les matemàtiques que hi ha al seu entorn. Amb les Rutes matemàtiques el que es pretén és que els alumnes vegen la presència i la importància de les matemàtiques en el nostre entorn.

En aquest treball es mostraran diferents activitats a fer en una Ruta Matemàtica i veurem com adaptar aquestes activitats als diversos nivells de coneixements dels alumnes de distints nivells educatius, veien dins de cada nivell diferents graus de dificultat.

Es presentaran també activitats utilitzades a les "Proves de carrer" de les Olimpíades Matemàtiques de Secundària com una manera d'aplicar els coneixements matemàtics dels alumnes a un context real.

1. QUE ÉS UNA RUTA MATEMÀTICA?

Podem dir que una Ruta matemàtica és un recorregut pel nostre entorn amb la intenció de veure i apreciar les matemàtiques que són presents a tot arreu.

Les matemàtiques estan presents a la Natura,



Hexàgons naturals



Feix de rectes

a la ciutat,



Triangles a l'infinit

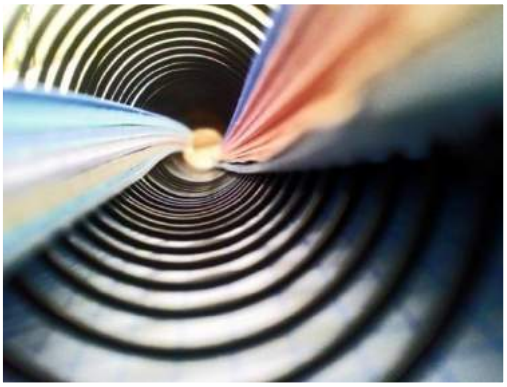


Incògnita

a casa nostra,



Segueix la sèrie



Espiral indefinida

i a tot arreu ...

2. MIRAR AMB "ULLS MATEMÀTICS"

Per apreciar les matemàtiques que ens envolten cal mirar amb "ulls matemàtics".

Que vol dir açò? Vol dir que a l'hora de veure el nostre entorn ens fixem amb els detalls i amb les característiques d'allò que ens envolta des d'un punt de vista matemàtic.

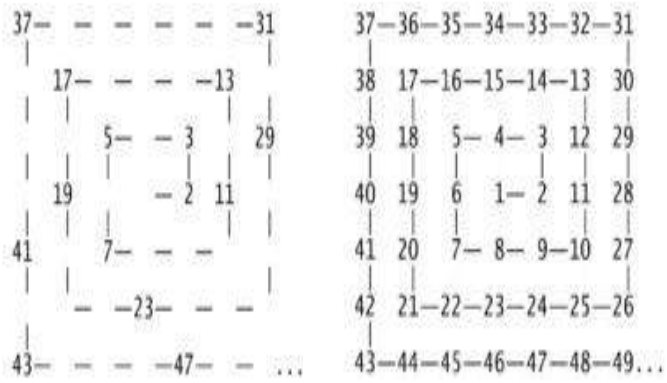
Per exemple, en aquestes dues fotografies, quins conceptes matemàtics podem apreciar?





A primer cop d'ull, només veiem una porta d'entrada a un edifici i el buit d'una escala, però si ho mirem amb "ulls matemàtics" podem apreciar les següents coses:

- Primera foto: 3 plans que es tallen en un punt, 3 plans coincidents, 3 plans paral·lels, 2 plans coincidents i altre paral·lel a ambdós, 2 plans coincidents i altre secant a ambdós, 2 plans paral·lels i altre secant a ambdós, 3 plans paral·lels dos a dos, 3 plans secants en una recta i també podem veure les posicions relatives de 2 rectes a l'espai (2 rectes coincidents, 2 rectes paral·leles, 2 rectes secants i 2 rectes que es creuen).

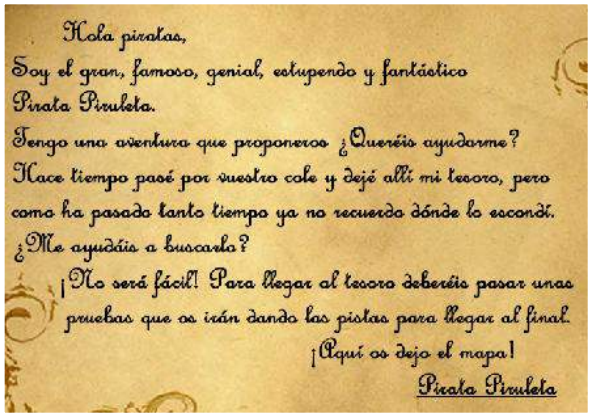


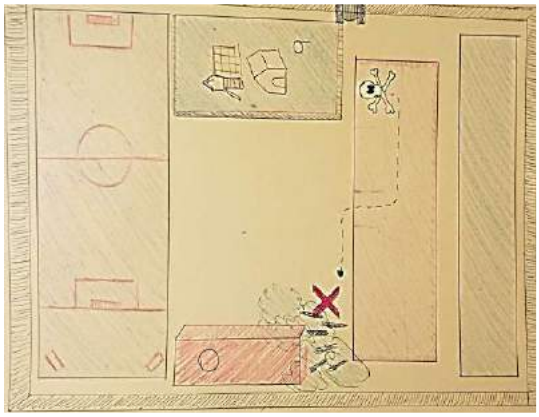
- Segona foto: ens pot recordar a l'Espiral quadrada d'Ulam. L'espiral d'Ulam, descrita pel matemàtic polonés-nord-americà Stanislaw Marcin Ulam (1909-1984), és una forma de representació gràfica de nombres primers que mostra un patró.

Una vegada mirem amb "ulls matemàtics" podem començar les activitats.

3. Nivell Infantil

Al nivell educatiu d'Infantil també podem fer Rutes matemàtiques, evidentment, adaptant els conceptes matemàtics que anem a veure al seu nivell i estructurant la Ruta de manera adequada a la seua edat. Les activitats que veiem a continuació s'han desenvolupat amb alumnes de 3r curs d'educació Infantil (5 anys), per la qual cosa les activitats les va llegint la mestra i s'introdueixen com un joc, en aquest cas "buscar un tresor". En les diferents activitats els alumnes deuen trobar les 4 peces del trencaclosques per a formar la fotografia que mostra el lloc on està el tresor.


Hola piratas,
Soy el gran, famoso, genial, estupendo y fantástico
Pirata Piruleta.
Tengo una aventura que proponeros ¿Queréis ayudarme?
Hace tiempo pasé por vuestro cole y dejé allí mi tesoro, pero como ha pasado tanto tiempo ya no recuerdo dónde lo escondí.
¿Me ayudáis a buscarlo?
¡No será fácil! Para llegar al tesoro deberéis pasar unas pruebas que os irán dando las pistas para llegar al final.
¡Aquí os dejo el mapa!
Pirata Piruleta



EL ÁRBOL DEL PIRATA.

La X del mapa nos señala que la actividad se realiza en una zona del patio donde hay una pequeña pinada.



Actividad 1 ¿Cuántos hay?

Se pide a los alumnos que observen la zona y contesten a las preguntas de la maestra.

-Contamos los árboles de la pinada. (9)
-Contamos los bancos. (3)
-Contamos las fuentes. (2)
-¿Hay más árboles o bancos?
-¿Hay más bancos o fuentes?
-¿Qué hay menos bancos o árboles?
-¿Qué hay menos fuentes o árboles?

Al final de la actividad los alumnos encuentran la pista que les indica la siguiente zona del mapa:

Pista 1

Si la tarea habéis podido acabar esta pregunta podréis contestar:
¿Cuántos árboles hay en la pinada?
Buscad en el mapa el lugar que esté marcado con ese número e id corriendo a la siguiente actividad.
Y aquí tenéis la primera pieza del tesoro.



Deben buscar en el mapa la zona 9, (El patio de infantil)

Aquesta que hem vist és la primera activitat de la Ruta i ens dóna una idea de com treballar els conceptes matemàtics que aprenen a classe en el seu entorn.

4. NIVELL PRIMÀRIA

A Primària anem a veure activitats fetes en Rutes a 1r curs i a 3r curs.

En 1r curs de Primària podem utilitzar les Rutes, per exemple, per a treballar els conceptes de mesura (diferents maneres de mesurar i diferents útils per a fer-ho) mitjançant les nostres mans, comptant els passos, utilitzant el metre ... i reconéixer figures geomètriques que hi ha al nostre entorn i que ells han aprés a classe.

1) Vamos a mirar el suelo.



- ¿De qué forma son las baldosas?

- Mide el largo y el ancho de una de ellas.

Ancha	centímetros
Larga	centímetros

- ¿Miden lo mismo?
- ¿Por qué?

9) Podemos encontrar varios bancos.



- ¿Cuántas palmas mide el banco de **largo**?

El banco mide palmas.



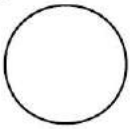
- Mide el ancho y el largo de una de las maderas con el metro.



11) En la entrada del parking hay varias señales de trafico.



- ¿Qué forma tienen? _____
- ¿Es un polígono? _____
- Dibuja la señal que mas te gusta.



12) Mira la barandilla del parking.



- Colorea las formas que encuentres en la barandilla.



15) Encuentra este balancín en el parque.

- **Tacha** las figuras que encuentres en él.



círculo	triángulo	línea curva cerrada	
cuadrado	corazón	rectángulo	
línea curva abierta		estrella	rombo

En 3r curs de Primària podem treballar amb les Rutes, per exemple, els següents conceptes: treballar les operacions bàsiques (suma, resta i multiplicació en aquest cas), estratègies de comptar, coordenades, com mesurar distàncies grans, fer estimacions ...

QUI ÉS ENRIC VALOR

El nom del nostre col·legi és Enric Valor, però saps qui és?
Enric Valor va ser un dels més importants escriptors en valencià i un gran defensor de la cultura valenciana. Ara ens trobem davant de l'Auca d'Enric Valor i mirant i llegint el que fica ací contesteu a aquestes preguntes:



- L'auca d'Enric Valor té forma de _____
- Quantes vinyetes té? _____
- Si Enric Valor va morir l'any 2000, quants anys tenia quan va morir? _____
- Si no haguera mort encara, quants anys tindria ara? _____

QUE BARBARITAT!!! QUANTS RECTANGLES HI HA!!!

Si mirem la finestra que hi ha on està la fotocopiadora veurem que té forma de rectangle, però quants rectangles veus en aquesta finestra? (Recorda combinar totes les possibilitats diferents unint diversos rectangles) _____





Sabries dir quants taulells t'has hagut de moure, a partir d'on estàs, cap a la dreta i cap amunt per dibuixar els cons.

Con 1 ⟶ Nombre taulells cap a la dreta _____

Nombre taulells cap amunt _____

MARE MEUA QUINA CINTA MÉS LLARGA

Amb l'ajuda de la cinta mètrica que portes mesura, amb metres i centímetres, el perímetre (distància que hi ha al seu voltant) que té el gimnàs.



El gimnàs té un perímetre de _____ metres i _____ centímetres.

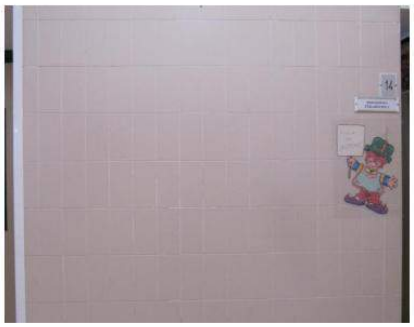
En les pistes ens trobem també amb porteries de futbol, cistelles de bàsquet i fanals.



Pots mesurar l'altura de les tres coses? ____
Si en alguna de les tres coses no pots mesurar la seua altura exacta, fes una estimació, és a dir, escriu de manera aproximada quina altura té (a ull).

ÚLTIMA PARADA

Per últim, anem a comptar quantes rajoletes hi ha entre l'aula 14 i l'aula 15, però estem ja molt cansats, així que pensa de manera ràpida com comptar les rajoletes fent només una operació matemàtica el nombre de rajoletes que hi ha.



Quina operació farem? _____
Fes-la:

Hi ha _____ rajoletes.

5. NIVELL SECUNDÀRIA I BATXILLERAT

En secundària es mostren diferents activitats per blocs de continguts. Encara que el més evident per a treballar en una Ruta són els conceptes de Geometria, també podem fer activitats d'altres blocs com veurem tot seguit.

1) Geometria

- **Rampa**



Estamos en la salida al patio de pistas. Fijaos que hay una rampa de bajada al patio, situaos mirándola de frente. ¿Qué figura forma? _____

Medid con el semicírculo graduado cuántos grados forma la pendiente: ___. Imaginad que el ángulo fuese más pequeño, ¿cómo sería la bajada, más corta o más larga?_____

¿Y si fuese mayor? _____¿Por qué no tendrá un ángulo de 50°, 60° o 70°, si se habría ahorrado muchos ladrillos y cemento en su construcción?

Tomad medidas para comprobar en clase que se cumple el Teorema de Pitágoras.
Recuerda $h^2 = C^2 + c^2$

9. Circumferències

Observa la següent clagueveram:



a) Quantes circumferències veus?

b) Amb una corda mesura la circumferència i el radi de totes i completa la següent taula.

Longitud de la circumferència	Longitud del radi	Divisió

c) Cerca més circumferències i completa la taula. Què observes?

SIMETRIES

La roda de la primera foto presenta una simetria dièdrica (té diferents eixos de simetria). En canvi, la roda de la segona foto presenta una simetria cíclica (no té eixos de de simetria). Veus la diferència?





VOLUMS PÚBLICS

De vegades ens trobem amb objectes quotidians formats per una sola figura geomètrica (la paperera) o per diverses (la font).







Troba les mesures que falten en els dibuixos per tal de calcular el volum de la paperera i de la font (hauràs de tindre en compte que per a calcular el volum de la font cal partir-la amb diferents trossos).

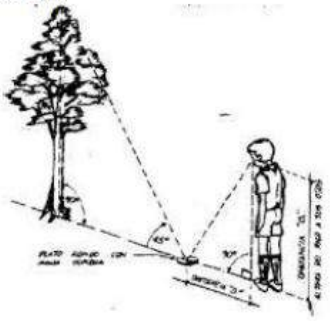


Quan apleguem a la PlaÇa d'Armes, ens trobem amb l'edifici del Cos de Guàrdia. En aquest edifici ens trobem amb un túnel al final del qual hi ha dos portes tancades.

Calculeu el volum d'aquest túnel.

Por fin hemos llegado a la casa del cable. Tengo mucho interés por conocer el peso de las columnas. Para poder calcularlo primero con un espejo y técnicas de triángulos semejantes calculamos la altura.





Segundo, medimos el contorno de la columna para conocer el radio de la misma. Con estos dos datos podemos calcular sin problemas el volumen de la columna. Pero, para calcular el peso necesitamos la densidad. La densidad aparente de la piedra Tosca de Xàbia es Dap= 1.82 g/cc. Manos a la obra, no es una tarea fácil.



La porta d'entrada al Palau-Castell té un arc de mig punt,

***Quin és el radi d'aquest arc?**

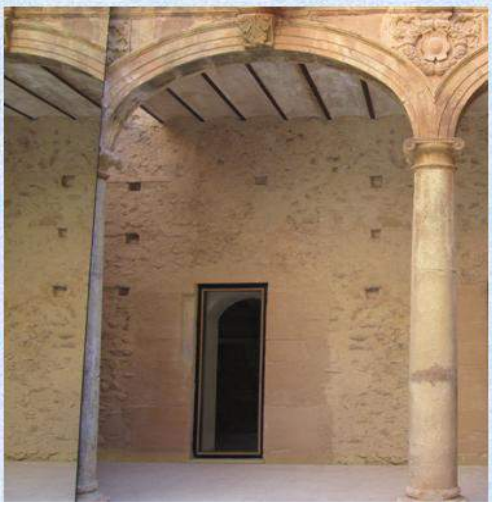
***Quina és la longitud de la seua semicircumferència?**

***Quina és l'àrea de la superfície abastada per la seua semicircumferència?**



L'arc apuntat, també anomenat ogival, està composat de dos trams d'arc formant un angle central. Aquest tipus d'arc resulta més eficaç que l'arc de mig punt, degut a que la seua verticalitat fa que les pressions laterals siguen menors i, per tant, poden salvar majors espais.

Recolzant-te en la semblança de triangles comprova si el vèrtex de l'angle central i els dos punts de recolzament de l'arc apuntat formen un triangle equilàter.



En el claustre renaixentista del Palau-Castell n'hi ha un espill.

Indaga quina és la funció d'aquest espill col·locat al restaurar el claustre.

Els arcs que envolten el claustre, són de mig punt? Raona la resposta.

2) Nombres



Troba en la plaça Tirant lo Blanc aquest tros del paviment i calcula el nombre total de quadrats que veieu.







Les cases del poble estan numerades , fixa't amb aquestos nombres mentre anem fent la ruta pels carrers de Benissa

Què pots dir si mires a dreta o esquerre del carrer?

Els nombres formen una progressió? De quin tipus?



Ens trobem a una de les presons que hi ha al castell. Dins hi ha uns panells informatius de la història del castell. Anem a buscar nombres amb diferents propietats que apareixen als cartells. Trobeu:
- **Tots els nombres primers que hi ha (si hi ha algú)**
- **Un nombre que siga quadrat perfecte (si hi ha algú)**
- **Un nombre que siga un cub perfecte (si hi ha algú)**

Parlant de nombres, estem en l'any 2016, ens podríeu dir els nombres primers, anterior i posterior, a aquest nombre?

3) Estadística i Probabilitat

a) Ompliu la taula següent del color dels cotxes de l' aparcament(agafeu una mostra de 30 cotxes).



Colors	Roig	Blanc	Verd	Blau	Negre	Gris

b) Busqueu la freqüència absoluta i la moda dels colors dels cotxes de la taula anterior:

Color	f_i
Roig	
Blanc	
Verd	
Blau	
Negre	
Gris	
	$\sum f_i$ =

moda (color que té més freqüència)=



Un poc més endavant ens trobem amb l'Hort de Baix, dins del qual ens trobem amb unes figures que s'assemblen a unes escates de peix i un cercle. Si llancem una pedra molt xicoteta damunt de les escates i el cercle, quina és la probabilitat que caiga en un lloc de color blanc? (la pedra és tan xicoteta que no cap la possibilitat que caiga en dos colors diferents a la vegada)

4) Funcions

SITUANT ELS JOCS

Situa els jocs tu en les dues trames i dóna les seues coordenades. Fixa't en cada una de les trames on està situat l'origen de coordenades perquè això farà que les coordenades no seran les mateixes en una trama i en l'altra.



SALÓN DE ACTOS

Numerando las filas y las columnas de una mitad de las butacas empezando en la parte del escenario, vais a colocar vuestras mochilas en las siguientes posiciones: (7,5), (12,3) y (4,8) teniendo en cuenta que el primer número se refiere a la fila y el segundo a la columna. Estos pares de números serían las coordenadas en las que encuentran las mochilas. Vamos a cambiar de posición, poneos en el pasillo central, ¿Qué coordenadas ocupan ahora las mochilas? (__,__), (__,__) y (__,__). Cambiemos otra vez, ahora nos situamos al fondo del salón, ¿cuáles son las nuevas coordenadas? (__,__), (__,__) y (__,__).





Veus les paraboles de la font?
On hi són?

Veus altres formes còniques a la font?
Quines?

I als fanals?

Com hem pogut observar en algunes activitats que hem vist anteriorment, les Rutes també ens serveixen per a poder ensenyar i explicar qui són determinats personatges importants del lloc on estem (Enric Valor, Tirant lo Blanc ...), conéixer la història dels llocs on estem (Palau Castell de Betxí, Castell de Santa Barbara d'Alacant ...) ...

6. NIVELL UNIVERSITAT

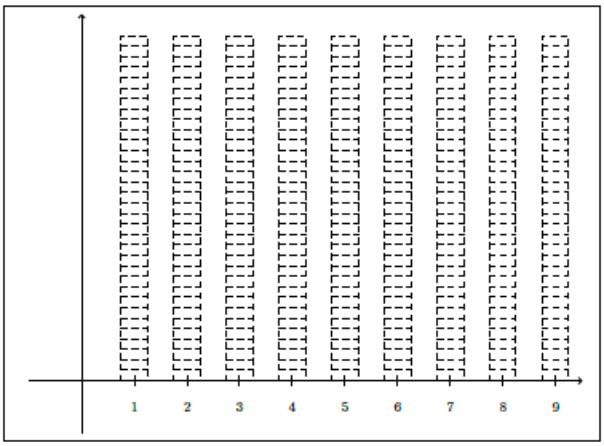
Encara que menys habituals, també ens podem trobar amb Rutes fetes per a alumnes universitaris, els quals també poden veure d'aquesta manera de primera mà l'aplicació dels nous conceptes que estan veient. Algunes activitats d'aquest nivell són les següents:

La Ley de Benford

Una sorprendente teoría matemática llamada Ley de Benford predice que en un conjunto de números (con unas características determinadas), aquellos cuyo primer dígito es, por ejemplo, 1 no aparecen con la misma frecuencia que los números que empiezan por otros dígitos. De hecho, las frecuencias van disminuyendo conforme aumenta el primer dígito.

Actividad 2: Los datos

(3p) Para comenzar a comprender la Ley de Benford, necesitamos datos. Ve al párking y marca en negro una celda por cada primer dígito de las matrículas de, al menos, 100 coches sobre el valor correspondiente del eje de abcisas. De esta forma, construirás el **diagrama de barras** correspondiente a los primeros dígitos de las matrículas.





Estación Análisis Matemático

El Análisis Matemático es la rama de las matemáticas que se dedica al estudio de los números reales y complejos, así como todas las estructuras que se derivan. También constituye objeto de estudio las funciones entre éstos conjuntos de números y las estructuras derivadas. El Análisis Matemático surge como consecuencia de formulación rigurosa del cálculo. Algunos de los conceptos que se estudian son la continuidad, la integración y la diferenciabilidad.

La curva Catenaria

La Catenaria o curva funicular, tiene la forma de una cadena absolutamente flexible suspendida por sus extremos cuando se somete a la acción cuando se somete a la acción de la gravedad. O lo que es lo mismo, cuando un cable o cadena es suspendido por sus extremos y sometido a una fuerza gravitacional uniforme, adquiere por su propio peso la forma de una catenaria.

Actividad I: Descubriendo la función cosh x

(1p) Ya hemos dado la ecuación explícita de la curva catenaria, pero podemos transformar esta expresión usando únicamente exponenciales. Sabiendo que el

$$coshx = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

escribe la ecuación de la curva catenaria usando sólo funciones exponenciales.

Com hem vist al llarg del treball, les Rutes matemàtiques poden ser de molta ajuda per al professorat a l'hora de fer veure als alumnes l'aplicabilitat dels coneixements matemàtics que aprenen a l'aula i veure a la vegada les matemàtiques que ens envolten. Per a fer açò només necessitem mirar al nostre entorn amb "ulls matemàtics"

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Aliaga, R.; Alias, V.; Bolea, J.A.; Caballero, S.; Mora, J.A.; Peretó, C. (2002). *Rutes matemàtiques a Alacant*. SEMCV Al-Khwarizmi. Alacant.

Arenas, F.; Carbonell, C.; Carbonell, E.; Forner, O. (2008). *Ruta matemàtica a Mutxamel*. IES L'Allusser. Mutxamel.

Corbalán, F. (2007). Rutas matemáticas por nuestra localidad. *Sigma*, n. 30, pp. 105-116.

Forner, M.; Forner, O. (2015). *Ruta matemàtica al Palau de Betxí*. Ajuntament de Betxí. Betxí.

Forner, O.; Garcia, M.; Soriano, R. (2015). *Ruta matemàtica al CEIP Enric Valor*. CEIP Enric Valor. Alacant.

Gonzalez, S. (2016). *Ruta matemàtica al CEIP Juan Carlos I*. CEIP Juan Carlos I. Formentera del Segura.

Guillén, M.; Molina, M.; Mulero, J.; Segura, L.; Sepulcre, J.M. (2015). Una visión matemática del campus de la Universidad de Alicante. *XIII Jornades de Xarxes d'investigació en docència universitària. Noves estratègies organitzatives i metodològiques en la formació universitària per a respondre a la necessitat d'adaptació i canvi*. Universitat d'Alacant. pp. 269-281.

Monzó, O.; Puig, L.; Queralt, T. (2003). *Rutes matemàtiques a València*. SEMCV Al-Khwarizmi, Universitat de València. València.

Ñeco, B.A. (2014). *Ruta matemàtica al CEIP Francesc Cantó*. CEIP Francesc Cantó. Elx.

TALLERS

CONSTRUCCIÓ DE L'APPLET "EXPERIMENTANT AMB QUADRILÀTERS I EL TEOREMA DE PICK"

Juan Manuel Couchoud Pérez
juan.manuel.couchoud@gmail.com
IES Vall de la Safor - Villalonga

Modalitat: Taller
Nivell educatiu: Primària i Secundària
Paraules clau: GeoGebra, Geometria, quadrilàters, teorema de Pick

RESUM

Aquest taller presenta l'applet de GeoGebra anomenat "Experimentant amb quadrilàters i el teorema de Pick" (Couchoud 2016). S'ha treballat en la optativa instrumental de matemàtiques de 1r d'ESO amb alumnat amb baixes competències matemàtiques. Permet realitzar activitats molt variades amb quadrilàters, des de l'estudi dels noms, anàlisi de les propietats, fins l'estudi de les àrees amb el teorema de Pick. Distingeix els quadrilàters simples de la resta de quadrilàters per evitar confusions a l'alumnat. Els colors són una eina important per a la identificació de les propietats: costats iguals, angles iguals, diagonals iguals. En el taller s'ensenyaran les estratègies principals de la construcció, molt interessants per l'aplicació en altres construccions amb GeoGebra.

Els quadrilàters són una de les famílies poligonals més utilitzades en la societat tant en les expressions tecnològiques com artístiques i formen part dels continguts curriculars de primària i secundària.

Les múltiples possibilitats de treball que permet aquest *applet* fan que connecte directament amb moltes competències (Ministeri d'Educació, Cultura i Esport. MECE, 2015). Amb l'ús de quadrilàters la competència matemàtica que destaca és la geomètrica; amb el càlcul d'àrees la competència aritmètica; amb el programa GeoGebra la competència digital; amb el treball en equip es desenvolupen la competència lingüística, la social i el sentit de la iniciativa; la curiositat i la necessitat de participar en un entorn reduït milloren molt la competència d'aprendre a aprendre.

L'applet (Couchoud 2016) us presenta un quadrilàter que podeu controlar-lo arrossegant els vèrtexs amb el ratolí, podeu centrar-lo amb el botó de la pantalla "Centra", augmentar i reduir la grandària dels polígons amb els botons "+" i "-". Els vèrtexs solament poden viatjar pels encreuats de la graella per a facilitar la construcció dels quadrilàters, l'aplicació del teorema de Pick i sobre tot facilitar el dibuix en els fulls quadriculats. Quan el quadrilàter no és simple es torna de color negre.

Les caselles de control són les responsables d'adaptar l'applet a l'activitat desenvolupada, per a minimitzar els elements visibles. La casella de control "Nom" permet ocultar i visualitzar el nom i la concavitat o convexitat del quadrilàter. La casella de control "Teorema de Pick" permet ocultar el punts interiors i de la vora del quadrilàter junt a la fórmula, els vèrtexs sempre són visibles. La casella de control "Àrea" permet ocultar i visualitzar l'àrea. La casella de control "Angles"

permet ocultar i visualitzar els angles interiors. La casella de control "Diagonals" permet ocultar i visualitzar les diagonals.

Els colors són una part importantíssima en l'anàlisi de les propietats dels quadrilàters. Els costats del mateix color tenen la mateixa longitud, els angles del mateix color són iguals, les diagonals del mateix color són de la mateixa longitud, les diagonals perpendiculars són més gruixudes i els punts d'encreuament de la graella, interiors al polígon són d'un color i els de la vora del mateix color que els vèrtexs.

L'*applet* és essencialment interactiu, permet treballar amb un gran grup i solament un ordinador connectat a un projector o en petits grups i un ordinador per equip, l'alumnat treballa les activitats amb folis quadriculats amb quadrats d'un centímetre, els quadrats més petits generen dificultats importants amb l'alumnat amb baixes competències geomètriques. Els tipus d'activitats són molt variades:

1. Troba i dibuixa en el full tres polígons convexos i tres còncaus.

   Activa solament la casella de control "Nom".

2. Representa quadrilàters còncaus i convexos per trobar la característica que els distingeix.

   Activa solament les caselles de control "Nom" i "Angles"

3. Troba quadrilàters de nom diferent, dibuixa un de cada. Quantes classes de quadrilàters hi ha?

   Activa solament la casella de control "Nom".

4. Ara que ja recordes totes les classes de quadrilàters, identifica la família dels paral·lelograms, els que tenen dues parelles de costats paral·lels.

   Activa solament la casella de control "Nom".

5. Investiga quins quadrilàters tenen sempre les diagonals perpendiculars.

   Activa solament les caselles de control "Nom" i "Diagonals"

6. Representa i dibuixa quadrilàters diferents, però petits i calcula l'àrea amb el teorema de Pick. Verifica que el resultat és idèntic al de la pantalla.

   Activa solament les caselles de control "Teorema de Pick" i "Àrea"

7. També es poden intercalar activitats orals en forma de joc, sense paper, molt adequades per l'alumnat amb dificultats en competències lingüístiques.
8. El professor representa un quadrilàter i l'alumnat identifica el nom i les propietats.

   Activa solament les caselles de control "Angles" i "Diagonals"

La construcció de l'*applet* té moltes parts interessants que poden ser aplicades en la construcció d'altres documents de GeoGebra, es proporcionarà als assistents un manual complet, i en el taller es desenvoluparan unes poques parts per facilitar l'autonomia necessària per a que el professorat interessat puga reconstruir l'applet o reutilitzar les seues part en altres. Podem destacar la manipulació d'objectes geomètrics en una graella, la identificació del nom d'objectes geomètrics amb unes poques propietats, la visualització d'angles interns independentment de la situació

dels vèrtex, la representació dels punts del teorema de Pick mitjançant llistes, el control de visualització d'objectes i també el control de colors dinàmics amb JavaScript.

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Couchoud, J. M. (2016). *Quadrilàters i el teorema de Pick*. Recuperat de https://www.geogebra.org/m/pdW4wQCj

IGI (2016a). *GeoGebra 5.0 Manual*. International GeoGebra Institute. Recuperat de https://www.geogebra.org/manual/en/Manual

IGI (2016b). *Manual de GeoGebra 5.0*. International GeoGebra Institute. Recuperat de https://www.geogebra.org/manual/es/Manual

IGI (2016c). *Reference: JavaScript*. International GeoGebra Institute. Recuperat de https://www.geogebra.org/manual/en/Reference:JavaScript

IGI (2016d), *Referencia: JavaScript*. International GeoGebra Institute. Recuperat de https://www.geogebra.org/manual/es/Referencia:JavaScript

MECE (2015). Ordre ECD/65/2015, de 21 de gener, per la qual es descriuen les relacions entre les competències, els continguts i els criteris d'avaluació de l'educació primària, l'educació secundària obligatòria i el batxillerat. BOE, suplement en llengua catalana al núm. 25, secc. I, pàg. 1.

Motormuis (2014). *Formule van Georg Pick*. Recuperat de https://www.geogebra.org/m/DdUgCYn6

GEOGEBRA: ARTS AND MATHS

David Bataller Soler
btller@gmail.com
IES Altaia - Altea

Modalitat: Taller
Nivell educatiu: Secundària.
Paraules clau: GeoGebra, Geometria, Art Cinètic, Autoaprenentatge, Raonament

RESUM

En aquesta comunicació tractaré de posar en valor els Instruments de Matemàtica Gràfica (compassos, el·lipsògrafs, plantilles de corbes, regles etc.) com a peces claus per a la construcció del raonament geomètric en alumnes de l'escola secundària. Al temps, GeoGebra pot aportar (o no) unes noves vies d'aprofundiment en aquesta autoconstrucció del raonament.

En la intervenció mostraré com utilitze el compàs en les meues classes de plàstica per a que els alumnes aprenguen d'una manera autodidacta les transformacions geomètriques bàsiques. L'ús de l'instrumental clàssic permet donar-li materialitat als coneixements adquirits mentre que amb el GeoGebra queden, sovint, desvaloritzats per la seua falta de suport físic. Analitzarem les diferències de suport i buscarem com podem aconseguir crear objectes de GeoGebra amb un valor afegit.

En la intervenció es mostra com és d'important l'aprenentatge de l'ús dels instruments manuals de dibuix per a un bon desenvolupament del raonament geomètric en alumnes d'escola secundària. Els instruments clàssics de dibuix (compàs, regles, escaires i cartabons i plantilles de corbes) han estat desplaçats en l'actualitat per els nous dispositius digitals que fan funcions semblants però que eliminen molts aprenentatges fonamentals per al desenvolupament de la visualització de la forma plàstica i el consegüent desenvolupament del raonament geomètric.

En la primera part es mostren treballs de primer d'ESO (LOE) de la matèria d'EPV. Cal destacar que EPV desapareix de primer en la LOMQE i passa a segon convertida en EPVA amb una hora menys de docència setmanal. Els treballs que es mostren són les clàssiques composicions basades en el rigor geomètric amb simetries, mòduls, repeticions, etc dissenyades amb els traçats fonamentals de la mediatriu, bisectriu, paral·leles, etc. Estos treballs fan èmfasi en l'anàlisi de la forma d'una manera operativa, ja que el control visual permet als alumnes una millor perspectiva creativa.



Treball realitzat per un alumne de l'IES Malladeta[1]

A continuació es planteja l'interés que podria tenir el fet de realitzar dissenys amb altres instruments que vagen més enllà dels clàssics regla i compàs. Els aparells de dibuix automàtic "drawing machines" ens ofereixen una suggeridora imatge que pot motivar els alumnes i pot fer-los relacionar el moviment amb relacions matemàtiques més complexes.



La màquina de Joe Freedman ens ofereix una interessant idea sobre com convertir el moviment en imatges expressives.

Com que a l'institut resulta molt complex reproduir la màquina en podem fer una simulació virtual amb GeoGebra.

---

1 https://get.google.com/albumarchive/110625237255238858731/album/AF1QipNUFr6JqQVKL4C-wZWkOyED_1E1TnmC5iCBWoOJ

https://www.geogebra.org/m/ZxVhf7qr#material/BMYdgK7t

La versatilitat de GeoGebra a l'hora de treballar permet donar noves opcions, per exemple podem fer que la traça no només provinga d'un punt si no d'una recta o fins i tot un pla.

https://www.geogebra.org/m/ZxVhf7qr#chapter/133655

Amb això podem motivar els alumnes per a que juguen amb els elements geomètrics per crear obres d'art cinètic. La llibertat de moviment, de color i de forma donaran un impuls a l'instint creatiu que obtindrà a canvi un maneig especialment hàbil dels elements geomètrics: punts, rectes, arcs i segments, corbes còniques, etc. i les relacions entre ells: pertinença, perpendicularitat, etc.

Amb el temps, el control dels elements i de les relacions contribuiran a millorar la percepció visual i el raonament geomètric dels alumnes d'educació secundària.

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Studio, Musigfi (2014). *Drawing Circle Images: How to Draw Artistic Symmetrical Images with a Ruler and Compass.* Deltaspektri

Mariotti, M. A. . *Images and concepts in geometrical reasoning. Exploiting mental imagery with computers in mathematics education*

Aston, Anthony. (1999) *Harmonograph: A Visual Guide to the Mathematics of Music*

UN MÓN PLE DE SIMETIES O ... NO TANTES

Lluís Bonet Juan
lluis@iesmarenostrum.com
IES Mare Nostrum - Alacant

Modalitat: Taller
Nivell educatiu: Secundària
Paraules clau: Transformacions geomètriques, ús de les TIC's, creativitat, matemàtiques i fotografies

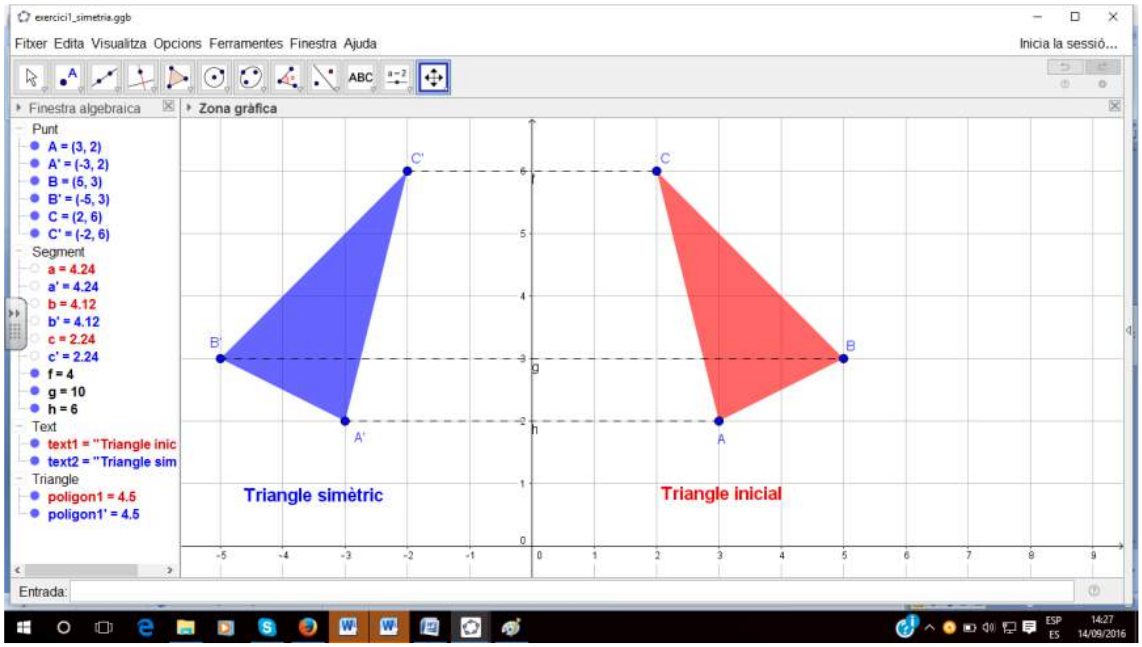
RESUM

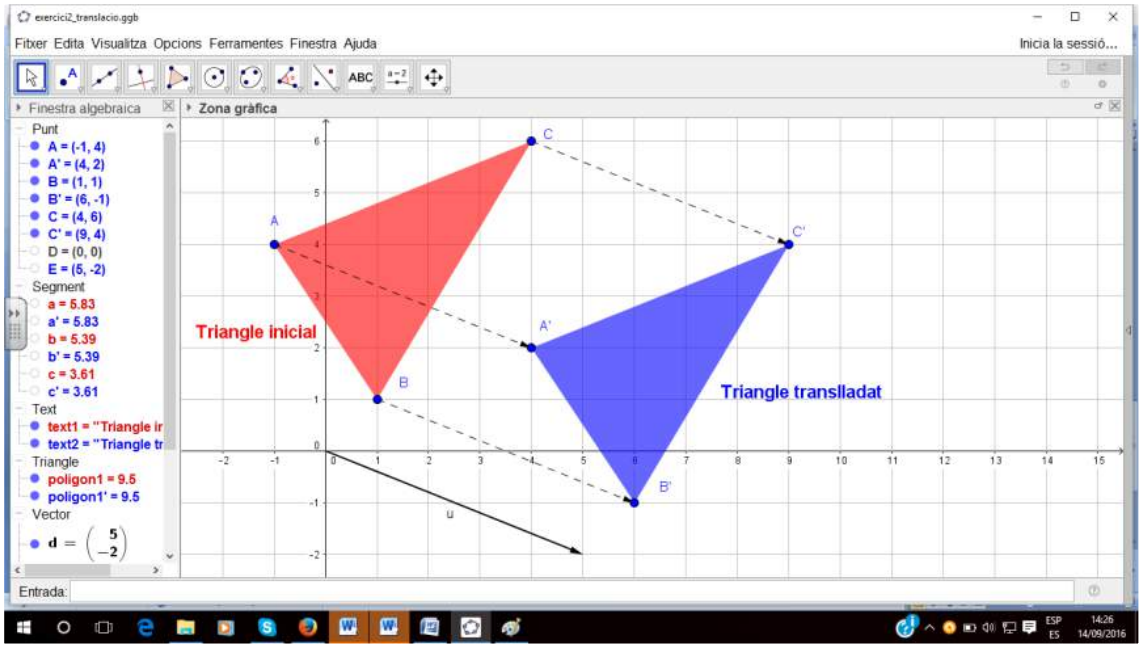
Amb aquesta proposta didàctica pretenc dissenyar un escenari d'aprenentatge diferent que fora motivador i basat en l'ús d'eines relacionades amb les TIC's (en aquest cas Geogebra) que sempre resulten més atractives i d'interès per a l'alumnat.

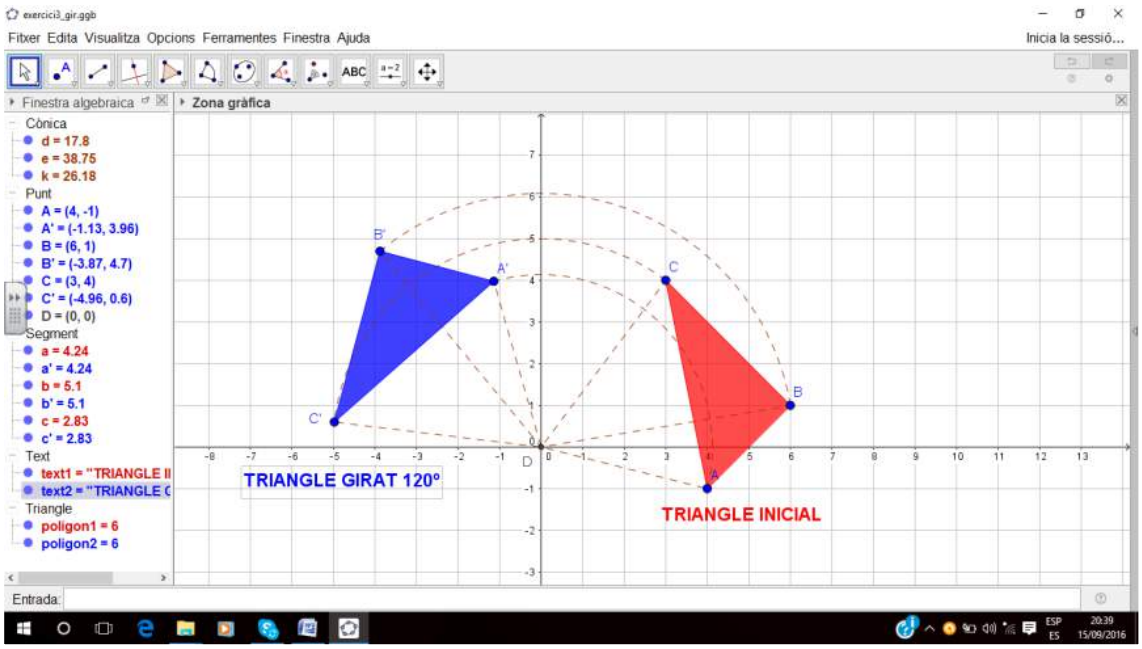
Podem trobar al voltant nostre, situacions on estan presents transformacions geomètriques, reproduir-les o fotografiar-les i tractar-les posteriorment fent ús de les eines que ens proporcional l'aplicació. L'objectiu de la càmera fotogràfica passa a ser l'objectiu de la resolució d'un problema matemàtic que ara l'alumnat interpreta des d'altra perspectiva i on segur ens sorprendran per la seua creativitat, perquè hi ha moltes situacions en les quals veiem simetries o girs, però ... és realment sempre així? I què passaria si férem simètriques situacions que no ho són?

La pràctica l'inicie treballant les transformacions geomètriques amb una figura geomètrica, un triangle per exemple, on hauran de reflectir-se tots els elements complementaris adients per a una bona interpretació dels gràfics.

Observa les imatges següents:

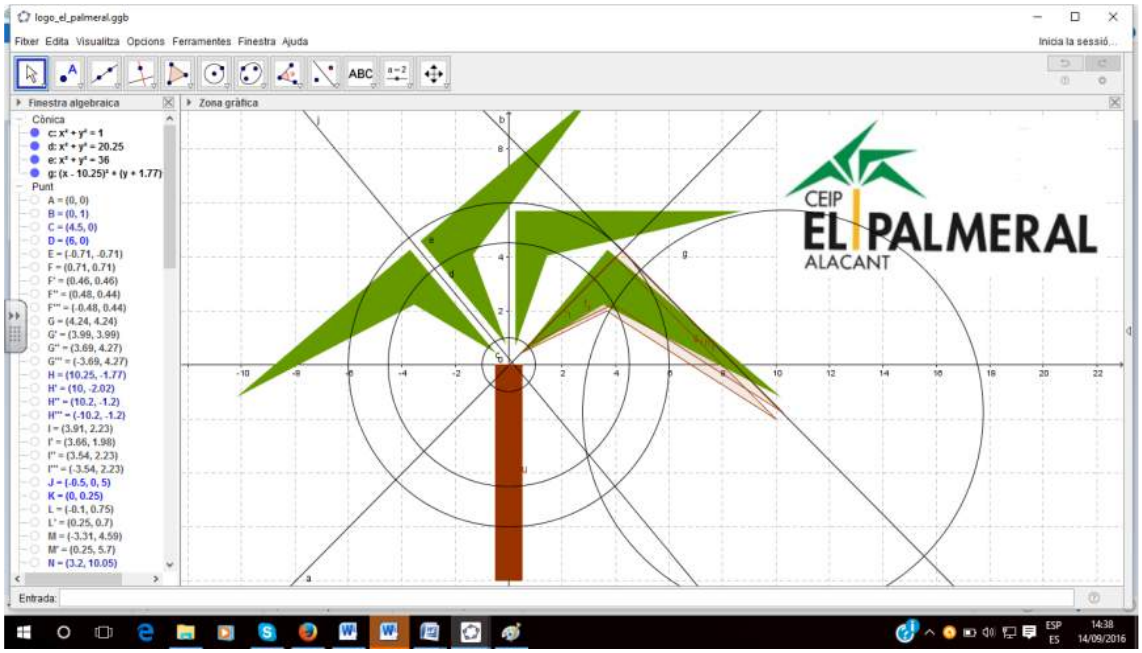


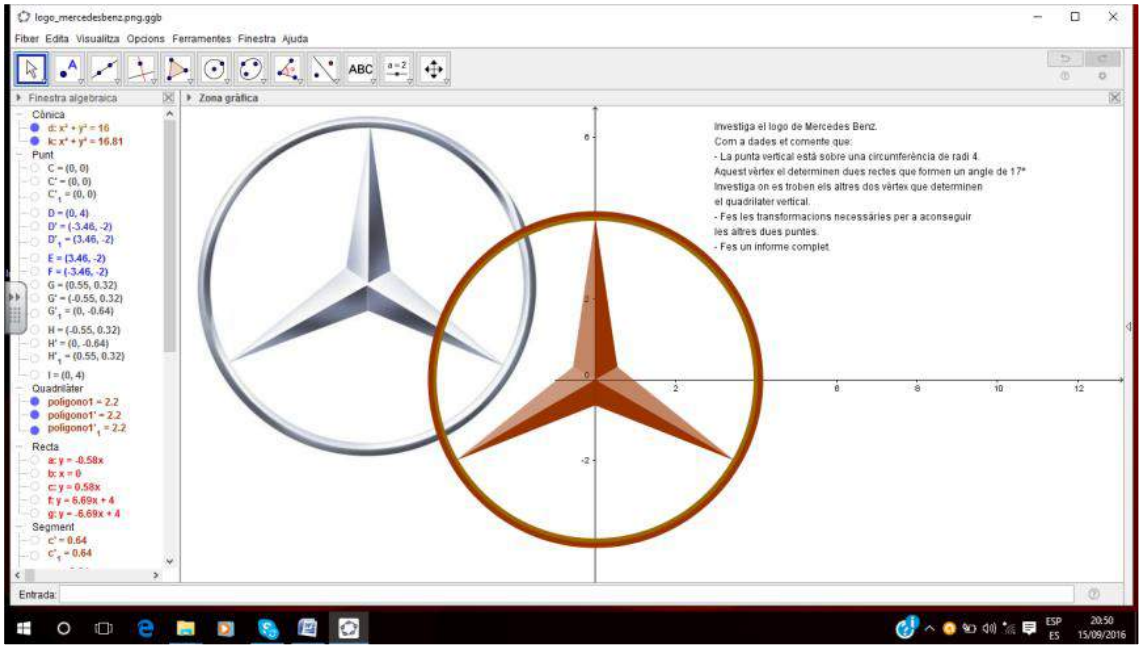




Ràpidament donaran resposta a les simetries, translacions o girs que els proposem, a més a més de forma vistosa. I es que "amb l'eclosió de la informàtica, la matematització del saber ha alcançat nivells que fins fa poc resultaven inimaginables i ... seguim avançant." (Fabretti, 2016, p.10).

Podem proposar-los situacions on apareixen aquestes transformacions geomètriques i reproduir-les fent ús de les eines que ens proporcional l'aplicació: algunes de les marques conegudes de cotxes, el logo del col·legi, etc. podrien ser uns bons exemples.

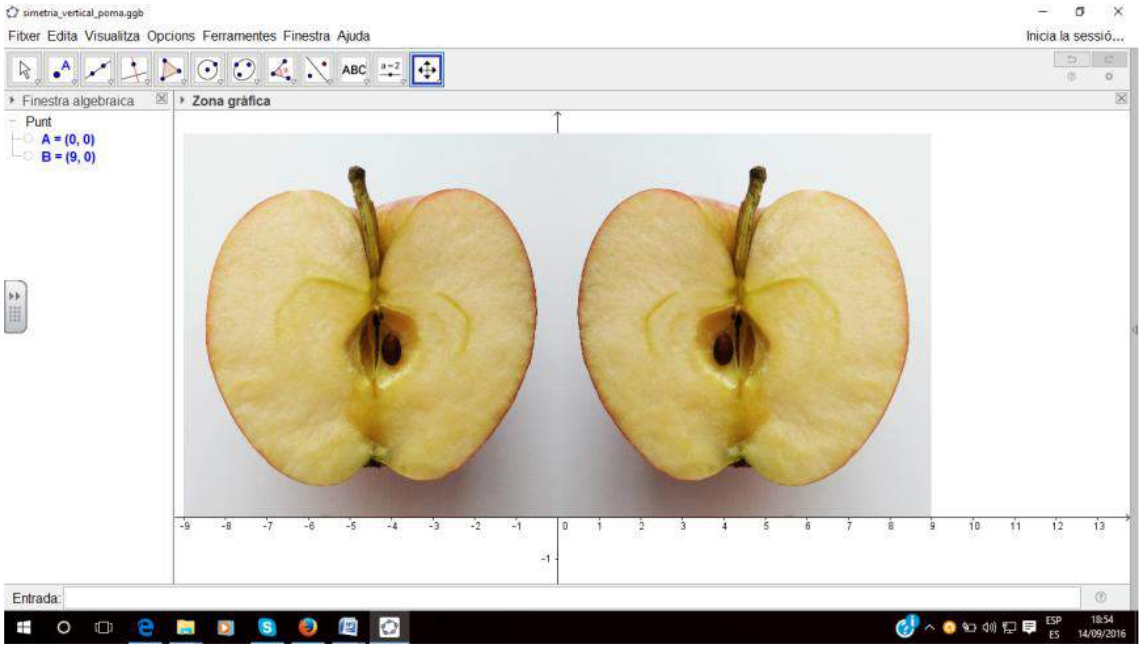




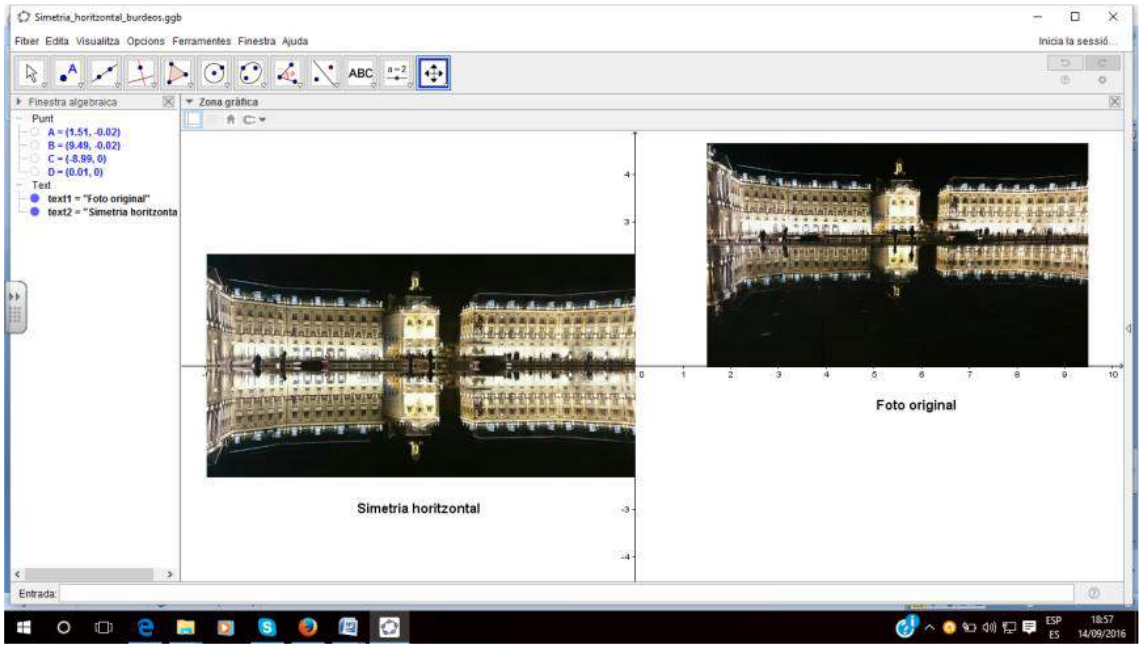
Però també podem veure al voltant nostre, situacions on estan presents aquestes transformacions, fotografiar-les i tractar-les posteriorment. L'objectiu de la càmera fotogràfica passa a ser l'objectiu de la resolució d'un problema matemàtic que ara l'alumnat interpreta des d'altra perspectiva.

Una fruita tallada, el reflex en l'aigua d'un paisatge, etc poden ser uns primers exemples.

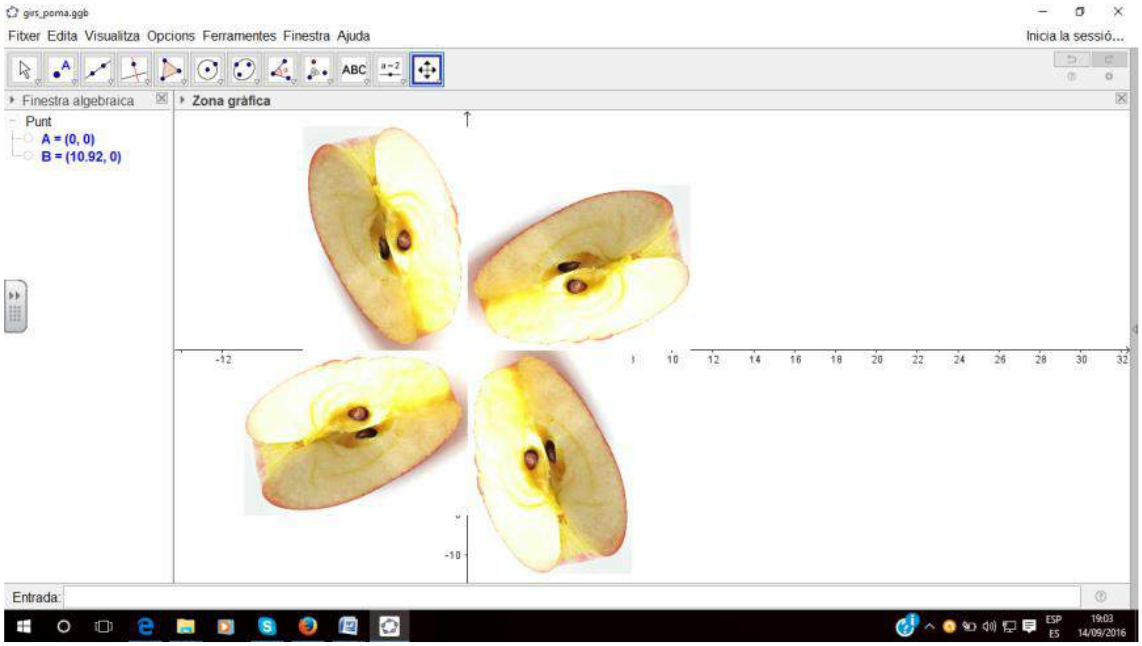
Simetria vertical



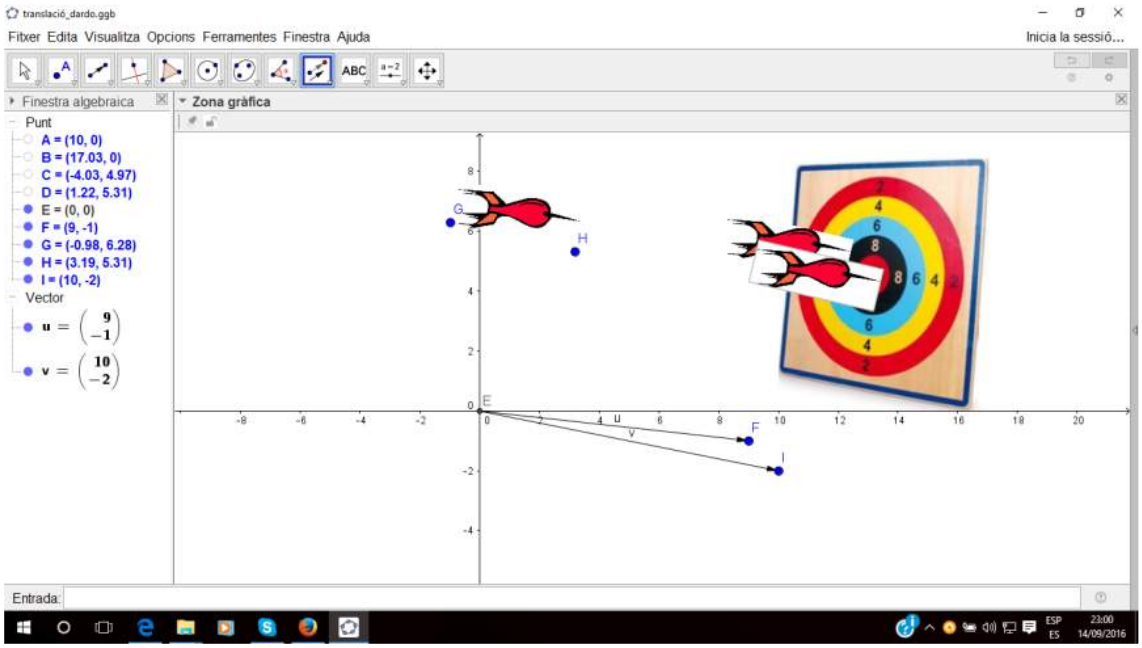
Simetria horitzontal



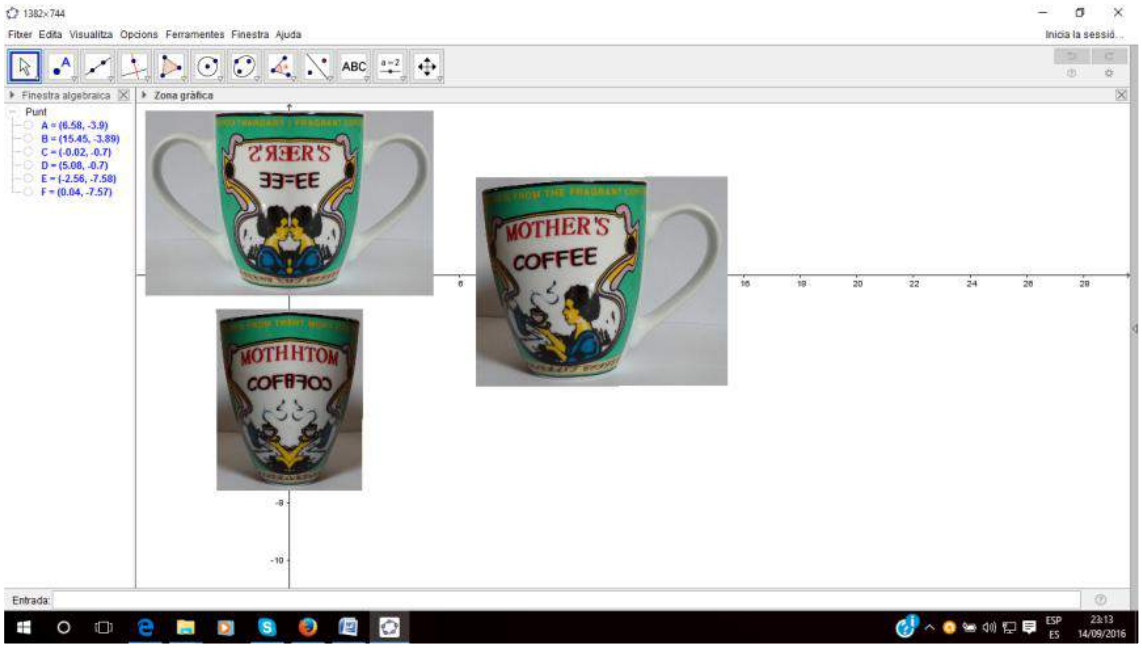
Girs

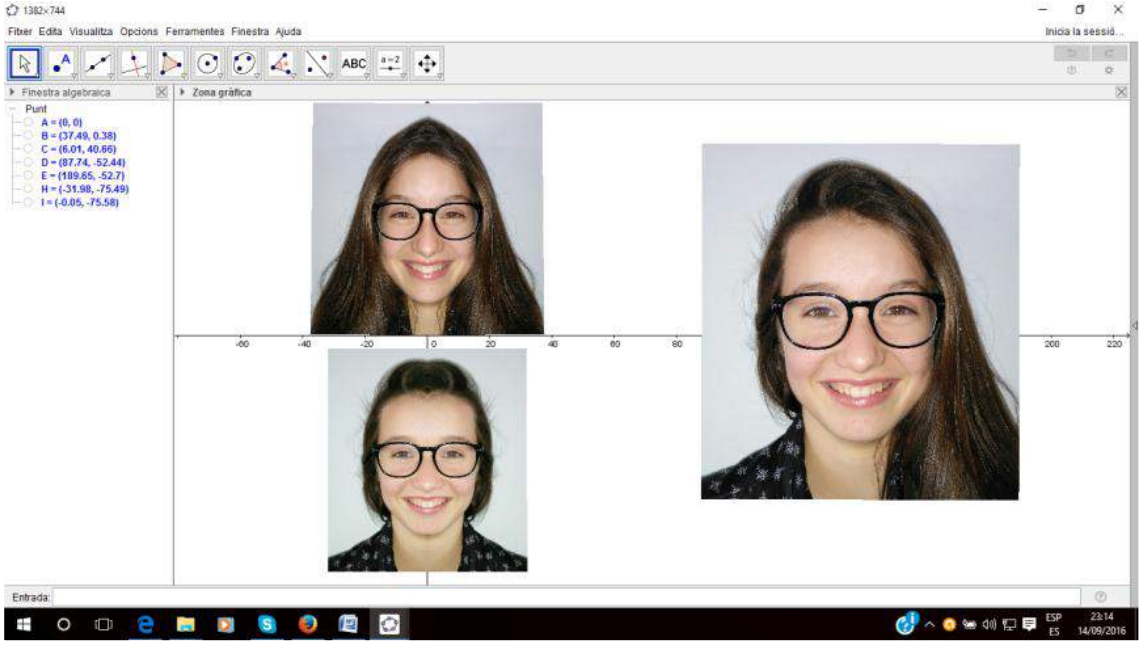


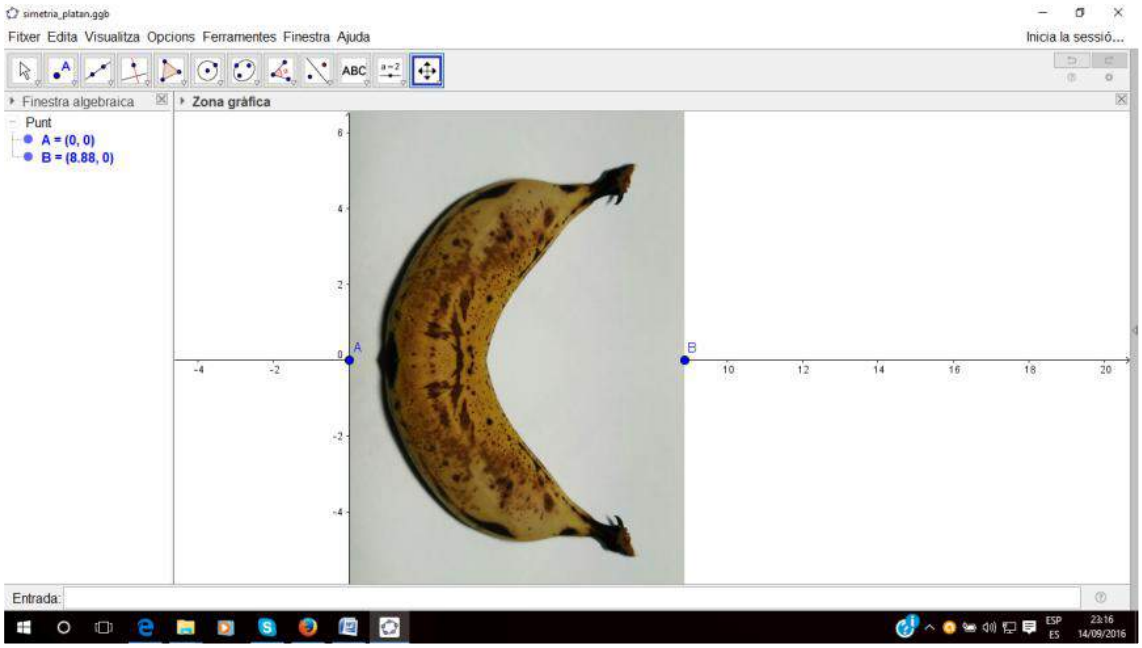
Translacions

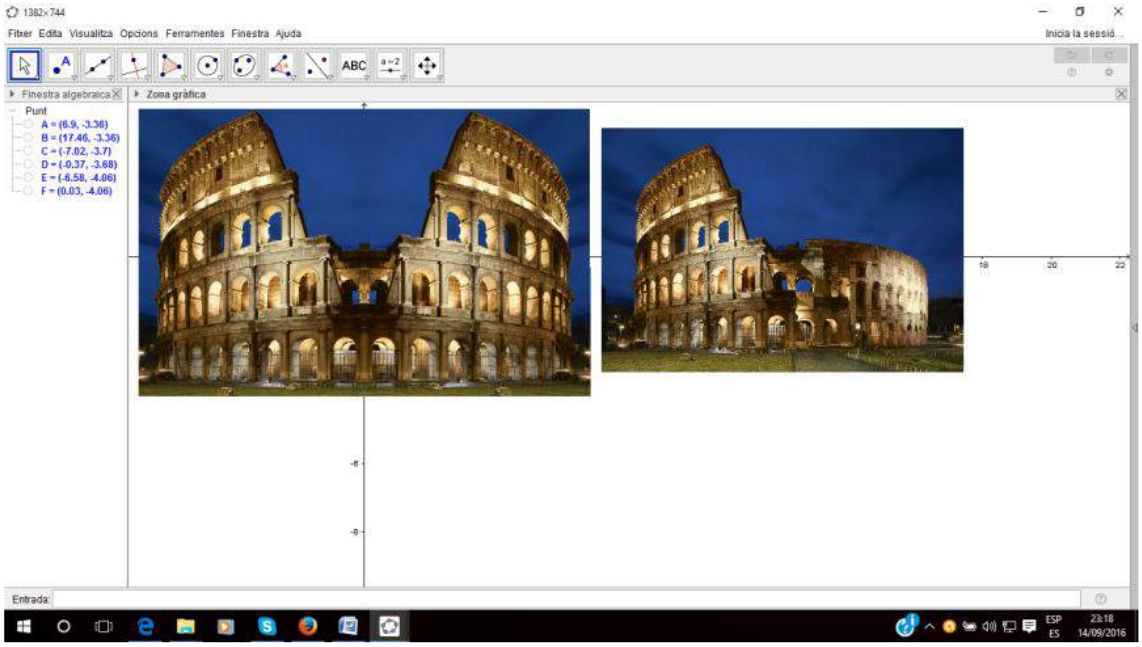


Però segur que ens sorprendran per la seua creativitat, perquè conforme diu el títol del taller, hi ha moltes situacions en les quals veiem simetries o girs, però ... és realment així? I què passaria si férem simètriques situacions que no ho són? Una tassa, la cara d'una persona, altra fruita tallada de manera diferent o el Colisseum de Roma.

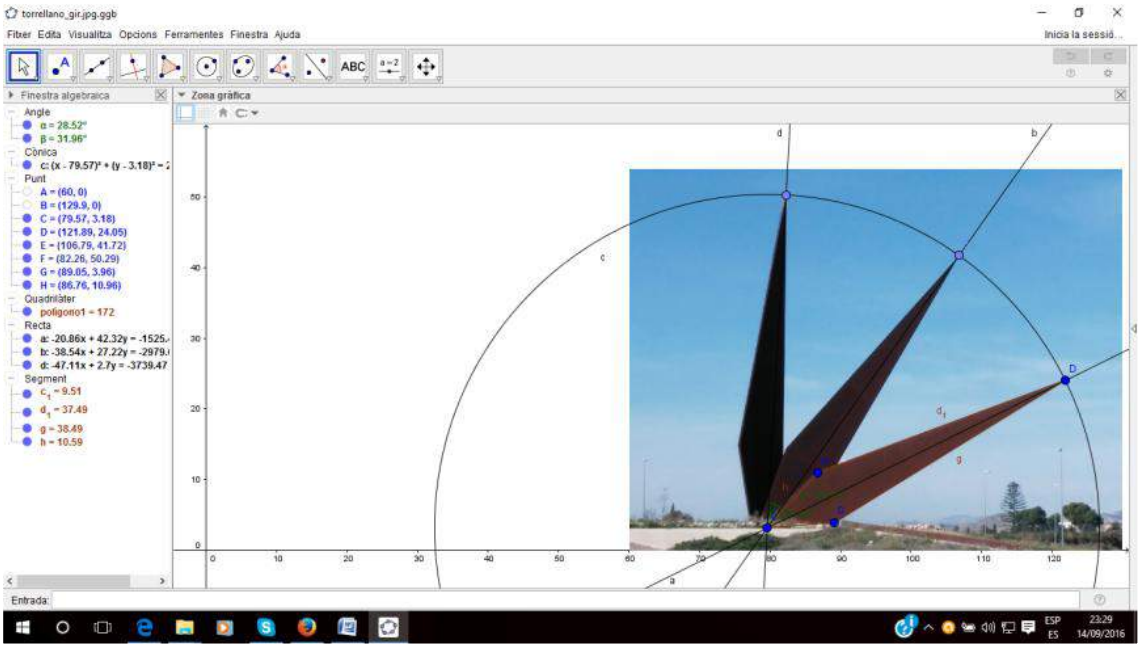

1382×744
Fitxer Edita Visualitza Opcions Ferramentes Finestra Ajuda
Inicia la sessió...
Finestra algebraica
Zona gràfica
Punt
A = (6.58, -3.9)
B = (15.45, -3.89)
C = (-0.02, -0.7)
D = (5.08, -0.7)
E = (-2.56, -7.58)
F = (0.04, -7.57)
MOTHER'S
COFFEE
Entrada:
ESP
ES
23:13
14/09/2016


1382×744
Fitxer Edita Visualitza Opcions Ferramentes Finestra Ajuda
Inicia la sessió...
Finestra algebraica
Zona gràfica
Punt
A = (0, 0)
B = (37.49, 0.38)
C = (6.01, 40.66)
D = (87.74, -52.44)
E = (189.65, -52.7)
H = (-31.98, -75.49)
I = (-0.05, -75.58)
Entrada:
ESP
ES
23:14
14/09/2016

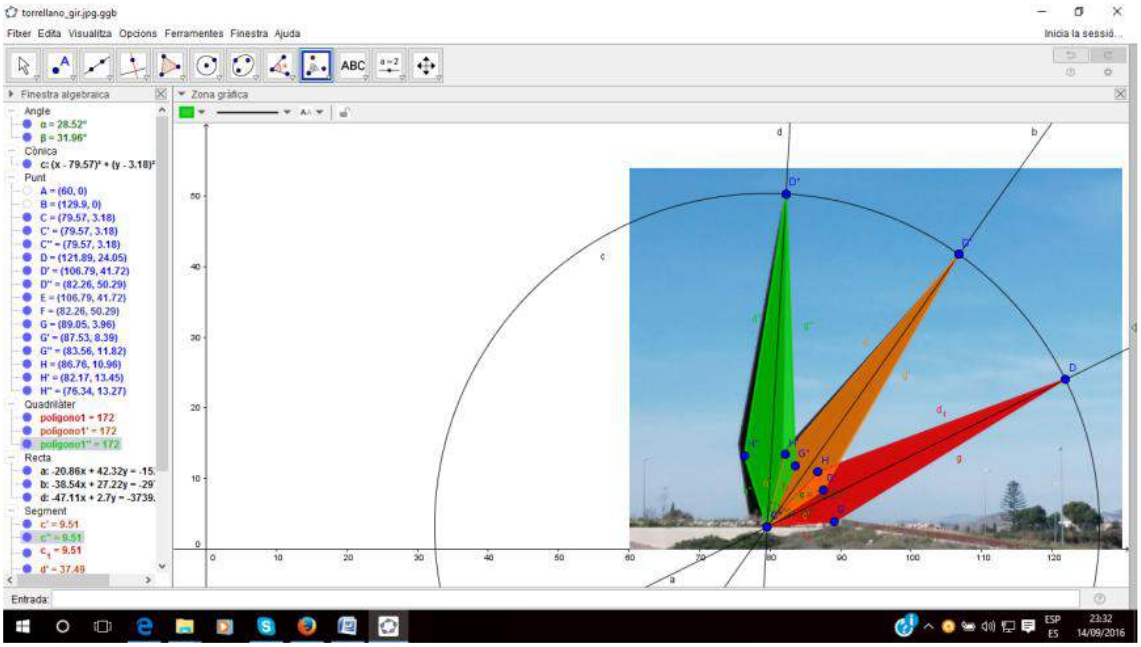




En cada fotografia podrem donar resposta a una situació que relaciona matemàtiques i qüestions reals que no són llunyanes als alumnes i que per tant els resulten més motivadores i aconseguim d'aquesta manera afavorir dues facetes en la formació integral de l'alumnat: "el desenrotllament de les seues capacitats cognitives, però també de les capacitats socioemocionals, imprescindibles ambdues per aconseguir l'èxit en qualsevol camp." (Vaello, 2007, p.12).



En l'activitat següent es planteja quins són els angles de gir dels quadrilàters que formen l'escultura de la fotografia, obtenint una reproducció d'aquesta amb la informació obtinguda.



Amb unes activitats d'aquest tipus incloem gran varietat d'habilitats i coneixements del camp competencial matemàtic ja que en la resolució d'aquestes situacions que es proposen hi ha components de comunicació i representació (comunicació del procés de resolució i de la solució), de connexions (entre matemàtiques i realitat) i de raonament i prova (en la comprovació de solucions i del procés de resolució)

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Fabretti, C. (2016). *Las matemáticas de la naturaleza.* Barcelona: Bonalletra Alcompás.

Vaello Orts, J. (2007). *Cómo dar clase a los que no quieren*. Madrid: Santillana.

APROXIMACIÓN A LAS TÉCNICAS DE RECUENTO MEDIANTE ACTIVIDADES CON TABLEROS DE AJEDREZ USANDO APPLETS DE GEOGEBRA

Fernando Arenas Planelles
Fernando.arenas61@gmail.com
IES l'Allusser - Mutxamel

Modalitat: Taller
Nivell educatiu: Secundaria y bachillerato.
Palabras clave: Ajedrez, técnicas de recuento, pasatiempos

RESUM

A partir del problema clásico de las 8 reinas (colocar 8 reinas en un tablero de ajedrez sin que se amenacen entre ellas), ampliado a torres y reyes, se estudian seis applets con los que trabajar en el aula técnicas de recuento y de codificación de las soluciones. Tres de los applets se plantean como juegos, y los otros como aleatorios. El alumno debe de resolver los problemas planteados. En el taller se desarrollarán dos de esos applets prestando especial atención al uso de listas y los comandos asociados. Finalmente se abordará el manejo de guiones programados en Javascript con los que crear el conjunto de listas.

0. INTRODUCCIÓN

A continuación presentaremos los tres problemas que queremos que resuelvan los estudiantes. Después los applets, la nomenclatura para representar las soluciones, el concepto de congruencia entre soluciones y la exploración con diagramas en árbol, las permutaciones, las sucesiones recurrentes como instrumento para encontrar el número de soluciones del problema de las torres, las funciones de parte entera como instrumento para encontrar el número máximo y mínimo de reyes. Terminaremos con una breve descripción de la construcción de los applets.

1. PUNTO DE PARTIDA: PROBLEMAS

El problema de las 8 reinas fue propuesto por el ajedrecista alemán Max Bezzel en 1848 y consiste en colocar en un tablero de ajedrez 8 reinas sin que estas se amenacen entre sí. En el juego del ajedrez la reina amenaza a aquellas piezas que se encuentren en su misma fila, columna o diagonal.

Por otra parte en el libro "Antiguos problemas recreativos en Rusia" encontramos el problema de las 8 torres. Su enunciado es semejante al anterior pero sustituyendo las reinas por torres. La resolución de este problema es más sencilla al no tener en cuenta las diagonales.

Por último el problema de los reyes consiste en averiguar cuál es el máximo número de reyes que se pueden colocar en un tablero de ajedrez sin que se amenacen entre sí. Y la variante: ¿cuál es el mínimo número de reyes que necesito colocar en un tablero para que cualquier casilla esté amenazada por uno de ellos?

2. Los applets



El taller presenta seis applets, dos para cada uno de los problemas. Uno modelo aleatorio y el otro modelo juego. Todos ellos incorporan un tablero de ajedrez del que podemos controlar, su tamaño mediante un **deslizador**. El primer modelo distribuye las piezas de forma aleatoria en el tablero.

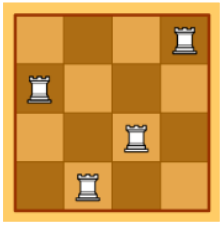
El botón **nueva distribución** genera nuevas soluciones (no todas ellas serán óptimas). La **casilla de control** permite alternar entre las imágenes de las piezas o los puntos asociados.



Los applets modelo Juego permiten colocar las piezas en el tablero arrastrándolas con el ratón. Si la posición de las piezas no está permitida el mensaje **"Posición amenazada"** nos advierte de dicha situación.

En el juego de las torres mediante una **casilla de control** podemos escoger si está permitido colocar piezas en la diagonal principal.

3. Representación de soluciones



La primera actividad a realizar con los alumnos será buscar soluciones para el problema con cuatro torres y ponerlas en común. Para ello necesitamos ponernos de acuerdo en cómo representar dichas soluciones, en como codificarlas. La primera idea suele ser dibujar una cuadrícula que representa al tablero y escribir las posiciones de las torres con letras.

			T
T			
		T	
	T		

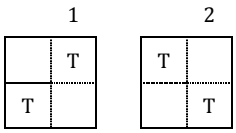
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alumnos de bachillerato proponen usar una matriz de ceros y unos donde los ceros son las posiciones vacías y los unos las posiciones ocupadas. En este punto conviene reflexionar que por tratarse de torres debe haber una y solo una pieza en cada columna, y de la misma manera considerando las filas. Por lo que podemos emplear una tupla donde cada componente representará una columna y el valor indicará la fila. En nuestro caso sería $(3,1,2,4)$. Este modelo es válido para reinas y torres, pero no para reyes ya que puede haber más de un rey por columna, por lo que en este caso debemos usar una tupla de puntos indicando las coordenadas. En el ejemplo sería $[(1,3),(2,1),(3,2),(4,4)]$.

4. Congruencia entre soluciones y exploración con diagramas de árbol

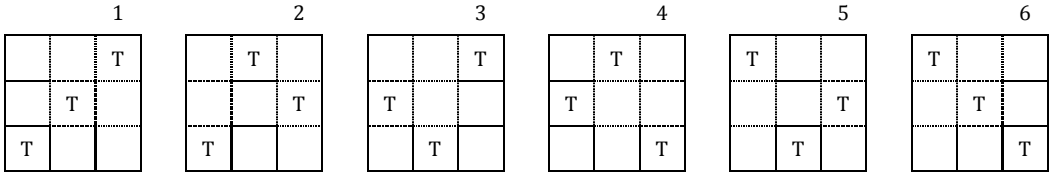
"Dos soluciones son congruentes si se puede obtener una a partir de la otra mediante giros o reflexiones" (transformaciones isométricas).

Para comenzar el trabajo se propone que busquen todas las formas posibles de colocar 2 torres en un tablero 2x2 sin que se amenacen. Rápidamente dibujan los dos casos.



El profesor debe preguntar si estas dos soluciones son distintas o son la misma. Los alumnos reflexionan que son iguales pero que están giradas. ¿Cuál es el ángulo de giro? Observan que es de 90º.

Se propone el mismo problema para un tablero de 3x3. Obtienen el resultado[1]:



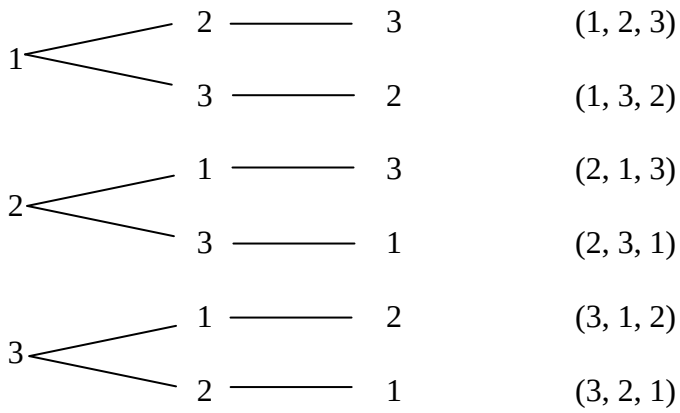
Planteamos las siguientes cuestiones:

a) De las seis soluciones ¿cuántas son distintas? Observan que la 1 es igual a la 6 y que la 2, 3, 4 y 5 también son iguales.

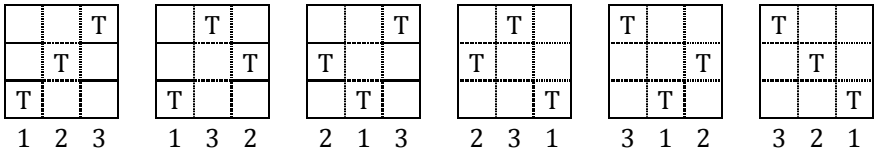
b) ¿En qué se diferencian? En que están giradas. La 6 es la 1 girada 90º. Al girar la 2 90º se obtiene la 4, con 180º la 3 y con 270º la 5.

De nuevo se plantea el problema para tableros de 4x4. Primero deben buscar soluciones de forma individual, más tarde se ponen en común. El profesor dibuja en la pizarra las soluciones que dice cada uno de los alumnos y las va numerando. El resto de compañeros deben de supervisar que la solución no se encuentre ya dibujada y deben de indicar si es congruente con alguna de las anteriores. La actividad se desarrolla durante un tiempo limitado. Al final del mismo los alumnos han encontrado un gran número de soluciones pero no todas las posibles. La búsqueda de las que faltan se hace muy dificultosa. Es el momento de hacerles ver la conveniencia de seguir algún criterio de búsqueda de soluciones.

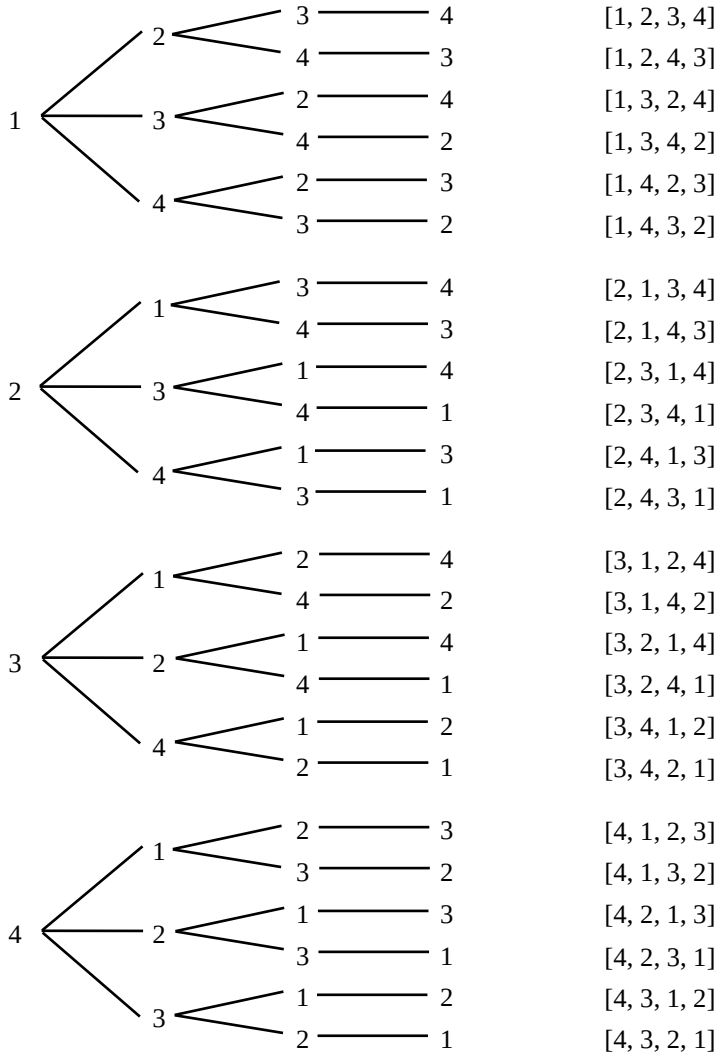
Se explica el funcionamiento de un diagrama en árbol para el caso de 3x3 y obtenemos las soluciones en el orden de la figura:

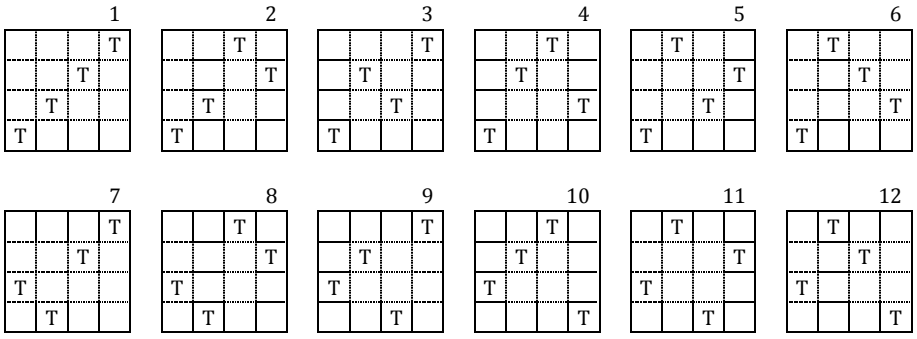


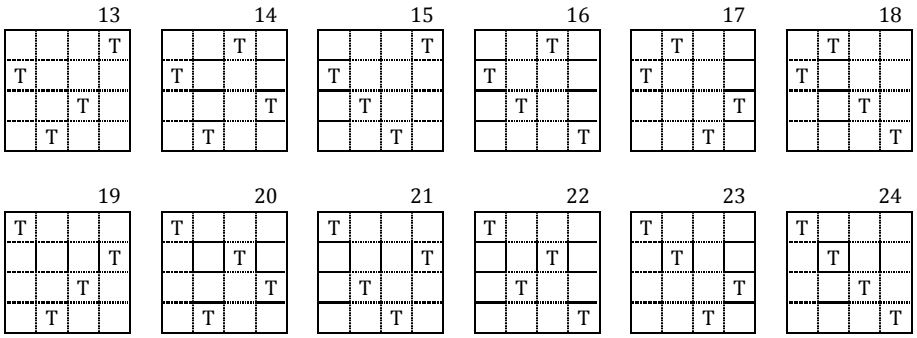
[1] En las imágenes las soluciones están dispuestas en forma sistemática, en el trabajo de clase el orden no fue este.



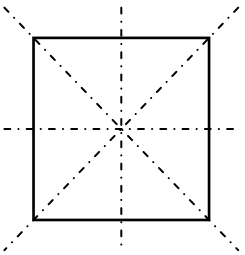
Se propone el uso del diagrama en árbol para obtener las soluciones para las 4 torres.







Observamos que las soluciones 4 y 5 son semejantes pero no se puede obtener una a partir de la otra mediante un giro.

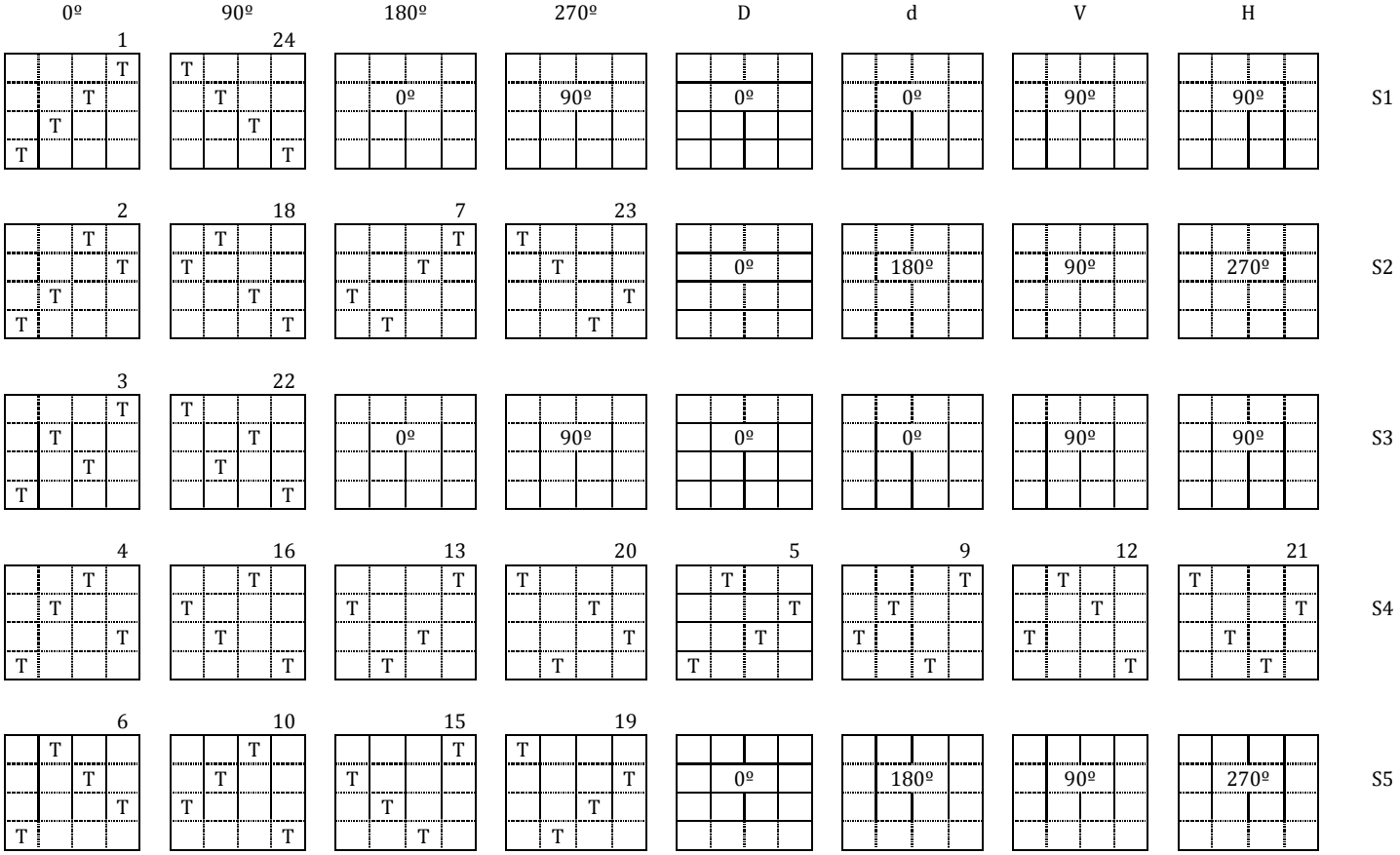


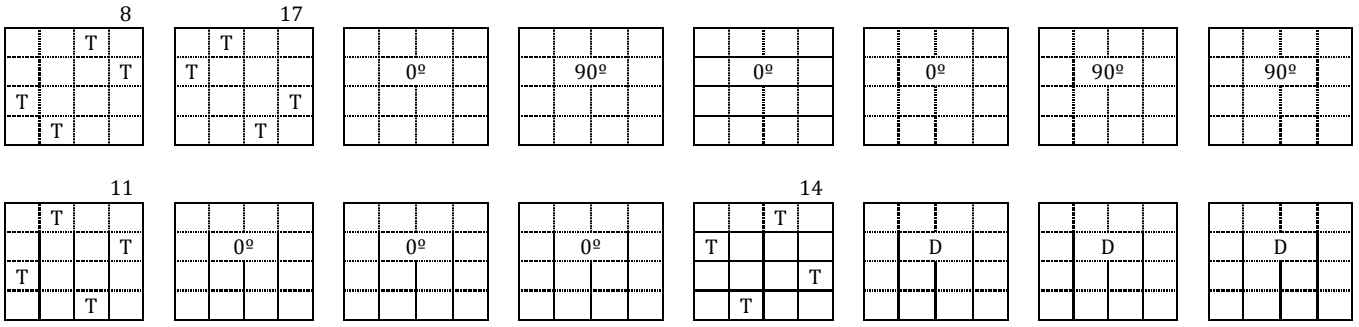
a) ¿Qué transformación hay que hacer? Una reflexión respecto de la diagonal principal.

b) ¿Cuántos ejes de simetría tiene un cuadrado? 4.

c) ¿Qué otro tipo de simetría tiene el cuadrado? Simetría radial. El orden de una simetría radial es el número de veces que la figura coincide cuando se da una vuelta completa.

d) ¿De qué orden es la simetría radial del cuadrado? 4. El cuadrado tiene 4 simetrías axiales y 4 radiales. Dada una solución cualquiera vamos a realizar todas sus transformaciones.





5. PERMUTACIONES

Ahora observa el número de soluciones que has obtenido para tableros de 2x2, 3x3, 4x4, …

a) ¿cuántas soluciones tendrá un tablero de 5x5?

b) Teniendo en cuenta la congruencia de soluciones, ¿cuántas son distintas?

c) Completa la tabla.

Tamaño del tablero	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6
Número total de soluciones	1	2	6	24	120	720
Número de soluciones distintas	1	1	2	7	23	

El número total de soluciones que aparece es el factorial del orden del tablero:

Nº Soluciones $nxn = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$

Y el conjunto de todas las soluciones son las permutaciones de la n-tupla. Para orden tres es: [(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)].

En el desarrollo de la actividad en clase los estudiantes han buscado soluciones de forma individual, después han realizado una puesta en común coordinada por el profesor. La actividad trabaja la visión espacial al tener que manejar giros y reflexiones mentalmente y la capacidad de codificación al tener que indicar de forma inequívoca la disposición de las piezas. Por último la búsqueda sistemática de soluciones nos permite introducir los diagramas en árbol.

6. SUCESIONES RECURRENTES COMO INSTRUMENTO PARA ENCONTRAR EL NÚMERO DE SOLUCIONES DEL PROBLEMA DE LAS TORRES

Resuelto el problema de las torres se plantea la siguiente variante con una restricción: "Situar 8 torres en un tablero de ajedrez sin que se amenacen entre sí, teniendo en cuenta que no puede haber ninguna torre en la diagonal principal". Debemos calcular el número total de soluciones.

Para resolver el problema empezamos por casos más sencillos. Tomamos el conjunto de soluciones del problema ya resuelto y eliminamos aquellas no admitidas por tener alguna torre en la diagonal principal y completamos la tabla.

Tamaño del tablero	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6
Número total de soluciones	0	1	2	9	44	265
Número de soluciones distintas	0	1	1	5	12	

L. Euler estableció la relación $Q_n=(n\text{-}1)\cdot(Q_{n\text{-}1}+Q_{n\text{-}2})$ donde el número de soluciones es una sucesión recurrente que depende del número de soluciones de los tableros de orden anterior.

Se proponen dos actividades:

a) Comprobar que los resultados obtenidos empíricamente se corresponden con la fórmula.

b) Demostrar dicha fórmula.

El razonamiento de Euler fue el siguiente. En cada columna del tablero tiene que haber una torre y sólo una. En la primera columna la torre puede ocupar n-1 posiciones, pues la primera casilla pertenece a la diagonal principal y no se puede ocupar. Situamos la torre en una casilla cualquiera de las permitidas, por ejemplo, en la fila r. Consideramos todas las soluciones con la torre en dicha casilla, estas soluciones podemos dividirlas en dos grupos: en el primer grupo estarán aquellas soluciones donde la casilla simétrica a la de la de la torre de la primera columna respecto de la diagonal principal no está ocupada y al segundo grupo cuando sí que esté ocupada. Calculemos el número de soluciones de cada grupo.

En el primer grupo, si eliminamos la primera columna y la fila r-ésima la sustituimos por la primera (de esta manera nos aseguramos de que no haya torres en la diagonal principal ya que la primera casilla de la diagonal es la que era la segunda) obtenemos un tablero de dimensión (n-1)x(n-1) que cumple las condiciones del problema por lo que tendrá $Q_{n\text{-}1}$ soluciones.

En el segundo grupo, por estar ocupada la posición simétrica tenemos que eliminar la columna 1 y la fila r, y la columna r y la fila 1, agrupando las casillas restantes formamos un tablero de dimensión (n-2)x(n-2) que cumple con las condiciones del problema por lo que tendrá $Q_{n\text{-}2}$ soluciones.

En resumen para una torre situada en la posición r de la primera columna hay $Q_{n\text{-}1}+Q_{n\text{-}2}$ soluciones y como la primera torre puede ocupar n-1 posiciones el número total será:

$$Q_n=(n\text{-}1)\cdot(Q_{n\text{-}1}+Q_{n\text{-}2})$$

7. Funciones de parte entera como instrumento para encontrar el número máximo y mínimo de reyes

El problema que trataremos ahora es encontrar el número máximo de reyes que podemos poner en un tablero sin que se amenacen entre sí.

Para empezar nos plantearemos cual debería ser la condición para que el número sea máximo. La respuesta es que los reyes estén lo más próximos posible. Esto se consigue cuando entre dos reyes hay una única casilla vacía.

Abordamos el problema con tableros de orden creciente y anotamos los resultados en la tabla:

Orden del tablero	1	2	3	4	5	6	7	8
Número máximo de reyes	1	1	4	4	9	9	16	16

Al observar los resultados los alumnos se dan cuenta de que son cuadrados perfectos y al preguntarles cual sería el número para tableros de 9x9 responden en su mayoría 25. Si son cuadrados perfectos, ¿cómo podemos averiguar el valor de la base?

Colocando en las casillas de la primera fila un "sí" y un "no" de forma sucesiva. Empezando por un "sí". La base será el número de "sí". El número máximo de reyes lo obtendremos al elevar el número de síes al cuadrado.

S	N	S	N	S

Para un número impar y su consecutivo el número de síes es el mismo.

S	N	S	N	S	N

Planteamos el problema para la variante del mínimo número de reyes necesarios para cubrir todo el tablero. Del mismo modo que antes observamos que la condición para que el número sea mínimo es que los reyes estén lo más separado posible. Para conseguirlo entre dos reyes debe haber dos casillas vacías. Probamos para tableros de orden creciente y anotamos los resultados en la tabla:

Orden del tablero	1	2	3	4	5	6	7	8
Número máximo de reyes	1	1	1	4	4	4	9	9

De nuevo los alumnos observan que los valores son cuadrados perfectos pero que ahora van en grupos de tres en tres.

Las funciones parte entera son funciones de variable real que devuelven el número entero más próximo ya sea por defecto o por exceso. Esto es:

Función suelo. Es la función parte entera que asigna el valor por defecto, es decir, el mayor número entero menor o igual que el número real y se representa $\lfloor x \rfloor$.

Función techo. Es la función parte entera que asigna el valor por exceso, es decir, el menor número entero igual o mayor que el número real y se representa $\lceil x \rceil$.

En nuestro caso el máximo y mínimo número de reyes son:

$$R_{MAX} = \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right)^2 \qquad R_{MIN} = \left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \right)^2$$

8. CONSTRUCCIÓN DE LOS APPLETS

Primero crearemos los elementos comunes a los 6 applets. Abrimos una ventana de Geogebra, activamos la opción "**mostrar cuadrícula**". Hacemos clic con el botón derecho sobre la vista gráfica y en el menú contextual seleccionamos la opción "**preferencias**" y en la pestaña "**Básico**" fijamos la relación entre los ejes a 1:1 y modificamos el "**Color de fondo**" color=(255, 204, 102).

1. ***Orden del tablero*.** Mediante un deslizador controlamos el tamaño del tablero.

   Deslizador Nombre=*n* Intervalo=[1, 8] Incremento=1

2. **El tablero***. El tablero va a ser una lista de cuadrados alternos (los* escaques negros). Se dibujarán aquellos que la suma de sus índices de fila y columna sea par. Como hay que crear objetos en dos direcciones será una lista de listas.

   Tablero= Secuencia[Secuencia[Si[(-1)^(*j* + *k*) > 0,

   Polígono[(*j* - 0.5, *k* - 0.5), (*j* + 0.5, *k* - 0.5), 4], Polígono[(*j*, *k*), (*j*, *k*), 4]], *j*, 1, *n*], *k*, 1, *n*]

   Color =(153,102, 0) Opacidad=75%

   Avanzado/Permitir seleccionar = Deshabilitado

3. **El borde del tablero.** Es un cuadrado que delimita el tablero y da color a las casillas blancas.

   BordeTablero= Polígono[(0.5, 0.5), (*n* + 0.5, 0.5), 4]

   Color=(153,51,0) Opacidad=25%

4. **Posiciones.** Es una lista plana y ordenada con todas las posiciones del tablero.

   Lista Posiciones: L0= Aplana[Secuencia[Secuencia[(*j*, *k*), *k*, 1, *n*], j, 1, *n*]]

5. **Piezas aleatorias.** Las piezas se van escogiendo de forma aleatoria de la lista de posiciones disponibles, después de cada elección se actualiza la lista de posiciones disponibles eliminando las posiciones amenazadas por la pieza escogida. Veamos las operaciones a realizar para el caso de los reyes.

   *R*1= ElementoAleatorio[*L*0]

   *L*1= *L*0 \ Aplana[Secuencia[Secuencia[*R*1 + (*j*, *k*), *k*, -1, 1], *j*, -1, 1]]

   Li= *Li*-1 \ Aplana[Secuencia[Secuencia[*Ri* + (*j*, *k*), *k*, -1, 1], *j*, -1, 1]]

   Ri+1= ElementoAleatorio[*Li*]

   Definiendo así la nueva lista de posiciones disponibles es posible que esta quede vacía y al escoger un punto aleatorio de una lista vacía este queda indefinido. Una forma alternativa es comprobar primero si la lista va a quedar vacía y en ese caso crearla con el punto (0, 0). Para que las piezas que no caben en el tablero estén todas en el origen de coordenadas a cada punto hay que añadirle la condición para mostrar objeto!=(0, 0).

   Li=*S*i[*Li*-1\ Aplana[Secuencia[Secuencia[*Ri* + (*j*, *k*), *k*, -1, 1], *j*, -1, 1]]!={}, *Li*-1 \ Aplana[Secuencia[Secuencia[*Ri* + (*j*, *k*), *k*, -1, 1], *j*, -1, 1]],{(0,0)}]

   Se debe de crear un botón para obtener nuevas soluciones

   botón1 Rótulo=Nuevadistribución Script=ActualizaConstrucción

   Para evitar tener que crear a mano las 16 listas y los 16 puntos aleatorios podemos emplear un botón con el siguiente script.

Creamos el botón ListasJava y en propiedades en la pestaña Programa de guión Al hacer clic escribimos el código en formato JavaScript

```
for(cont=1; cont<16;cont++)
{
cont1=cont-1
ggbApplet.evalCommand('R'+cont+'=RandomElement[L'+cont1+']');
gbApplet.evalCommand('L'+cont+'=L'+cont1+'\\Flatten[Sequence[Sequenc
e[R'+cont+'+(j,k),j,-1,1],k,-1,1]]');
ggbApplet.evalCommand('SetConditionToShowObject[L'+cont+',false]');
ggbApplet.evalCommand('SetConditionToShowObject[R'+num+',R'+num+'!
=(0,0)]' );ggbApplet.evalCommand('CopyFreeObject[imagen1]');
}
```

6. **Piezas manuales.** Se crean fuera del tablero los puntos correspondientes a las piezas a colocar. A cada punto se le asocia una lista con las posiciones amenazadas por él y por los puntos de índice inferior. Un punto sólo amenaza posiciones si se encuentra dentro del tablero. Por último un punto está amenazado si pertenece a la lista de posiciones amenazadas de índice anterior.

   Si el juego es con reyes

   $L1A$= Si[$R1 \in L0$, Intersección[$L0$, Aplana[Secuencia[Secuencia[$R1 + (j, k)$, k, -1, 1], j, -1, 1]]], {}]

   El comando **Intersección** hace que la lista sólo contenga puntos del tablero.

   L_iA=Único[Encadena[{$L_{i-1}A$, Si[$R_i \in L0$, Intersección[$L0$, Aplana[Secuencia[Secuencia[$R_i + (j, k)$, k, -1, 1], j, -1, 1]]], {}]}]]

   El comando **Encadena** une la lista de posiciones amenazadas del punto anterior con las posiciones amenazadas por el punto que estamos evaluando. La instrucción **Único** elimina las repeticiones en el caso de que haya posiciones amenazadas por más de una pieza.

   Si el juego es con torres

   $L1A$= Único[Si[$T1 \in$ L0, Encadena[{Secuencia[$T1 + (j, 0)$, j, 1 - $x(T1)$, n - $x(T1)$], Secuencia[$T1 + (0, j)$, j, 1 - $y(T1)$, n - $y(T1)$]}], {}]]

   La primera secuencia elimina los puntos de la fila donde está la torre y la segunda secuencia los puntos de la columna. Los extremos de los índices j se consiguen mediante las funciones $x(T)$ e $y(T)$ que obtienen las coordenadas x e y del punto respectivamente.

   L_iA= Único[Encadena[{$L_{i-1}A$, Si[$T_i \in L0$, Encadena[{Secuencia[$T_i + (j, 0)$, j, 1 - $x(T_i)$, n - $x(T_i)$], Secuencia[$T_i + (0, j)$, j, 1 - $y(T_i)$, n - $y(T_i)$]}], {}]}]]

   Para evaluar que no hay piezas que se amenacen, empleamos una variable booleana

   PosAm= $T2 \in L1A \vee T3 \in L2A \vee T4 \in L3A \vee T5 \in L4A \vee T6 \in L5A \vee T7 \in L6A \vee T8 \in L7A$

Seleccionamos la herramienta texto señalamos el punto donde queremos que aparezca el mensaje "**Posición amenazada**". **Tamaño** = grande, **color** = rojo y en la pestaña avanzado **Condición para mostrar el objeto**=PosAm.

Imágenes de las piezas. Descargamos las imágenes de las piezas de ajedrez de la página de la wikipedia (https://es.wikipedia.org/wiki/Piezas_de_ajedrez). Con la herramienta *Imagen* las insertamos en los puntos. Editamos sus propiedades.

Imagen1 **Posición/Esquina1**=*T*1+(-.4,-.4); **Esquina2**=*T*1+(.4,-.4) **Avanzado/Capa**=1 y la opción **Permitir seleccionar** desactivada.

Al estar la imagen en la capa 1 cubre al punto pero al estar desactivada la selección permite que arrastremos los puntos que están debajo aunque no los veamos.

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Arenas, F. (2016). La amenaza de las reinas. www.geogebra.org/m/Z1u5Q3mV Arenas, F. (2016). La amenaza de las reinas. Juego www.geogebra.org/m/Z1u5Q3mV

Arenas, F. (2016). La amenaza de las torres. www.geogebra.org/m/cE7xp8Dn

Arenas, F. (2016). La amenaza de las torres. Juego www.geogebra.org/m/X8d3XHKN

Arenas, F. (2016). La amenaza de los reyes. www.geogebra.org/m/Y9cw9AB9

Arenas, F. (2016). La amenaza de los reyes. Juego. https://www.geogebra.org/m/XwhpMdDg

Cañadilla, J.L., Gomà, A. (2012). Geogebra, Moodle y Python: un trío de ases.

Hohenwarter, M.; Hohenwarter, J. (2009). Manual Oficial de la versión 3.2.

Monzó, M., Del Campo, B., Pérez, R. (2012). Taller de introducción al diseño y presentación de actividades dinámicas con GeoGebra.

Nesterenko, Y.V.; Olejnit, S.N.; Potápov, M.K. (1994). Antiguos problemas recreativos en Rusia.

Rodríguez, J.A. (2003). Manual de Javascript.

http://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_las_ocho_reinas

DESENVOLUPEM LA VISUALITZACIÓ PER COMPRENDRE EL MÓN[1]

Mª Teresa Escrivà - Mª José Beltrán-Meneu
maeslli@alumni.uv.es - maria.jose.beltran@uv.es
Adela Jaime - Ángel Gutiérrez
adela.jaime@uv.es - angel.gutierrez@uv.es
Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València

Modalitat: Taller
Nivell educatiu: Primària
Paraules clau: Educació Primària, Geometria espacial, visualització, talent matemàtic.

RESUM

L'objectiu d'aquest taller és dur a terme activitats de geometria 3D, concretament, de seccions i de girs de cubs presentats mitjançant cossos físics, representats en paper i a través d'un software informàtic. Aquestes activitats, junt amb les activitats de desenvolupaments, han sigut posades en pràctica amb alumnes de diferents graus de talent matemàtic de 6è d'Educació Primària durant el curs acadèmic 2015-2016 amb la finalitat d'observar si aquestes activitats ajuden a què els alumnes posen de manifest les seues habilitats de visualització. Aquestes activitats han induït als estudiants a utilitzar la visualització per resoldre-les. La visualització és considerada com un element de la competència matemàtica (Ramírez, 2012) i per aquest motiu, s'han de desenvolupar en l'aula ordinària activitats que, com les que proposem, fomenten l'ús d'aquesta habilitat.

0. DESCRIPCIÓ DETALLADA DEL CONTINGUT DEL TREBALL

L'ús de la visualització tant en el context escolar com extraescolar és molt important, ja que tal i com indica Gonzato (2013), a l'hora de realitzar diverses activitats de la vida quotidiana necessitem diferents habilitats de visualització espacial per transmetre, codificar o manipular una determinada informació. Per aquest motiu, considerem essencial desenvolupar i fomentar l'ús d'aquesta habilitat a les aules. En aquest sentit, aquest taller ofereix una sèrie d'activitats que ajuden a l'alumnat a posar de manifest les habilitats de visualització durant la seua realització.

El taller presentat mostra part d'una investigació que té per objectius generals oferir un material educatiu que ajude als alumnes amb diferents graus de talent matemàtic a posar en joc la seua capacitat de visualització i identificar les característiques de talent matemàtic que pogueren ser posades de manifest pels alumnes mentre realitzen les activitats plantejades en l'experiment d'ensenyament.

Aquest experiment està format per 4 sessions, de les quals, dos van estar dedicades a desenvolupaments, una per a rotacions i una altra per a seccions. Aquestes activitats s'han basat en un cub i en un prisma com a cos geomètric, presentats amb material físic, representats en paper i amb un software informàtic. Abans de

[1] Aquesta investigació forma part dels projectes EDU2012-37259 (MINECO) i EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER).

començar a resoldre les activitats, als alumnes se'ls realitzava una xicoteta introducció perquè saberen de què anava cadascuna d'elles. A més, al finalitzar cada sessió realitzàvem una entrevista a 3 alumnes, elegits aquests per mostrar diferents nivells d'habilitats de visualització durant la primera sessió, siguent aquests els mateixos alumnes durant tot l'experiment d'ensenyament. Aquestes entrevistes tenien l'objectiu que els alumnes explicaren amb més deteniment allò que havien realitzat en cada activitat, per tal d'observar detalladament les habilitats de visualització i les característiques de talent matemàtic que manifestaven i que, de vegades, no es feien explícites en les gravacions d'àudio grupals.

Els subjectes que han participat en aquesta investigació han sigut vint alumnes amb diferent nivells de talent d'un grup-classe de 6è d'Educació Primària d'un centre públic de València i una alumna ja identificada amb talent matemàtic que no pertanyia al grup-classe, però que també estava cursant durant el curs acadèmic 2015-2016 6è d'Educació Primària. Amb ella, les activitats dissenyades en aquesta investigació es van realitzar com una activitat extraescolar.

En aquesta investigació també va participar la mestra-tutora dels alumnes com observadora-participativa i la primera autora com investigadora-docent amb l'objectiu de preguntar als alumnes com estaven realitzant les activitats per intentar que feren explícits les seues formes de pensament sobre el seu procés de resolució de les tasques. Els alumnes realitzaven les activitats en xicotets grups per tal que comentaren entre ells, amb la mestra o amb la primera autora el que ells estaven pensant mentre realitzaven l'experiment d'ensenyament.

Per poder recollir les dades i analitzar-les, es va gravar en vídeo a un grup durant totes les sessions i al mateix temps, es van utilitzar bolígrafs-gravadores per gravar el so de les converses de cadascun dels grups. També es van recollir les respostes a les activitats i les notes de camp preses durant cada sessió. A més, com que en l'última sessió es va usar l'ordinador per realitzar una activitat, també s'ha agafat la gravació de la pantalla dels ordinadors, que incloïa àudio.

En aquest taller anem a centrar-nos únicament en les activitats de rotacions i seccions, ja que són les menys emprades a l'aula. No obstant això, són unes activitats que ajuden a manifestar i desenvolupar les habilitats de visualització dels alumnes.

1. Activitats de rotacions

A continuació, detallarem les dues activitats de rotacions desenvolupades al taller. La primera activitat plantejada la podem observar en la Figura 1 i consisteix en continuar la sèrie d'un cub que va girant, indicant quina de les tres opcions (A,B o C) és la correcta, és a dir, quina perspectiva del cub és la que correspon a l'últim pas de la sèrie.

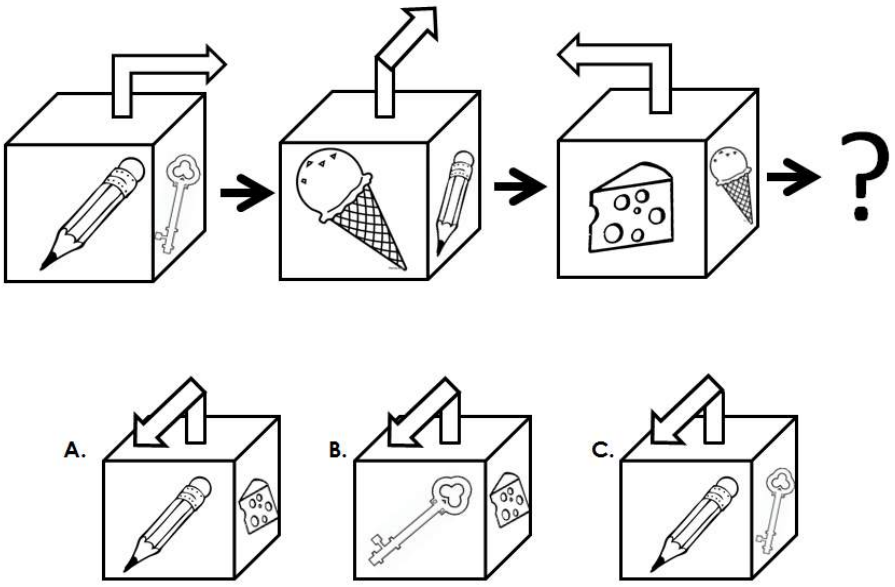


Figura 1: Primera activitat de rotacions plantejada.

La segona activitat plantejada la podem observar en la Figura 2. Aquesta consisteix en mostrar 4 posicions diferents d'un cub de tal forma que a alguns d'ells els falta el dibuix contingut a una cara. Els alumnes han d'intentar completar els cubs partir de la informació proporcionada.

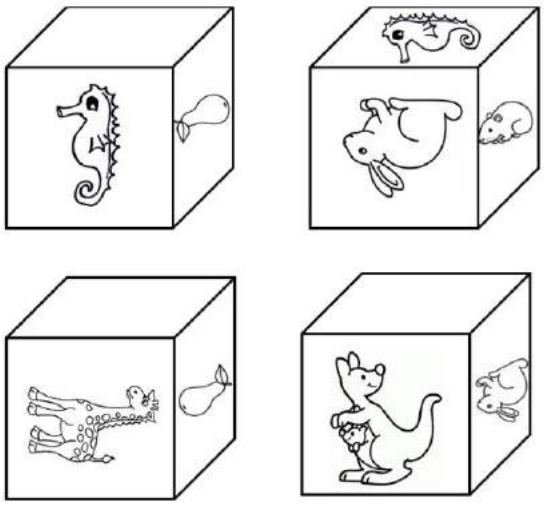


Figura 2: Segona activitat de rotacions.

Aquestes activitats obliguen als alumnes a utilitzar la visualització, ja que s'han d'imaginar mentalment com roten els cubs per poder trobar la solució.

2. ACTIVITATS DE SECCIONS

Pel que fa a les seccions vam presentar als alumnes 3 activitats, de les quals en aquest taller sols mostrem dos d'elles. Aquestes consisteixen en dibuixar la secció resultant de seccionar un cub, representat en paper, per diferents parts (Figura 3).

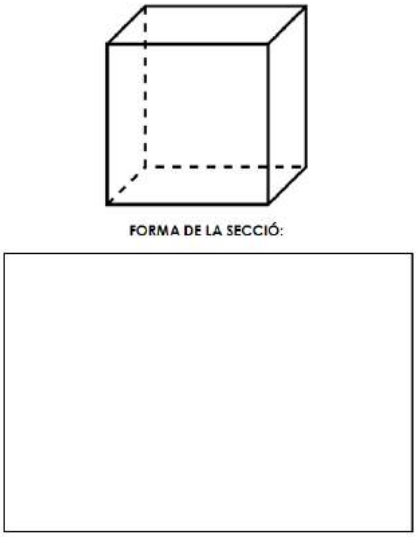


Figura 3: Plantilla per respondre a les activitats plantejades per a seccions.

En la primera activitat se'ls va presentar als alumnes els cubs mostrats en la Figura 4. A partir d'aquests cubs els alumnes havien de dibuixar la secció en el cub representat en el paper i també, la seua forma.

1ª PART DE L'ACTIVITAT

	1	2	3	4
Cub físic				
Forma de la secció				

2ª PART DE L'ACTIVITAT

	5	6	7
Cub físic			
Forma de la secció			

Figura 4: Cubs físics i la forma de la secció presentats en la primera activitat de seccions.

En la segona activitat se'ls indicava als alumnes la forma de la secció (p. ex. quadrat, rectangle i pentàgon) i ells havien de buscar la manera de seccionar el cub per obtenir aquesta forma a través d'un software informàtic (GeoGebra), tal i com podem observar en la Figura 7. També havien de dibuixar la secció en el cub representat en el paper.

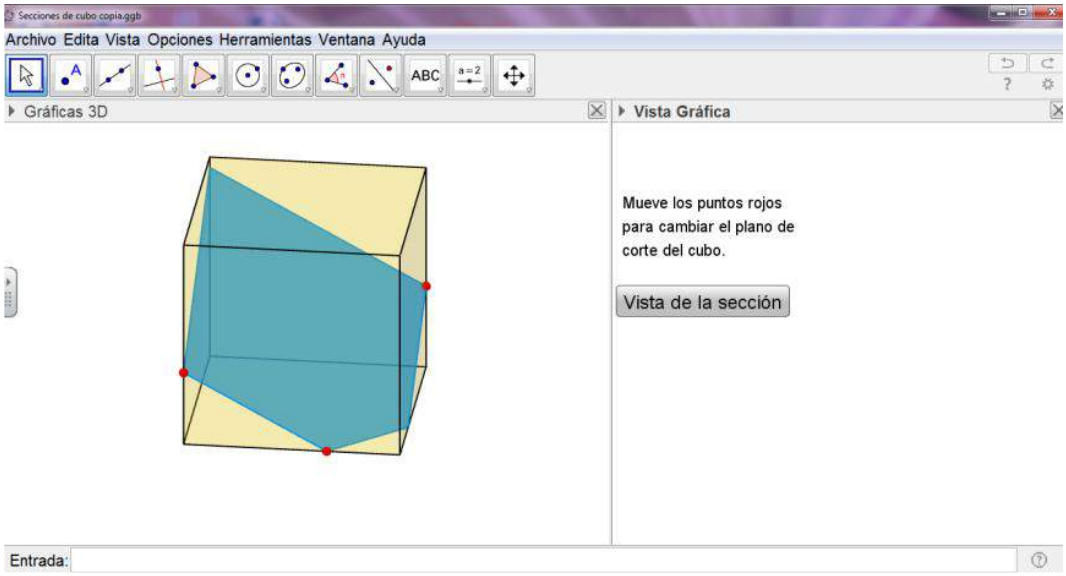
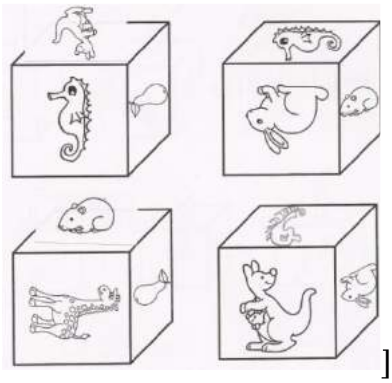


Figura 5: Software informàtic (GeoGebra) utilitzat en la segona activitat de seccions.

En aquestes activitats els alumnes han d'intentar imaginar-se quina forma tindria la secció si tallaren el cub pel plànol indicat i dibuixar-la.

A continuació mostrem la resposta de l'Alumne 9 a l'activitat de rotacions, on demostra utilitzar els diferents tipus de raonaments descrits per Krutetskii (1976). Aquest autor va identificar diversos graus d'us de la visualització en la resolució de tasques matemàtiques i va diferenciar tres tipus d'estudiants: analític, geomètric i harmònic, segons prefereixen resoldre les activitats de manera lògica (analític), usant el raonament visual (geomètric) o fins i tot, usant ambdós raonaments, predominant el visual (harmònic).

Alumne 9 [Entrevista] [Activitat 2 de rotacions] [Resposta de l'alumne a l'activitat:

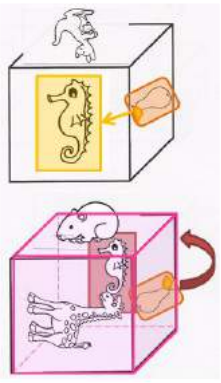
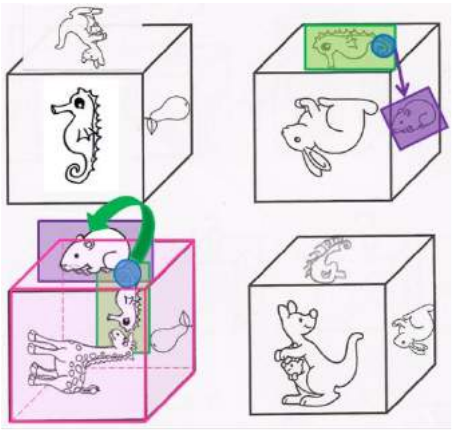

]

A9: *Primer he agafat el cavallet de mar*. *Aleshores l'he posat ahí* [cara superior del 4t cub] *perquè aquí* [2n cub] *coincideix amb les potes del conill. Aleshores ahí* [4t cub] *tindria que ser amb les potes del conill, no? I m'he fixat que en el cap* [del cavallet del 4t cub], *vale? Estava el cangur. Aleshores l'he posat ahí* [1r cub] *també.*

M: *Com has sabut la posició exacta del cangur* [1r cub]*?*

A9: *Perquè m'he imaginat això* [gira el full] *i seria com donar-li la volta a això* [cangur i cavallet del 4t cub] *i seria igual que això* [cangur i cavallet del 1r cub].

M*: I ací* [3r cub] *com has sabut que anava el hàmster?*

A9*: Perquè la pera estava ahí* [assenyalant la del 1r i 3r cub], *no? I donant el d'això* [la fulla de la pera cap al cavallet de mar] [...] *que estaria el cavallet de mar ahí darrere* [cara oposada de la girafa en el 3r cub ], *no?* [...] *I cap avall* [posició del cavall de mar al revés en el 3r cub]. *Aleshores això* [cavall de mar del 2n cub] [...] *la cua* [del cavallet en el 2n cub] *amb el cap del hàmster* [2n cub]. *Aleshores si el cavallet de mar està baix* [3r cub] *donat la volta, la cua* [del cavallet de mar] *coincidia amb el coll del hàmster* [3r cub ].

Es pot observar en aquest fragment de la transcripció que l'Alumne 9, per situar correctament les figures en les cares buides, usa els diferents tipus de raonaments definits per Krutetskii (1976). D'una banda, usa un raonament analític, ja que es fixa en la posició de les figures i en els detalls en els que coincideixen aquestes. D'una altra, també usa el geomètric o visualitzador, ja que per poder realitzar aquestes relacions és necessari imaginar-se el cub, fet que manifesta quan diu "*perquè m'he imaginat això* [girant el full] *i seria com donar-li la volta a això* [cangur i cavallet del 4t cub] *i seria igual que això* [cangur i cavallet del 1r cub]". Per tant, en aquest sentit, usa ambdós tipus de raonaments i es pot considerar un alumne amb un raonament harmònic.

En les activitats dissenyades els alumnes han posat de manifest els diferents tipus de raonament de Krutetskii (1976), tal i com hem observat en l'exemple anterior. Hem pogut veure que hi ha alumnes que prefereixen o usen predominantment un tipus de raonament o un altre. Així mateix, també hem analitzat les habilitats de visualització descrites per Del Grande (1990) a partir de les respostes dels

alumnes. Aquest autor presenta 7 habilitats, de les quals hem analitzat les 5 que podem observar en la Taula 1.

Habilitats de visualització	Definició
Identificació visual	És l'habilitat per reconèixer una figura aïllant-la del seu context. S'utilitza quan la figura està formada per diverses parts, com en els mosaics, o quan hi ha diverses figures superposades.
Conservació de la percepció	És l'habilitat per reconèixer que un objecte manté les seues propietats encara que deixe de veure's total o parcialment, per exemple perquè s'haja girat o ocultat, o encara que es vega deformat a causa de la influència de la perspectiva en un canvi de posició.
Reconeixement de posicions en l'espai	És l'habilitat per relacionar la posició d'un objecte en un mateix (l'observador) o amb un altre objecte, que actua com a punt de referència.
Reconeixement de les relacions espacials	És l'habilitat que permet identificar correctament les característiques de relacions internes entre diversos objectes situats en l'espai.
Discriminació visual	És l'habilitat que permet comparar diversos objectes identificant les seues semblances i diferencies visuals.

Taula 1: Definició de les habilitats de visualització analitzades (Del Grande, 1990)

Aquest anàlisi ens ha donat a conèixer que aquestes activitats sí que han permès que els alumnes s'imaginen mentalment els cubs, rotant-los o seccionant-los. A la Taula 2 podem observar el nombre total de manifestacions correctes o incorrectes de les habilitats de visualització proposades per Del Grande (1990) que han mostrat els alumnes d'aquesta investigació durant la realització de les activitats dissenyades per a rotacions i seccions.

	Correctes	Incorrectes	TOTAL
ROTACIÓ	73	5	78
SECCIONS	123	45	168

Taula 2: Número de manifestacions correctes i incorrectes de les habilitats de visualització (Del Grande, 1990) en les activitats de rotacions i seccions.

En la Taula 2 podem observar que el tipus d'activitats que ha permès un major número de manifestacions de les habilitats ha sigut el de seccions. Cal destacar que aquestes dades són obtingudes de l'anàlisi de respostes de 10 dels estudiants que han participat en aquesta experimentació. Per tant, són dades molt concretes, i en funció del grup, poden variar. D'aquestes dades hem pogut comprovar que aquestes activitats sí que permeten als estudiants posar de manifest les diferents habilitats de visualització i per tant, desenvolupar-les.

3. Conclusió

Després de l'anàlisi de les respostes dels alumnes que van formar part de la investigació, podem afirmar que aquestes activitats faciliten que els estudiants posen en pràctica les habilitats de visualització (Del Grande, 1990). Les activitats es van experimentar en alumnes amb diferents graus de talent matemàtic, com ja hem indicat: 20 alumnes d'un grup-classe i una alumna ja identificada amb talent matemàtic. Ens vam adonar que els alumnes manifestaven les habilitats de visualització en major o menor grau, i tal i com afirma Krutetskii (1976) vam trobar alumnes que preferien resoldre les activitats de manera lògica (analítics), altres usant el raonament visual (geomètrics) o fins i tot, usant ambdós raonaments, predominant el visual (harmònics).

Una altra conclusió d'aquesta investigació ha sigut que tots els alumnes de l'experiment que van manifestar una alta visualització obtenien alts resultats en l'assignatura de matemàtiques. No obstant això, aquesta relació no es compleix a la inversa.

A l'escola, en l'aula ordinària, es fomenta predominantment el raonament analític o lògic. Per tant, la nostra intenció és posar de manifest que hi ha alumnes visualitzadors als quals hem de proporcionar ferramentes o activitats com les que es proposen en aquest taller que ajuden a tots els alumnes a desenvolupar les habilitats de visualització, ja que aquesta habilitat és considerada com un element de la competència matemàtica (Ramírez, 2012). La finalitat última d'aquest taller és que els professors presten l'atenció específica que necessita cada alumne i en aquest sentit, que treballen en les seues classes les diferents formes de raonament proposades per Krutetski (1976).

Així mateix, un dels propòsits d'aquesta investigació també és donar a conèixer que la visualització és important a l'hora d'identificar els alumnes amb talent matemàtic, ja que alumnes amb talent que usen raonaments predominantment geomètrics poden passar desapercebuts i no ser identificats quan resolen tests basats en raonaments analítics. La finalitat de la identificació d'aquests alumnes és oferir-los una instrucció educativa adequada, i per aquest motiu, és important conèixer quin tipus de raonament utilitzen (analític, geomètric o harmònic). Considerem que aquests tipus de raonament es poden identificar mitjançant activitats com les proposades en aquest taller.

Referències bibliogràfiques

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher, 37*(6), 14-20.

Gonzato, M. (2013). *Evaluación de conocimientos de futuros profesores de educación primaria para la enseñanza de la visualización espacial* (Tesi doctoral). Granada: Universitat de Granada, Departament de Didàctica de la Matemàtica.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago: Universitat de Chicago Press.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (Tesi doctoral). Granada: Universitat de Granada, Departament de Didàctica de la Matemàtica.

PROBLEMES DE MATEMÀTIQUES AMB LA CASIO FX 991 CLASSWIZ

Ricard Peiró i Estruch
ricardpe@gmail.com
IES Abastos – València

Modalitat: Taller
Nivell educatiu: Secundària, batxillerat
Paraules clau: Resolució problemes, calculadora científica

RESUM

La calculadora Casio fx 991 SPX iberia Classwiz permet provar la conjectura d'un problema, resoldre equacions. Aquests processos porten implícits procediments d'anàlisi i modelització, comprovació, experimentació, i investigació, procediments que motiven l'activitat constructiva de l'alumnat. En aquest taller resoldrem distints problemes de matemàtiques.

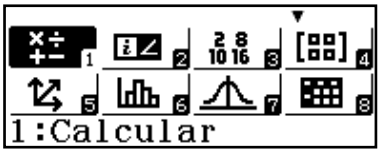
0. INTRODUCCIÓ

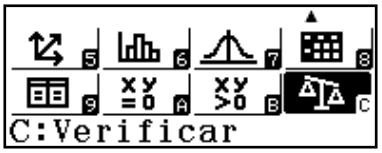
La resolució de problemes comporta un aprenentatge dels processos matemàtics tals com conjecturar, particularitzar-generalitzar, abstraure, provar, establir connexions, però també conéixer teories, algoritmes i saber establir relacions.

Polya indica quatre fases en la resolució d'un problema:

1) Entendre el problema.
2) Crear un pla.
3) Portar a terme el pla o estratègia.
4) Revisar i interpretar el resultat.

Els menús de la calculadora són molt intuïtius.





La introducció de la calculadora en l'aula, comporta un gran canvi metodològic. Permet l'anàlisi dels resultats agilitant els processos de càlcul i ajuden a la visualització de situacions difícils d'abstraure a partir d'una expressió verbal o a la pissarra.

Una possibilitat que té la calculadora és la utilització del codi *QR* que permet utilitzar la web de Casio per representar gràficament funcions així com gràfiques estadístiques.

Els problemes són extrets d'olimpíades de secundària nacionals i internacionals.

La calculadora també té un emulador per als ordinadors que permet al professorat donar una explicació molt més fluïda sobre el procediment d'utilització de la calculadora.

1. ENUNCIATS

Problema 1. Paràbola que passa per tres punts.

a) Determineu la paràbola que passa pels punts $(-2,3)$, $(2,1)$, $\left(3,\frac{7}{4}\right)$.

b) El punt $(4,7)$ pertany a la paràbola.

c) Dibuixeu la paràbola.

Problema 2

Quin és el menor nombre natural que al multiplicar-lo per 1176 s'obté un quadrat perfecte? Quin és el quadrat perfecte?

Problema 3

Donada la fracció $\frac{4}{5}$ sumem 12 al numerador. Què hem de sumar al denominador a fi que resulta la mateixa fracció inicial $\frac{4}{5}$.

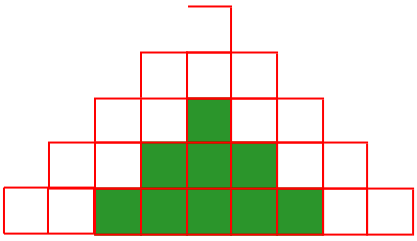
Problema 4

Quina és la darrera xifra de 3^{126} (xifra d'unitats)?

Problema 5

Cleopatra construeix piràmides començant pel cim.

N'ha dibuixat una de 32 pisos (en la figura hi ha una de cinc pisos) acolorint de la forma que es veu començant pel tercer pis.



Quina és la diferència entre els quadrats verds i els blanc utilitzats.

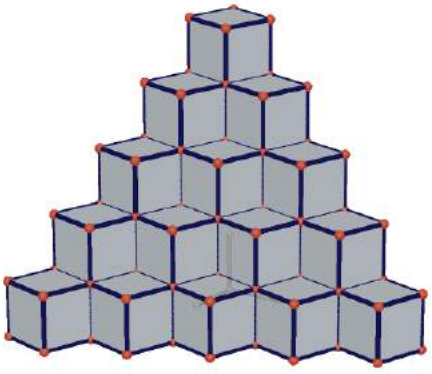
Concurs de Primavera 2015. Nivell 3. Segona fase.

Problema 6. Torre de cubs.

Aquesta torre està feta amb 35 cubs i té 5 capes.

Quants cubs ens calen per construir una torre de 10 capes?

Quants cubs ens calen per construir una torre de 100 capes?



Problema 7

Pere va escriure els primers 2015 naturals en una taula de 100 × 100, tal com es mostra a la figura. (A la figura, la taula no s'ompli completament)

Quin és l'últim nombre de la segona fila?

KöMaL, K489.

1	3	6	10	15	21	...
2	5	9	14	20		
4	8	13	19			
7	12	18				
11	17					
16						
⋮						

3. SOLUCIONS



Problema 1: Paràbola que passa per tres punts.

a) Determineu la paràbola que passa pels punts $(-2, 3)$, $(2, 1)$, $\left(3, \frac{7}{4}\right)$.

b) El punt $(4, 7)$ pertany a la paràbola.

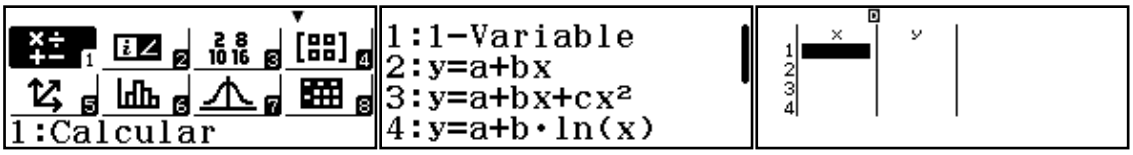
c) Dibuixeu la paràbola.

Solució:

Procediment 1

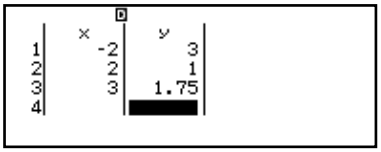
Obriu el menú d'estadística. Regressió quadràtica:

MENU 6 3



Introduïu les coordenades dels punts:

(−) 2 = 2 = 3 = ▲ ▲ ▲ ▶ 3 = 1 = 7 ▤ 4 =



Calculeu la regressió quadràtica:

OPTN 4



La funció és $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$.

Procediment 2

Siga la paràbola $y = ax^2 + bx + c$. Els tres punts pertanyen a la paràbola, aleshores, satisfan la seua equació:

$$(-2)^2 a - 2b + c = 3$$

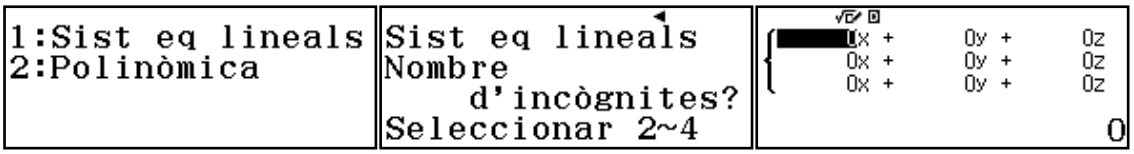
$$2^2 a + 2b + c = 1$$

$$3^2 a + 3b + c = \frac{7}{4}$$

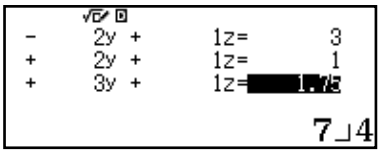
Resoldrem el sistema format per les tres equacions lineals.

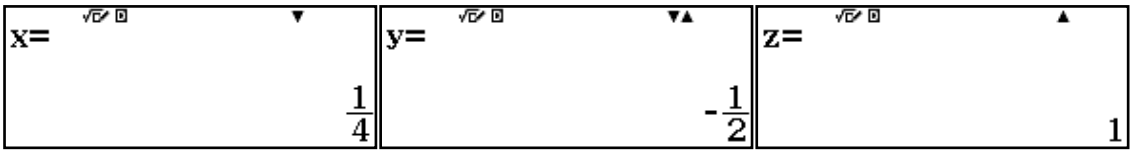
Obriu el menú equacions lineals (3 incògnites):

MENU (−) 1 3



Introduïm els coeficients i termes independents i resolem:

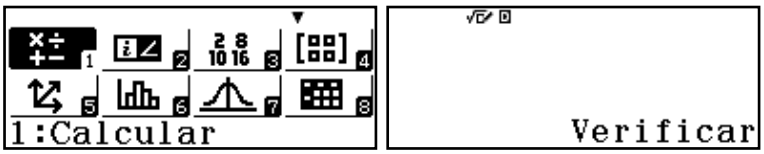




La funció és $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$.

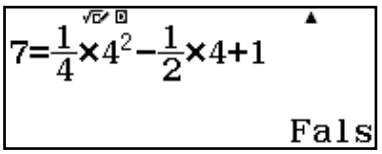
Obriu el menú verificar:

MENU x^{-1}



Vegem si $7 = \frac{1}{4} \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 + 1$:

7 OPTN 1 1 ▼ 4 ▶ × 4 x^2 − 1 ▼ 2 ▶ × 4 + 1 =

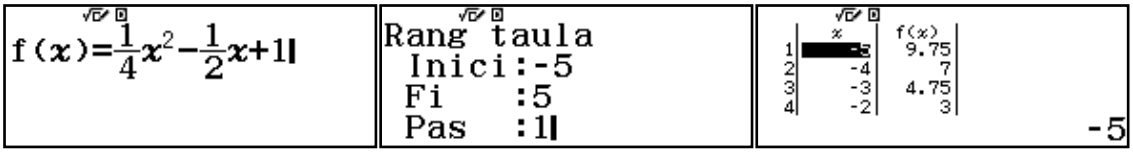


Aleshores, el punt $(4, 7)$ no pertany a la paràbola.

Obriu el menú de funcions i representeu la funció:

MENU 9 ▤ 1 ▼ 4 ▶ x x² − ▤ 1 ▼ 2 ▶ x + 1

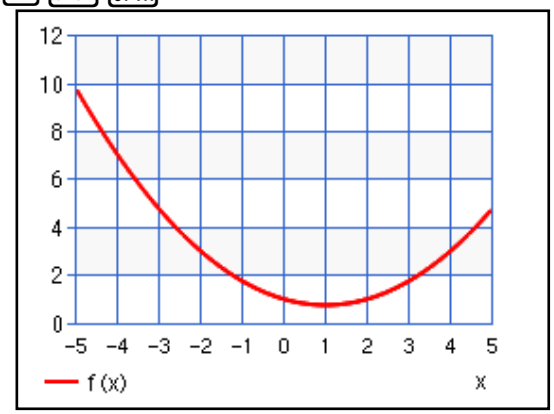
= (−) 5 = 5 = 1 = =



Seleccioneu el codi QR.

= (−) 5 = 5 = 1 = = SHIFT OPTN





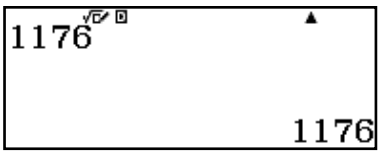
Problema 2

Quin és el menor nombre natural que al multiplicar-lo per 1176 s'obté un quadrat perfecte? Quin és el quadrat perfecte?

Solució:

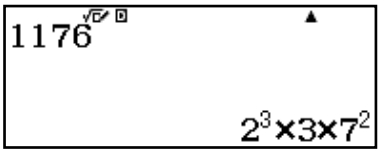
Introduïm el nombre 1176

1 1 7 6 =



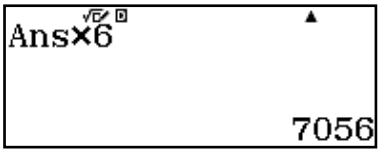
Factoritzem el nombre:

SHIFT ∘,,,



Notem que hem de multiplicar el nombre per $2 \cdot 3 = 6$.

Ans × 6 =



Hem de multiplicar per 6 i el quadrat perfecte és 7056.

Problema 3

Donada la fracció $\frac{4}{5}$ sumem 12 al numerador. Què hem de sumar al denominador a fi que resulta la mateixa fracció inicial $\frac{4}{5}$.

Solució:

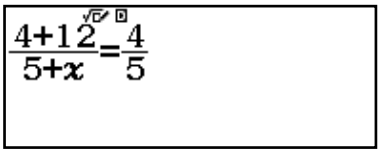
Siga *x* el nombre que sumem al denominador:

$$\frac{4+12}{5+x}=\frac{4}{5}$$

Resoldrem l'equació amb la calculadora.

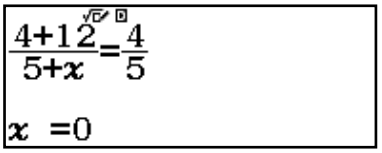
Introduïm l'equació en la calculadora:

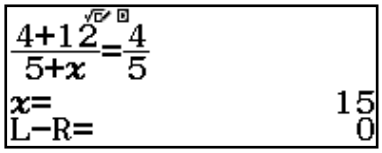
[▤] [4] [+] [1] [2] [▼] [5] [+] [x] [▶] [ALPHA] [CALC] [▤] [4] [▼] [5]



Resoldre l'equació amb la llavor $x=0$.

[SHIFT] [CALC] [0] [=] [=]





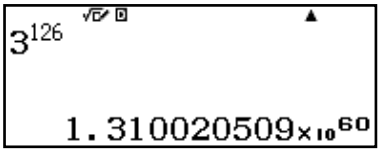
La solució és: $x=15$

Problema 4

Quina és la darrera xifra de 3^{126} (xifra d'unitats)?

Solució:

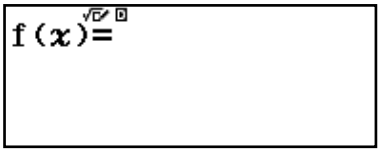
Si efectuem l'operació amb la calculadora:



Ens dóna una aproximació del resultat però no puc veure la darrera xifra.

Utilitzem la taula de la funció $f(x)=3^x$ amb valors naturals per veure si hi ha un patró amb els resultats.

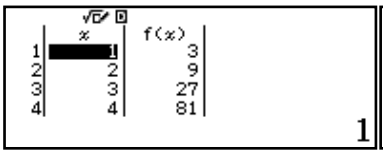
[MENU] [9]

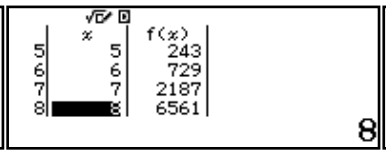


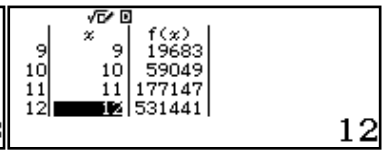
[3] [$x^{\blacksquare}$] [x] [=] [1] [=] [3] [0] [=] [1] [=] [=]











Notem que les darreres xifres de les potències segueixen la seqüència:

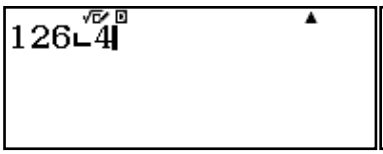
$$3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1\ldots$$

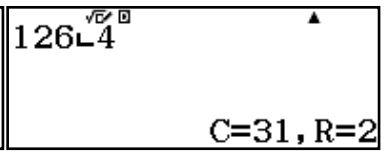
Es repeteixen de 4 en 4.

Determinem el residu de dividir $126 : 4$.

[MENU] [1]

[1] [2] [6] [ALPHA] [▤] [4] [=]





El residu és 2.

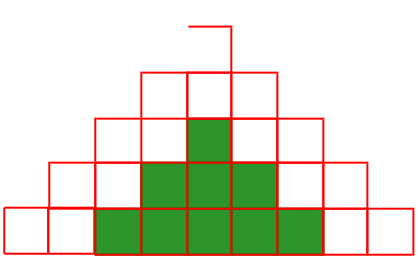
La darrera xifra de 3^{126} és la mateixa que $3^2 = 9$.

La darrera xifra de 3^{126} és 9.

Problema 5

Cleopatra construeix piràmides començant pel cim.

N'ha dibuixat una de 32 pisos (en la figura hi ha una de cinc pisos) acolorint de la forma que es veu començant pel tercer pis.



Quina és la diferència entre els quadrats verds i els blanc utilitzats.

Concurs de Primavera 2015. Nivell 3. Segona fase.

Solució:

La piràmide de 32 pisos té (entre blancs i verds)

$1+3+5+\ldots$ La suma dels 32 primers imparells.

Utilitzant en la calculadora Casio 991 Classwiz, la funció de sumes finites:

SHIFT x 2 x − 1 ▶ 1 ▶ 3 2 =

$\sum_{x=1}^{32}(2x-1)$ | $\sum_{x=1}^{32}(2x-1)$ 1024

Hi ha 1024 quadrats blancs i verds.

El nombre de quadrats verds és igual a la suma dels 30 primers imparells:

SHIFT x 2 x − 1 ▶ 1 ▶ 3 0 =

$\sum_{x=1}^{30}(2x-1)$ | $\sum_{x=1}^{30}(2x-1)$ 900

El nombre de quadrats verds és 900.

El nombre de quadrats blancs és:

1024−900 124

La diferència entre els quadrats verds i blancs és:

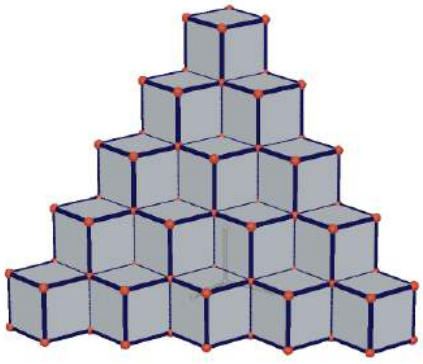
900−124 776

Nota: els quadrats blancs formen una successió constat de 31 termes: 4, 4, 4,

31×4 124

Problema 6. Torre de cubs.

Aquesta torre està feta amb 35 cubs i té 5 capes.



Quants cubs ens calen per construir una torre de 10 capes?.

Quants cubs ens calen per construir una torre de 100 capes?

Solució:

Començant per la capa superior:

Núm capa *n*	1	2	3	4	5	*n*
Núm. cubs en la capa *n*	1	3	6	10	15	
Total de cubs en la capa *n*	1	4	10	20	35	

El nombre de cubs per capa segueix la successió de nombres triangulars:

El terme general és:

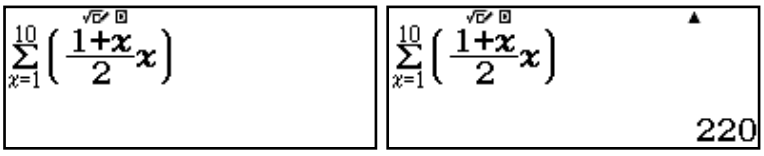
$$\frac{1+n}{2}n$$

El total de cubs fins la capa $n=10$ és igual a la suma dels cubs de les $n=10$ capes:

Utilitzarem la funció de sumes finites.

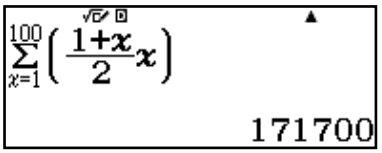
SHIFT x ▤ 1 + x ▶ 2 ▶ x ▶ 1 ▶ 1 0

=



Calen 220 cubs.

El total de cubs fins la capa $n=100$ és igual a la suma dels cubs de les $n=100$ capes:



Calen 171700 cubs.

Problema 7.

Pere va escriure els primers 2015 naturals en una taula de 100 × 100, tal com es mostra a la figura. (A la figura, la taula no s'ompli completament)

1	3	6	10	15	21	...
2	5	9	14	20		
4	8	13	19			
7	12	18				
11	17					
16						
⋮						

Quin és l'últim nombre de la segona fila?

KöMaL, K489.

Solució:

Els termes de la primera fila són els nombres triangulars:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,\ldots\ldots\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

La segona fila és la successió:

$$2, 5, 9, 14, 20, 27\ldots$$

Les diferències de dos termes consecutius és:

$$3, 4, 5, 6, 7\ldots$$

La diferència de dos termes consecutius de les diferències és:

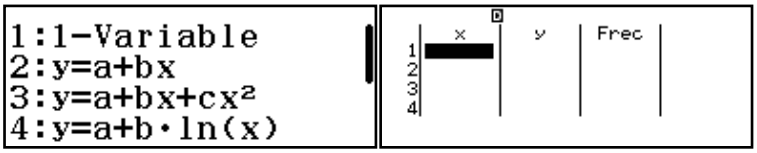
$$1, 1, 1, 1\ldots$$

És una successió aritmètica de segon ordre.

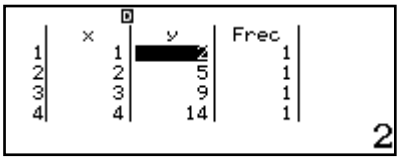
Vegem si la successió és un polinomi de segon grau.

Obrim el menú estadística de dues variables, regressió quadràtica:

MENU 6 3

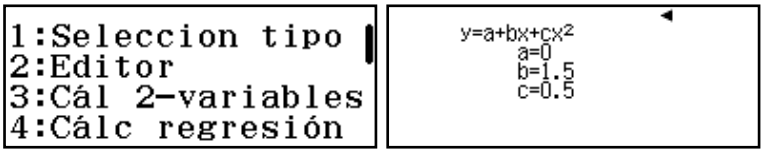


Introduïm les dades en la calculadora: en *x* els nombres naturals i en *y* els termes de la successió.



Obrim opcions *Càlcul regressió*:

OPTN 4



El terme general de la successió és:

$$\left\{0.5n^2+1.5n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

El darrer terme de la fila ha de ser menor o igual que 2015:

$$\frac{n^2+3n}{2}\leq 2015$$

Resolem l'equació:

$$\frac{n^2+3n}{2}=2015$$

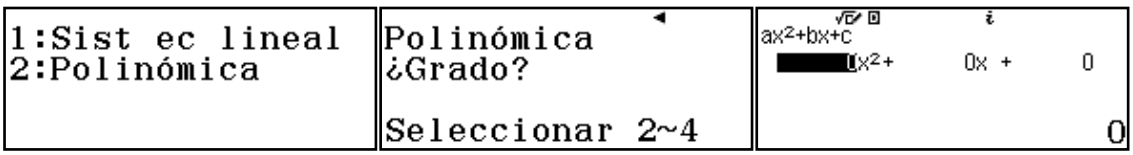
Simplificant-la:

$$n^2+3n-4030=0$$

Obriu el menú equacions:

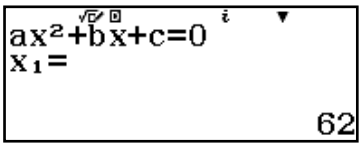
MENU ALPHA (−)

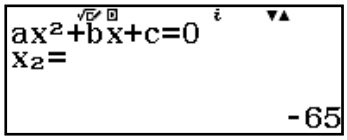
2 2



Introduïu els coeficients i resoleu:

1 = 3 = (−) 4 0 3 0 = = =





La solució és natural.

En la segona fila el lloc 62 és ocupat pel 2015.

Nota: El problema és de preparació per a l'olimpíada KöMaL, Hongria, gener 2016. Problema *K489.* Nivell secundari.

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

AA.VV. (1996). *Competencias Matemáticas en Estados unidos*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 11. Madrid.

AA.VV. (1998). *Matemáticas Recurrentes.* Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 13. Madrid.

COXETER, H.S.M. (1994). *Retorno a la geometría.* Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 1. Madrid. HERNÁNDEZ GÓMEZ,J. DONAIRE MORENO,J.J. (2006). *Concurso intercentres de matemáticas*. Ed. Nivola. Madrid.

GARDINER, T. (1996). *Mathematical Challenge.* Ed Cambridge University Press.

GARDINER, T. (1997). *More Mathematical Challenges.* Ed Cambridge University Press.

GARDINER, T. (2002). *Senior Mathematical Challenge.* Ed Cambridge University Press. GÚSIEV, V. i altres, (1989). *Prácticas para resolver problemas matemáticos. Geometría.* Editorial Mir. Moscou.HERNÁNDEZ GÓMEZ,J. DONAIRE MORENO,J.J. (2007). *Desafíos de geometría 1.* Nivola. Madrid.

HALMOS, PAUL. (2000). *Problèmes pour mathématiciens petits et grands.* Ed. Cassini. París.

HERNÁNDEZ GÓMEZ,J. DONAIRE MORENO,J.J. (2008). *Desafíos de geometría 2*. Nivola. Madrid.

LIDSKI V. i altres. (1983) *Problemas de matemáticas elementales.* Ed Mir. Moscou.

Mathematical Association of America. (1996). *Concursos de matemáticas. Geometría*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 8. Madrid.

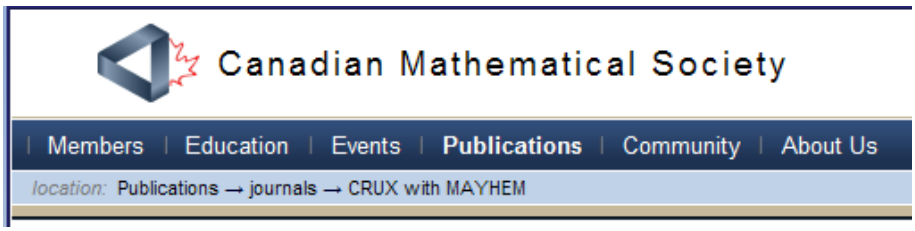
Mathematical Association of America. (1996). *Concursos de matemáticas. Algebra, Teoría de Números, Trigonometría*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 9 y 10. Madrid.

NELSEN, R.B. (2001) *Demostraciones sin palabras.* Ed. Proyecto Sur.

POSAMENTIER, A.S., SALKIND, C.T. (1988). *Challenging Problems in Geometry.*Dover Publications, inc. NY.

SHARIGUIN, I.(1986). *Problemas de geometría. Planimetría*. Editorial Mir. Moscou.

Pàgines Web:



http://cms.math.ca/crux/

Revista Crux Mathematicorum, Societat Canadenca de Matemàtiques.

Problemes Olímpics de tots els nivells. Publiquen 10 números a l'any.

Idioma: Anglés i francés.



http://www.komal.hu/info/bemutatkozas.e.shtml

Revista KöMaL. Societat Hongaresa de Física i Matemàtiques.

Problemes olímpics de tots els nivells. Publiquen 8 números a l'any.

Idioma: Anglés i magiar.



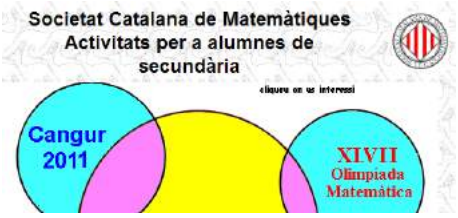
http://www.obm.org.br/opencms/

Pàgina de l'Olimpíada brasileira de matemàtica.

Informació sobre les proves.

Revista de problemes EUREKA. Dos nivells de problemes.

Idioma: Portugués.



http://www.cangur.org/index.htm

Proves Cangur. Bases de la prova.

Són proves estatals i internacionals. La Societat Catalana de Matemàtiques té una pàgina amb els enunciats de distints anys. Aquesta prova també és celebra al País Valencià.

Nivells: quatre nivells·3r ESO, 4t ESO, 1r Bat., 2n Bat.

Idioma: Català.



http://www.semcv.org/

Societat d'Educació matemàtica Al-Khwarizmi.

Publica la revista Problemes Olímpics.

Alguns del números es poden descarregar en format pdf.

Nivells: 2n cicle primària, 1r cicle Eso, 2n Cicle Eso.

Idioma: Català.



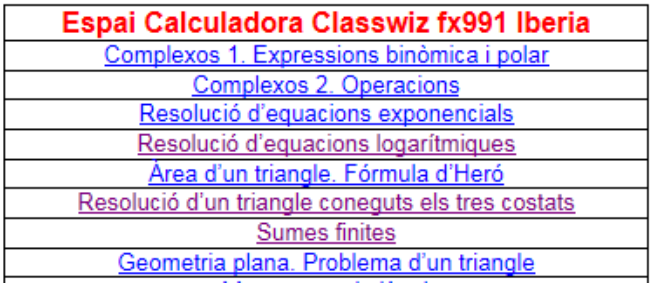
http://www.sociedadpuigadam.es/primavera/index_nuevo12.php

Concurso de Primavera de la societat. Universidad Complutense de Madrid.

Publica els enunciats de les fases primera i segona.

Publica els llibres (amb les solucions) dels problemes dels distints concursos que es fan a Madrid.

Nivells: 2n cicle primària, 1r cicle Eso, 2n Cicle Eso, Batxillerat.



http://www.ricardpeiro.es/apunts/apunts.htm

Fitxes d'utilització de la calculadora Casio 991 classwiz en format pdf.

COM TRAURE-LI LA LLENGUA A LES MATES, DES DE LES CIÈNCIES SOCIALS

Enric Ramiro Roca
enricramiroroca@gmail.com
Universitat Jaume I de Castelló. Departament d'Educació - Castelló

Modalitat: Taller
Nivell educatiu: Multinivell
Paraules clau: Matemàgia, educació, didàctica, llengua, ciències socials

RESUM

L'objectiu del taller és compartir recursos amb els matemàtics per a enamorar de les matemàtiques als no matemàtics. El contingut és un conjunt d'exercicis matemàgics aplicats a diversos nivells (des d'infantil fins alumnes de magisteri) i des de les ciències socials com geografia, història i art, però també interculturalitat, música, llengua...

On es pretén arribar és a demostrar que les matemàtiques poden ser divertides, agradables, atractives i útils, al temps que poden estar presents en totes les matèries per a alegrar-nos la vida.

0. INTRODUCCIÓ

Per la nostra experiència personal, les matemàtiques han estat sempre acompanyades de problemes, maldecaps, incerteses i nervis. Quan fèiem bé el procés, ens equivocàvem en el resultat, i quan el número quadrava encertadament no havíem desenvolupat bé tot el camí, o no era correcta la metodologia emprada o intentàvem fer de memòria o per aproximació les arrels quadrades i ens resultava malament.

Però no era un problema personal sinó més aviat col·lectiu. I a l'arribar a casa encara era pitjor perquè era l'assignatura estrella per a poder viure i tindre cultura, quasi al mateix nivell que el no fer faltes d'ortografia. Si se suspenia música, educació física, dibuix o inclús les socials, podia perdonar-se.

Malgrat tot i com ens volíem dedicar a la química, no tinguérem més remei que optar per les ciències i en el batxillerat vingué l'hecatombe al tindre a un professor de matemàtiques que amb les seues formes i maneres ens reconduí cap a les lletres amb un gran descans per a tots.

Però el temps tot ho cura i farà una quinzena d'anys, vàrem tindre la singularitat d'anar a impartir cultura a una Escola d'Adults en una plaça que era de Coneixement del Medi i Matemàtiques. La necessitat de fer entendre aquesta darrera matèria a un col·lectiu no massa predisposat, feu que ens animàrem a la recerca innovadora i descobrírem la Matemàgia. Poc a poc l'endinsàrem en un món totalment desconegut en el seus inicis i trobàrem una professora especialista en matemàtiques: Pilar Gandia Esteve de l'IES Consuelo Aranda d'Alberic, vertadera artífex de l'aventura. Els dos férem un grup i durant uns anys participàrem en diversos concursos de projectes d'innovació educativa per a Conselleria d'Educació de la Generalitat Valenciana seguint aquesta línia. L'èxit en la seua experimentació

al llarg dels cursos, feu que els oferírem a companys i companyes de tot l'estat a través de cursos de formació i congressos.

En aquest article explicarem el marc general de la nostra proposta, amb unes breus pinzellades sobre la metodologia emprada i els continguts desenvolupats. En la segona part mostrarem un exemple d'exercici de matemàgiaper a secundària relacionada amb les ciències socials, i en l'annex, un exemple que es pot adaptar perfectament a infantil i primer cicle de primària de forma més globalitzada.

L'experimentació del projecte ens ha permésredissenyar els nostres materials, gràcies a centenars de professors de diferents comunitats autònomes: Catalunya, País Valencià i Illes Balears, en la versió en valencià; i Múrcia, Castella la Manxa, Andalusia, Madrid i Illes Canàries, en la versió en castellà. Igualment, hem d'agrair l'exquisida ajuda de professors com Fernando Blasco (Madrid), Pedro Alegría (Euskadi), Lluís Segarra (Catalunya), Pepe Muñoz (Andalusia), Alberto Coto (Astúries) Manolo Simón i Paco González (País Valencià). A tots ells, moltes gràcies.

1. ESQUEMA DEL PROJECTE

Bàsicament el nostre projecte ha consistit en una selecció de jocs de matemàgia, i la seua adaptació didàctica mitjançant la redacció d'una fitxa per al professor i una per a l'alumne, en base als blocs que tot seguit detallem i que reuneixen més de dues centes propostes:

1. Targetes d'endevinar números (llistes de números concrets en diversos formatsde targetes)
2. Endevinar aspectes personals (número de grandària de sabata, edat, telèfon, biografia...)
3. Endevinar aspectes complementaris (diners a la butxaca, sèries de bitllets, dies de la setmana, germans...)
4. Endevinar números (números secrets, sumes ràpides, xifres de codis de barres, número pensat, Fibonacci, parells i senars...)
5. Amb calculadora
6. Forats negres
7. Baralla de cartes (sempre que foren automàtics, sense preparació)
8. Daus i dòminos
9. Amb les mans (Moèbius, papers doblegats, cors, granotes, rellotges...)
10. Monedes i taps
11. Llengua
12. Topologia espacial amb cordes
13. Humor i matemàtiques
14. Altres (tot allò que no vàrem poder encabir en els anteriors apartats).

2. DESCRIPCIÓ DEL MATERIAL

El material es va confeccionar pensant bàsicament per a l'alumnat d'ESO, encara que també es pot utilitzar en altres nivells, com Batxillerat, o fins i tot, Primària, segons el nivell de matemàtiques que tinguen i segons també els objectius que ens

proposem. De fet, una mateixa activitat es pot treballar simplement com a motivadora, en un segon nivell com a manipulativa sense explicar els fonaments, en un tercer esglaó explicant tot el procés i en una quarta fase demanar que sobre eixa base, es confeccionen altres variants creatives.

El model bàsic que presentem i que hem oferit, és el següent:

- Model de full d'avaluació per a l'alumnat: mig full que omplirà l'alumnat després de realitzar l'activitat en classe. És vàlid per a qualsevol fitxa (veure figura 1).
- Model de full d'avaluació per al professorat: és un full que omplirà el professorat després de realitzar l'activitat amb l'alumnat. És vàlid per a qualsevol fitxa (veure figura 2).
- Model de fitxa per al professorat: per a diferenciar-les de les de l'alumnat, les identifiquem mitjançant una P de "Professorat" (exemple: 2.1-P. ENDEVINA L'EDAT). Conté l'activitat a realitzar, i està descrita i realitzada en els següents passos: Procediment, Solució, Exemple, Explicació i Font (aquestes dues últimes són l'única diferència amb la fitxa de l'alumnat).

  En alguns casos la mateixa activitat està desenvolupada en diverses fitxes amb xicotetes variacions. Totes porten el mateix nom i duen números correlatius.

AVALUACIÓ DE LA FITXA Núm: ..... CENTRE EDUCATIU: .....

Estic cursant:
☐ 1r ESO ☐ 2n ESO ☐ 3r ESO ☐ 4t ESO ☐ Altres:.....

Aquesta activitat la faig en l'assignatura:
☐ Matemàtiques ☐ Taller de Mat ☐ Reforç ☐ Altra:.....

Temps dedicat a la fitxa:
☐ He fet l'activitat de seguida ☐ M'ha costat molt fer l'activitat

He entés la fitxa?
☐ SI
☐ NO. En els apartats: ☐ Procediment ☐ Solució ☐ Exemple

Nivell del contingut de la fitxa:
☐ Molt fàcil ☐Fàcil ☐ Moderat-Alt ☐ Difícil

L'activitat m'ha semblat:
☐ Avorrida ☐ Entretinguda ☐ M'ha agradat molt

M'agradaria fer més activitats d'aquest tipus: ☐ SI ☐ NO

Observacions:

Figura 1. Model de full d'avaluació de l'alumne

- Model de fitxa per a l'alumnat: per a diferenciar-les de les del professorat, les identifiquem mitjançant una A de "Alumnat" (exemple: 2.1-A. ENDEVINA L'EDAT). Conté l'activitat a realitzar, i està descrita i realitzada en els següents passos: Procediment, Solució i Exemple.

  En alguns casos la mateixa activitat està desenvolupada en diverses fitxes amb xicotetes variacions. Totes porten el mateix nom i duen números correlatius.

AVALUACIÓ DE LA FITXA Núm.....

CENTRE EDUCATIU: ..... DATA:.....

Nivell de l'alumnat:
☐ 1r ESO ☐ 2n ESO ☐ 3r ESO ☐ 4t ESO ☐ Altres:.....

Assignatura:
☐ Matemàtiques ☐ Taller de Mat ☐ Reforç ☐ Altra:.....

Total d'alumnat que ha treballat la fitxa:

Temps utilitzat (en minuts, aproximadament):

El títol de la fitxa et pareix adequat?
☐ SI
☐ NO. Com a alternativa posaria .....

L'explicació de la fitxa és clara i comprensible?
☐ SI
☐ NO. En els apartats: ☐ Procediment ☐ Solució ☐ Explicació ☐ Exemple

El nivell del contingut de la fitxa respecte a l'alumnat ha estat:
☐ Baix ☐ Adequat ☐ Alt

Quantitat d'alumnat que ha aconseguit fer l'activitat proposada:
☐ Cap ☐ Molts pocs ☐ La meitat ☐ La majoria ☐ Quasi tots ☐ Tots

Quantitat d'alumnat que ha aconseguit entendre els conceptes treballats:
☐ Cap ☐ Molts pocs ☐ La meitat ☐ La majoria ☐ Quasi tots ☐ Tots

Nivell de motivació de l'alumnat durant la realització de la fitxa:
☐ Baix (avorrida) ☐ Moderat (entretinguda) ☐ Alt (molt motivadora)

Observacions:

A més, a més, hem recomanat la següent metodologia de treball amb aquest protocol:

1. Les fitxes estan pensades per a ser utilitzades de forma aleatòria, de manera que no cal seguir un ordre correlatiu.
2. Les fitxes i les seues variants estan pensades per a que el professorat seleccione aquella que li resulta més útil al nivell de l'alumnat i més s'adapte al seu context. És a dir, aquestes fitxes estan creades per a ser utilitzades amb una gran flexibilitat.
3. Convé que l'alumnat utilitze la calculadora si es disposa de poc temps o es vol fer més dinàmica l'activitat.
4. En primer lloc el professorat, sense haver repartit encara el material a l'alumnat, tria un/a alumne/a i l'interroga, seguint el procediment de la fitxa escollida. Pot repetir açò tantes vegades com crega convenient, triant cada vegada un alumne/a diferent.
5. De manera opcional, el professorat reparteix a cada alumne/a la fitxa d'aquesta activitat realitzada, per tal que ells la puguen repetir a altres companys, o bé fora de centre educatiu, a amics, familiars o coneguts.
6. Després es recomanable triar diverses activitats semblants a la que s'acaba de realitzar i repartir-les a l'alumnat per tal que uns practiquen amb els altres.

   (Per exemple: l'alumnat seu per parelles. Es trien dues activitats i es reparteix una diferent a cada membre de la parella. De cada parella, un interroga a l'altre i al revés. O bé tots simultàniament amb veu baixa, o bé un per un en veu alta, per a tota la classe).
7. Depenent de les característiques del grup, el professorat podrà aprofundir, o no, en l'activitat, fent entendre a l'alumnat perquè podem endevinar un número fent eixe procediment; és a dir, el que apareix en l'explicació (sols a la fitxa del professorat).

Al finalitzar l'activitat sempre hem insistit en que tant l'alumne com el professor emplenen la seu avaluació en eixe mateix moment. Aquests fulls estan dissenyats per a ser contestats en pocs minuts i aporten una rica i variada informació per a saber el procés que s'ha realitzat (veure figures 1 i 2).

3. EXEMPLIFICACIÓ DE FITXES DE MATEMÀGIA AMB CONTINGUTS DE CIÈNCIES SOCIALS

11.13-A. EL CODI DE HAMMING-1: ELS PAÏSOS

MATERIAL: Una targeta, preparada amb anterioritat, amb els codis, i la graella amb la informació dels països.

PROCEDIMENT:

De manera optativa es pot utilitzar la graella dels països, o bé demanar que es busque aquesta informació. Tria una persona, dóna-li la graella i demana-li que faça els següents passos:

1. Pensa en un país.
2. Respon Sí o No a les següents preguntes:
   - El país està en la Comunitat Europea?
   - Té costa?

- Comença per vocal?
- Apareix el color blau en la seua bandera?

3. No digues res més que jo te l'endevine!

EXEMPLE:

La graella amb la informació dels països apareix al final d'aquesta fitxa.

La targeta preparada amb els codis és la següent:

Bolívia	0000	Hongria	1000
Txad	0001	Txèquia	1001
Uganda	0010	Àustria	1010
Etiòpia	0011	Eslovàquia	1011
Xina	0100	Bèlgica	1100
Brasil	0101	Grècia	1101
Indonèsia	0110	Itàlia	1110
Argentina	0111	Estònia	1111

Cada país té assignat un codi de quatre nombres. El primer nombre començant per l'esquerra correspon a la primera pregunta: si la resposta és SÍ correspon a un 1, i si la resposta és NO correspon a un 0; i de la mateixa manera amb les preguntes següents.

Si preguntes a Leandre, que pensa en el país: **Etiòpia,** respondrà així a les quatre preguntes:

Pregunta 1: El país està en la Comunitat Europea? **No**

Aleshores descartem les dues columnes de la dreta i assignem un 0 a la primera posició:

0___

Bolívia	0000		
Txad	0001		
Uganda	0010		
Etiòpia	0011		
Xina	0100		
Brasil	0101		
Indonèsia	0110		
Argentina	0111		

Pregunta 2: Té costa? **No**
Aleshores descartem les quatre fileres de baix i assignem un 0 a la segona posició:
0 0 _

Bolívia	0000		
Txad	0001		
Uganda	0010		
Etiòpia	0011		

Pregunta 3: Comença per vocal? **SÍ**
Aleshores descartem les dues fileres de dalt i assignem un 1 a la tercera posició:
0 0 1 _

Uganda	0010		
Etiòpia	0011		

Pregunta 4: Apareix el color blau en la seua bandera? **Sí**
Aleshores descartem la filera de dalt i assignem un 1 a la quarta posició:
0 0 1 1
És a dir, ja sabem que ha pensat en **Etiòpia!**

Etiòpia	0011		

Pots arribar a la solució anotant els números corresponents a les respostes i després buscant a quin país correspon; o bé, sobre la mateixa targeta vas tapant (descartant) els resultats que no són vàlids, fins que et quedes amb un de sol.

FES ACÍ LES TEUES ANOTACIONS:

11.13-P. EL CODI DE HAMMING-1: ELS PAÏSOS

NIVELL: 1r Cicle d'ESO

TEMA: Nombres naturals. Sistema binari.

OBJECTIU: Endevinar un país.

SOLUCIÓ I EXPLICACIÓ:

Prèviament ens construïm una tarja amb els codis.

Aquest codi consisteix en associar a cadascun dels 16 països un número del zero al quinze i expressat en el sistema binari. Però no associat de manera aleatòria, sinó fent-nos les quatre preguntes per a cada país i responent de la següent manera:

S'han triat els 16 països de forma que per a cada pregunta poden classificar-se en dos grups; és a dir, s'ha procurat que tinguen 4 propietats dicotòmiques. Aleshores, quan fem una pregunta, el país està en el primer grup o en el segon; dit d'un altra manera, la resposta pot ser SÍ o NO.

Per a cadascun dels països, fem la pregunta 1, i si la resposta és SÍ, posem un 1 en el primer lloc, si és NO posem un 0 en el primer lloc, i així consecutivament.

Ho veurem millor en la següent graella:

	PREGUNTES				CODI	
CARTA	Europa?	Costa?	Vocal?	Blau?	BINARI	BASE 10
Bolívia	NO	NO	NO	NO	$0000_{2)}$	$0_{10)}$
Txad	NO	NO	NO	Sí	$0001_{2)}$	$1_{10)}$
Uganda	NO	NO	Sí	NO	$0010_{2)}$	$2_{10)}$
Etiòpia	NO	NO	Sí	Sí	$0011_{2)}$	$3_{10)}$
Xina	NO	Sí	NO	NO	$0100_{2)}$	$4_{10)}$
Brasil	NO	Sí	NO	Sí	$0101_{2)}$	$5_{10)}$
Indonèsia	NO	Sí	Sí	NO	$0110_{2)}$	$6_{10)}$
Argentina	NO	Sí	Sí	Sí	$0111_{2)}$	$7_{10)}$
Hongria	Sí	NO	NO	NO	$1000_{2)}$	$8_{10)}$
Txèquia	Sí	NO	NO	Sí	$1001_{2)}$	$9_{10)}$
Àustria	Sí	NO	Sí	NO	$1010_{2)}$	$10_{10)}$
Eslovàquia	Sí	NO	Sí	Sí	$1011_{2)}$	$11_{10)}$
Bèlgica	Sí	Sí	NO	NO	$1100_{2)}$	$12_{10)}$
Grècia	Sí	Sí	NO	Sí	$1101_{2)}$	$13_{10)}$
Itàlia	Sí	Sí	Sí	NO	$1110_{2)}$	$14_{10)}$
Estònia	Sí	Sí	Sí	Sí	$1111_{2)}$	$15_{10)}$

Aquesta informació, per tal de poder-la consultar fàcilment, la podem simplificar en una tarja com la següent:

Bolívia	0000	Hongria	1000
Txad	0001	Txèquia	1001
Uganda	0010	Àustria	1010
Etiòpia	0011	Eslovàquia	1011
Xina	0100	Bèlgica	1100
Brasil	0101	Grècia	1101
Indonèsia	0110	Itàlia	1110
Argentina	0111	Estònia	1111

Així, quan fem la primera pregunta, si la resposta és NO, descartarem les dues columnes de la dreta i ens fixarem sols en les de l'esquerra.

Quan fem la segona pregunta, si la resposta és NO, descartarem les 4 files de baix i ens fixarem sols en les de dalt.

I així successivament.

Una forma directa i senzilla de distribuir els països, sense recòrrer als nombres binaris seria omplir la següent graella, on cada país només pot assignar-se a una caselllla que vindrà determinada per les respostes a les quatre preguntes :

	COSTA		*NO COSTA*		
EUROPA	Bèlgica	Itàlia	Àustria	Hongria	*NO BLAU*
	Grècia	Estònia	Eslovàquia	Txèquia	*BLAU*
NO EUROPA	Brasil	Argentina	Etiòpia	Txad	*BLAU*
	Xina	Indonèsia	Uganda	Bolívia	*NO BLAU*
	NO VOCAL	*VOCAL*	*VOCAL*	*NO VOCAL*	

FONT: Adaptat d'ALEGRIA, Pedro. "Códigossecretos y teoría de la información en la magia. Sigma núm. 25, pp. 1-3

NOTA:

A continuació tenim la graella amb la informació dels països. De manera optativa s'aporta aquesta informació als alumnes, o bé la buscaran ells.

Argentina *No UE* *Té litoral* 	**Brasil** *No UE* *Té litoral* 	**Grècia** *UE* *Té litoral* 	**Txad** *No UE* *No té litoral* 
Àustria *UE* *No té litoral* 	**Eslovàquia** *UE* *No té litoral* 	**Hongria** *EU* *No té litoral* 	**Txèquia** *EU* *No té litoral* 
Bèlgica *EU* *Té litoral* 	**Estònia** *EU* *Té litoral* 	**Indonèsia** *No UE* *Té litoral* 	**Uganda** *No UE* *No té litoral* 
Bolívia *No UE* *No té litoral* 	**Etiòpia** *No UE* *No té litoral* 	**Itàlia** *UE* *Té litoral* 	**Xina** *No UE* *Té litoral* 

4. Conclusions

Considerem que la matemàgia encara està poc treballada al nostre país i a l'estat espanyol, però ens ha demostrat que té unes grans potencialitats. No tan sols dóna una imatge molt diferent a la tradicional de la matemàtica, sinó que ens pot servir per a introduir-la en totes les assignatures. Amb la seua pràctica hem comprovat com es pot aprendre de forma subliminal molts continguts i com contribueix a crear un ambient molt agradable en la classe. A més a més, és transversal a

qualsevol edat i pot sorprendre en diferents sectors de població amb una gran amplitud generacional i de formació.

I tot això sense oblidar el procés d'autoaprenetatge que afavoreix la matemàgia on es combinen els números i les operacions amb la creativitat i la imaginació. L'exemple del codi de Hammings és una bona mostra a l'haver de consultar i seleccionar les variables necessàries. Igualment, la proposta dels ninotets de l'annex, és fruit d'un qüestionari a vora un centenar de pares i mares joves, ja que l'autorés prou ignorant en l'actualitat dels personatges infantils.

La llàstima és que després de tants anys d'experimentació i difusió del projecte, possiblement la part més positiva de tot el procés, s'ha arribat a un punt de relentitzacióper canvi de prioritats i per tancament del projecte. Esperem que algun dia aquests materials es puguen reproduir dignament i contaminar d'il·lusió a tota la societat i no tan sols a grups reduïts de docents.Amb aquest desig tanquem l'escrit, oferint una acurada selecció de materials bibliogràfics que ajudaran a tots els interessats per a aquesta temàtica tan atractiva.

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Alegría, P. (2008). *Magia por principios*. Autoedició.

Alegría, P. y Ruíz De Arcaute, J.C. (2002). "La matemagia desvelada". Sigma 21, 145-174.

Alsina i Català, C. (2000). *Estimar les matemàtiques*. Barcelona: Columna.

Álvarez, V., Fernández, P. i Márquez, M.A. (2002). "Cartomagiamatemática y cartoteoremasmágicos". GacetaMatemáticaVol. 5.3, pp. 1-24.

Binarelli, T. (2009). *Manual tutor del ilusionismo*. Milán: RCS Libri. 4ª edició.

Blasco, F. (2007). *Matemagia*. Madrid: Temas de Hoy.

Blasco, F. (2009). *Magiamatemática: de Pacioli a Gardner*, Universitat de Girona.

Blum, R., Hart-Davis, A. Longe, B. &Niederman, D. (2002). ClassicMathemagic.

Brancho López, R. (2007). *El ganchomatemático. Actividadesrecreativas para el aula*. Granda: Port Royal.

Campistrous Pérez, L. (1996). *Aprende a resolverproblemasaritméticos*, La Habana, Cuba: Ed. Pueblo y Educación.

Capó Dolz, M. (2012). *Magiamatemática*. Barcelona: Ediciones B.

Carroll, L. (2006). *Alicia en el país de las maravillas*. Madrid: Anaya.

Coto García, A. (2012). *Matemagia. La magiamatemática que te rodea para torpes.* Madrid: Anaya multimedia.

Deveraux, R. (1995). *Juegos de magia*. Madrid: M. E. Editores S.L.

Enzensberger, H. M. (2012). *El diablo de los números*. Madrid: Siruela.

Gardner, M. (1980). *Carnaval matemático*. Madrid: Alianza Editorial.

Gardner, M. (1980). *Nuevos pasatiemposmatemáticos*. Madrid: Alianza Editorial.

Gardner, M. (1983). *Festival mágico-matemático*. Madrid: Alianza Editorial.

Gardner, M. (1992). *Magiainteligente*. Madrid: Zugarto.

Gardner, M. (2011). *Matemática, magia y misterio*. Barcelona: RBA.

Goldstein, Ph. (2002). *Redivider.* Las Vegas: HermeticPress.

Guedj, D. (200). *El teorema del loro*. Barcelona: Anagrama.

Guzmán, Miguel de (2008). *Cuentos con cuentas*. Barcelona: Labor.

Molina, Mª I. (2002). *El señor del cero.* Madrid: Alfaguara.

Morrison, P. (1984). *Potencias de diez.* Barcelona: Labor.

Muñoz J.; Hans, J.A. y Fernández-Aliseda, A. (2003). "La magiatambién se nutre de matemáticas". Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, Zaragoza, pp. 801-805.

Muñoz Santonja, José (2003). *Ernesto el aprendiz de matemago*. Madrid: Nivola.

Muñoz, J.; Hans, J.A. y Fernández-Aliseda, A. 2003): "Matemáticas y magia". Actas de III JornadasProvinciales de Matemáticas,Madrid: Comunidad de Madrid.

Olalla Linares, C. (2007). *¿Quién mató a Regiomontano?.* Madrid: Nivola.

Perelman, G.Y. (1979). *Matemáticasrecreativas*, Moscú: MIR.

Perelman, G.Y. (1983). *Problemas y experimentoseducativos*. Moscu: MIR, 2ª edición.

Perelman, G.Y. (1989). *Álgebra recreativa*, Moscú: MIR.

Ruiz Domínguez, X. (2013). *Educando con magia*. Madrid: Narcea.

Segarra, Ll. (1997). *Matemàgica*. Barcelona: Pòrtic.

Segarra, Ll. (2006). *Els millors jocs de matemàgica*. Barcelona: Mina.

Sierra i Fabra, j. (2002). *L'assassinat del professor de matemàtiques*. Barcelona: Barcanova.

Tamariz, J. (1991). *El mundo mágico de Tamariz*. Madrid: Ediciones El Prado.

Valle Castañeda, W. (2009). "Un sistema de actividades para el fortalecimiento de la habilidad formular problemas en los estudiantes de secundaria básica", tesis de diploma, Pinar del Río, 2009

Vallejo-Nágera, A. (1998). *¿Odias las matemáticas?.* Barcelona: Martínez Roca.

Vinuesa del Río, C. (2011). "MatemáGicas". Números. Volumen 76, pp. 31-46

http://olmo.pntic.mec.es/~aserra10/articulos/magia.html. Consultat 1/10/2016.

http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/gallardo/ma gia.pdf. Consultat 1/10/2016.

http://www.divulgamat.net/ .Consultat 1/10/2016.

ANNEX

11.11-A. IL·LUSIONISME AMB 16 LLETRES

MATERIAL: Una estrela amb 16 puntes, i en cada punta una lletra o un altre objecte.

PROCEDIMENT:

Tria una persona i demana-li que faça els següents passos:

1. Tria mentalment una lletra de l'estrela.

2. Des de la lletra escollida, en el sentit de les busques d'un rellotge, compta fins a 40, de manera que cada número que comptes avances una lletra en dit sentit.

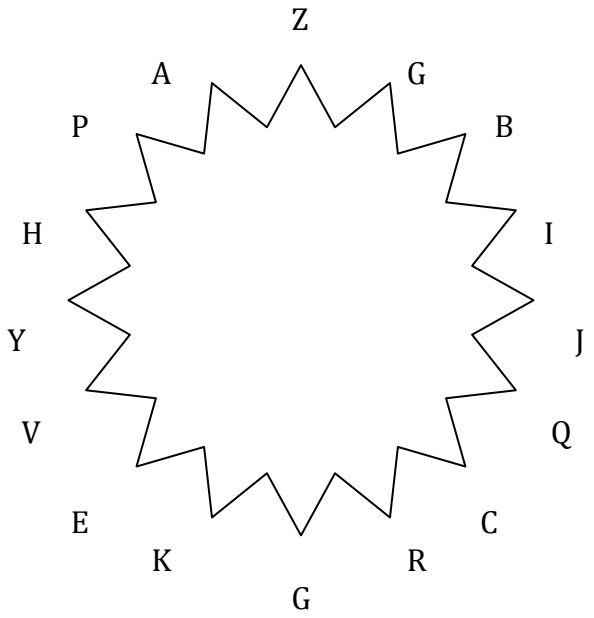
3. A quina lletra has arribat?

SOLUCIÓ:

Des de la lletra que t'ha dit, cal seguir comptant 8, i arribaràs a la lletra escollida mentalment.

EXEMPLE:

Suposem que hem posat 16 lletres de la següent forma:



Si preguntes a Ovidi, que pensa la lletra K, compta 40 seguint el sentit de les busques del rellotge i arriba a la lletra G.

Aleshores tu, en secret, segueixes comptant 8 en el mateix sentit i arribes a la lletra: **K**

FES ACÍ LES TEUES ANOTACIONS:

11.11-P. IL·LUSIONISME AMB 16 LLETRES

NIVELL: 1r Cicle d'ESO

TEMA: Nombres. Múltiples.

OBJECTIU: Endevinar una lletra.

EXPLICACIÓ:

Com hi ha 16 lletres, quan comencem a comptar en una d'elles i comptem 16, hem donat una volta sencera i tornem a estar en la mateixa lletra. Quan comptem 32, hem donat dues voltes senceres i estem un altra vegada en la mateixa lletra. I açò succeirà en cada múltiple de 16:

16, 32, 48, etc....

Quan comptem 40, hem donat dues voltes i mitja, i ens falta comptar 8 fins a arribar a 48, que serà el següent múltiple de 16, i així trobar la lletra triada.

NOTA 1:

Quan la persona a la qual li estem fent el truc, ens diu la lletra a la que ha arribat després de comptar 40, nosaltres podem seguir comptant 8 en el mateix sentit, arribant al lloc 48, que és el següent múltiple de 16. O bé, podem comptar 8 en el sentit contrari (és a dir, descomptar 8), arribant així a l'anterior múltiple de 16, que és 32.

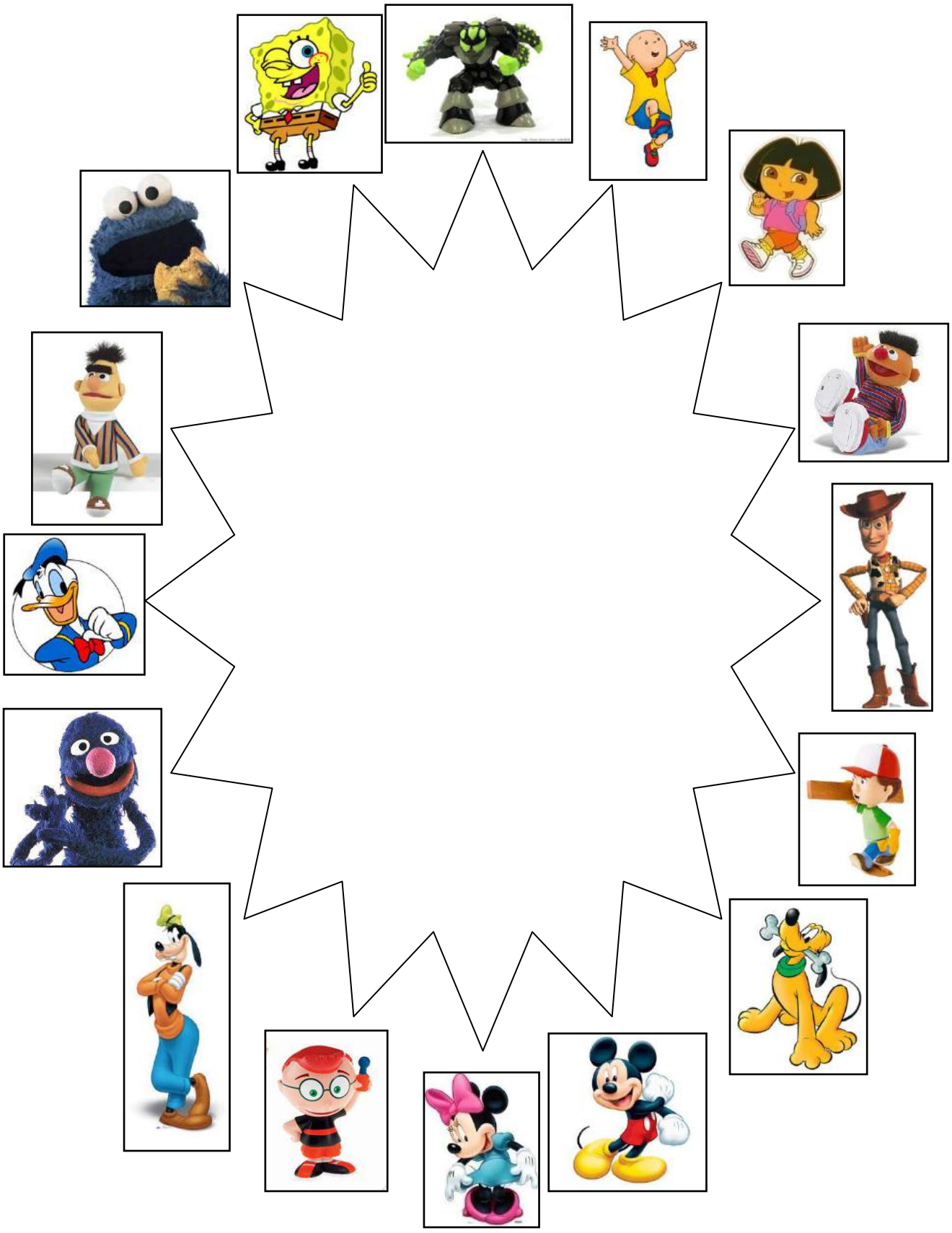
NOTA 2:

No és necessari que les lletres estiguen en un ordre determinat, i podem posar 16 lletres qualsevol.

NOTA 3:

Pot fer-se l'activitat substituint les 16 lletres per altres objectes i colors: figures, personatges, dibuixos, països, etc..... Afegim un exemple a la pàgina següent.

FONT: Adaptat de SEGARRA, Lluís (2006): Els millors jocs de matemàgica. Barcelona. Mina.



GEOMETRIA AL PATI DE L'INSTITUT: CONSTRUCCIÓ DE TEODOLITS Y BALLESTILLLES PER A FER DELS ALUMNES TOPÒGRAFS I NAVEGANTS

Samuel Cortés García
samuel.cortes@salesianos.edu
Colegio Salesiano San Juan Bosco - València

Modalitat: Taller
Nivell educatiu: Secundària
Paraules clau: Teodolit, ballestilla, geometria, trigonometria, Tales

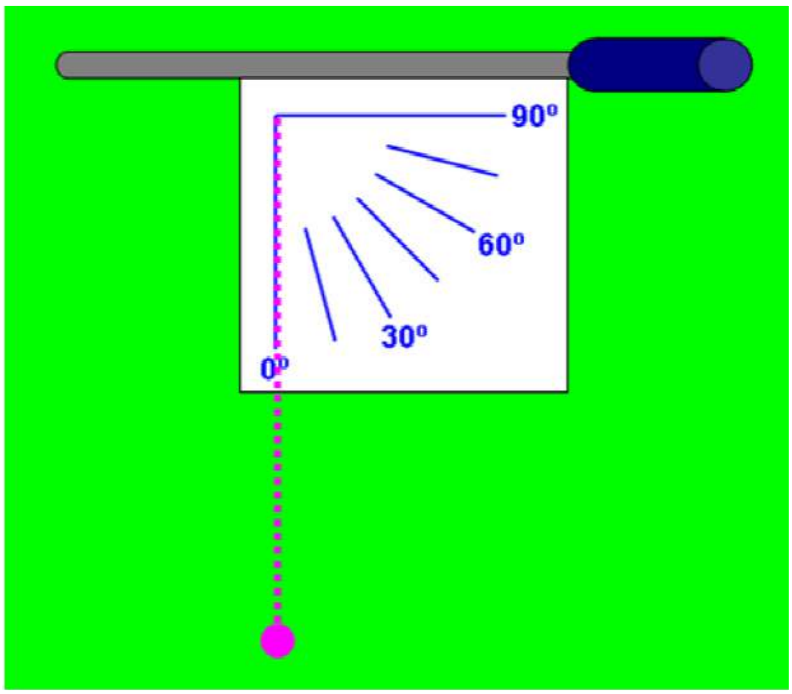
RESUM

Es fàcil convertir el pati de l'escola en un laboratori de geometria, i si ens ajudem de cintes mètriques més encara. Si contem amb una fotografia àrea podem posar a prova les escales o el teorema de Tales. I si a més a més tenim una ballestilla o un teodolit, els nostres alumnes poden sentir-se com navegants en la antiguitat, o com a topògrafs per un dia.

En el taller cada participant es construirà una ballestilla i un teodolit amb materials bàsics. També mostrarem diferents pràctiques que es poden dur a l'aula, així com algunes propostes metodològiques per a fer treballs cooperatius fora de l'aula per tal de treballar diferents competències bàsiques i sobretot la competència matemàtica.

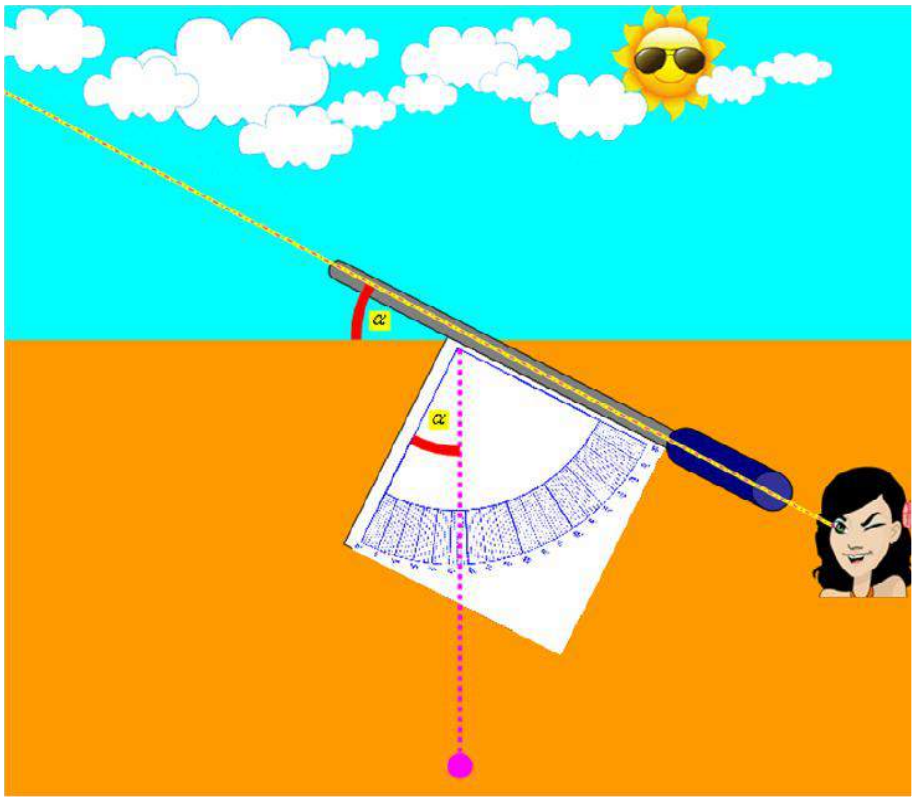
1. TEODOLIT: CONSTRUCCIÓ I APLICACIONS DIDÀCTIQUES

El teodolit que construirem, és molt paregut al anomenat *quadrant anglès*. És un disseny molt senzill com es mostra a l afigura, i encara que tinga una gran precisió és suficient per a l'ús escolar.



Disseny del teodolit: Amb un tub per a mirar, un quart de circumferència graduat, una cordeta i una plomada es construeix el teodolit.

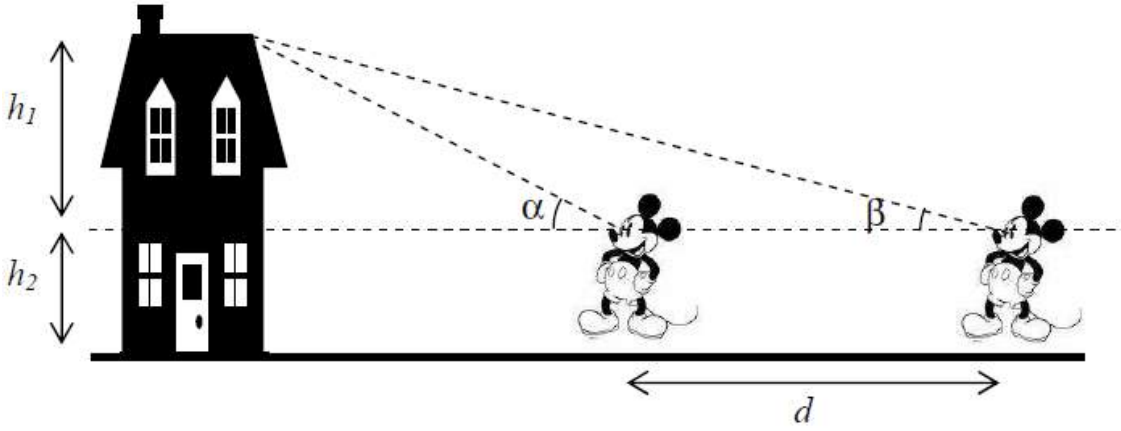
Amb el teodolit podem mesurar l'angle d'elevació sobre l'horitzó del punt més alt d'un edifici, d'un avió que està volant pel cel, una estrella en la nit ... tal i com es mostra a la següent imatge:



Funcionament del teodolit: L'angle d'elevació del objecte observat és el mateix que forma la plomada (perpendicular a l'horitzó) amb l'inici del quadrant graduat (perpendicular a la visual)

Com a exemple d'aplicació, podem calcular l'altura de l'edifici de l'escola des del pati.

Es planteja el problema geomètric:



Amb la mesura de α, β, h_2 i d podem calcular mitjançant un sistema d'equacions l'altura h_1 , i finalment donar l'altura demanada sumant h_1 i h_2.

Consideracions:

El mètode utilitzat es vàlid, però els instruments de medició no són molt precisos. Per disminuir el més possible l'error comés hi ha dues coses a fer:

a. Que la mesura de l'angle α es faça el més prop possible de l'edifici.

b. Que la distància d entre les dues mesures d'angles siga lo major possible.

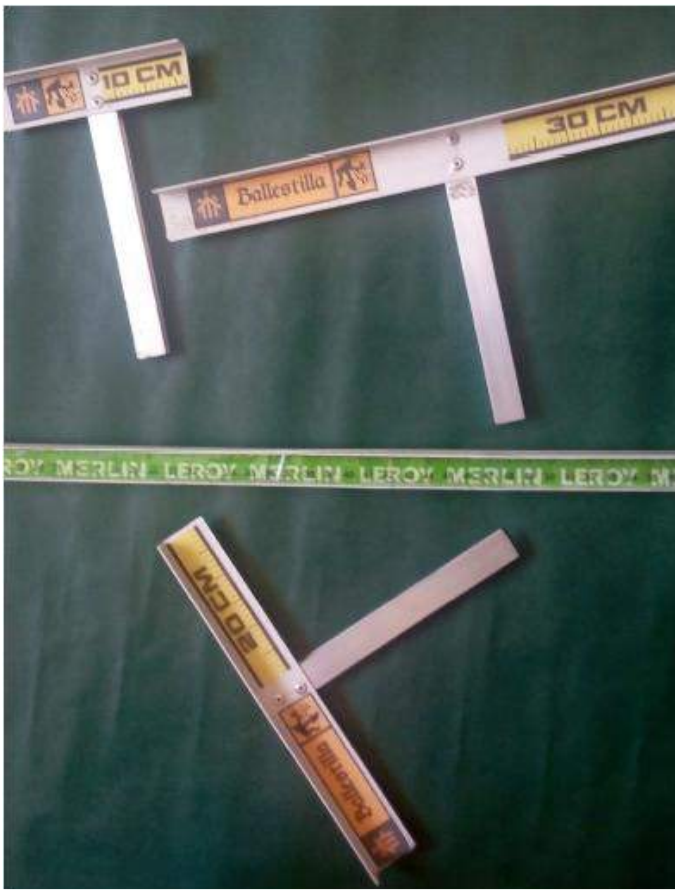
2. BALLESTILLA: CONSTRUCCIÓ I APLICACIONS DIDÀCTIQUES

La ballestilla és un dels primers aparells per a mesurar angles que s'han fet servir, primerament en l'astronomia i posteriorment a la navegació. D'un disseny molt senzill, trobem una ballestilla molt fàcil de construir, com es mostra a les següents imatges.

La ballestilla consta d'una guia longitudinal graduada en centímetres (la de la imatge té 80 cm) amb tres travesseres de deu, vint, i trenta centímetres espectivament.



Ballestilla: Guia longitudinal amb les tres seues transversals.



Detall de les peces de la ballestilla

Com a aplicació de la ballestilla podríem plantejar el següent problema:

És sabut que la distància entre el far del Perelló i el far de Cullera és de 6 milles nàutiques. Viatgem en un vaixell situat enfront de la costa entre el dos fars. Amb la travessera de 30 cm, observem els dos punts a una distància de 40 cm sobre la ballestilla. ¿A quina distància estem de la costa?



Aplicació de la ballestilla: En alta mar, coneixent un distancia entre dos punts coneguts de la costa pots calcular la distància del vaixell a la costa

També podem construir una ballestilla més curta per a gastar en una plantilla, que serveix per a *casar* angles de dues visuals imaginaries, dibuixar a la plantilla aquestos angles, i finalment amb el transportador d'angles mesurar-los.

Amb ajuda d'uns cons i unes cintes mètriques podem resoldre problemes com el que ens palteja la següent imatge:

¿En qué deporte es más fácil marcar un penalti?
¿Con qué ángulo se ven los postes de una portería?

ANCHO DE PORTERÍA	DISTÁNCIA	ANOTACIONES	ÁNGULO
Portería de fútbol (7,32 m)	Punto de penalti (11 m)		
Portería de fútbol (7,32 m)	Punto central (45 m)		
Portería de fútbol sala (3,16 m)	Punto de penalti (9 metros)		
Portería de fútbol sala (3,16 m)	Punto central (19,5 m)		
Portería de jockey (1,7 m)	Punto de penalti (1,8 m)		
Portería de jockey (1,7 m)	Punto central (2,6 m)		

Ballestilla per a Primària: es poden mesurar angles per a resoldre qüestions com l'angle que abarca una porteria des del punt de penalti o des del centre del camp.

AMPLIMATES, UNA PLATAFORMA VIRTUAL DE PROBLEMAS DE 3º E PRIMARIA A 2º ESO

Adela Jaime[1] - María Teresa Sanz[1] - María José Beltrán-Meneu[1]
adela.jaime@uv.es - m.teresa.Sanz@uv.es - maria.jose.beltran@uv.es
Pascual D. Diago[1] - Irene Ferrando[1] - Juan Gutiérrez-Soto[1]
pascual.diago@uv.es - irene.ferrando@uv.es - juan.gutierrez-soto@uv.es
Noelia Ventura-Campos[2]
venturan@uji.es
[1]Departamento de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València – València
[2]Departamento de Educación, área Didàctica de la Matemàtica
Universitat Jaume I de Castelló - Castelló

Modalidad: Taller
Niveles: Primaria, Secundaria
Palabras clave: matemáticas, problemas, virtual, Primaria, ESO

RESUMEN

AMPLIMATES nació a finales del curso 2014 - 2015 con el objetivo de crear y mantener una plataforma digital de problemas de matemáticas para los cursos 3º EP a 2º ESO. Se trata de una página web de acceso libre, en la que periódicamente se renuevan problemas. Los estudiantes que lo desean pueden enviar sus soluciones, algunas de las cuales aparecen en la página web, una vez transcurrido el período de tiempo concedido para enviar propuestas. En este taller presentamos algunos de los problemas del estilo de los que aparecen en la web de AMPLIMATES. Lo hacemos con un formato de "escape room", con varios enigmas enlazados, de manera que es necesario ir resolviéndolos sucesivamente para conseguir la clave que permitirá salir de la habitación en la que se encuentran encerrados los participantes.

1. LA PLATAFORMA AMPLIMATES

Se trata de una plataforma virtual, http://amplimates.blogs.uv.es/, para la resolución de problemas de matemáticas.

Son numerosos los niños a los que les gustan las matemáticas y para bastantes de ellos resolver problemas constituye una diversión. Véase, por ejemplo, el éxito de las olimpíadas matemáticas; sólo en las de la Comunidad Valenciana participan más de 1000 alumnos cada año, con un aumento progresivo año tras año.

2. EQUIPO DE AMPLIMATES

La idea de AMPLIMATES se forjó durante el curso 2014-15 desde un grupo de profesores del Departament de Didàctica de la Matemàtica de la Universitat de València.

El equipo inicial estaba constituido por un grupo de docentes y algunas estudiantes; estas últimas, al finalizar sus estudios se involucraron en otras tareas y desde el curso 2015-16 son los profesores quienes mantienen la plataforma.

3. FUNCIONAMIENTO DE AMPLIMATES

Tal y como se observa en la captura de pantalla de la web de AMPLIMATES (Figura 1), los problemas están organizados en 3 niveles:

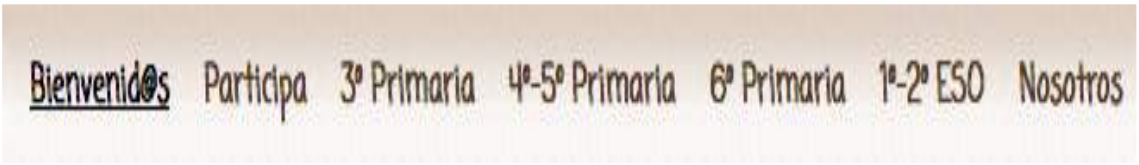


Figura 1: Cursos en los que se dividen los problemas de la plataforma AMPLIMATES

Una vez propuestos, la visibilidad de los problemas es permanente, y pueden descargarse en formato .pdf. Se da un plazo de presentación de las respuestas, tras el cual se suben las soluciones correctas recibidas a la plataforma y se presentan nuevos problemas.

Para preservar el anonimato de los participantes, pedimos a cada alumno un pseudónimo que identificará sus respuestas en la red. Consideramos que, el hecho de que los niños vean sus respuestas en AMPLIMATES supone un incentivo para ellos e incrementa su interés por las matemáticas.

Pretendemos que los problemas que planteamos no sean rutinarios ni una aplicación directa de algoritmos de operatoria, y que en ellos se necesite poner en juego la lógica y el razonamiento matemático. En efecto, pensamos que estos problemas contribuyen a incrementar conocimientos, habilidades, estrategias y razonamiento matemático, si bien no en todos en la misma medida.

Esta idea no es original. Existen plataformas virtuales que plantean problemas periódicamente y luego ofrecen algunas de las soluciones aportadas por los niños. "Nrich", de la Universidad de Cambridge, es una de ellas, utilizada actualmente en muchos países como fuente de recursos y creada en Gran Bretaña con un objetivo inicial: incentivar a los niños a resolver problemas no rutinarios, problemas "ricos", tal y como se designan desde Nrich.

4. EL TALLER

En las XIII Jornadas de Educación Matemática de la CV mostramos algunos de los problemas planteados en la plataforma AMPLIMATES o del estilo de los que allí se muestran. Lo hacemos en un formato de "escape room", de manera que a los resolutores se les encierra en el aula y se esconde la llave que cierra dicha habitación. Los asistentes dispondrán de media hora para conseguir la llave y poder abrir. Se hacen tres talleres simultáneos, de manera que en cada uno de ellos se plantean problemas de niveles diferentes: uno con problemas apropiados para 3º y 4º E. Primaria, otro para 5º y 6º E. Primaria y un tercero para 1º y 2º de ESO.

A continuación mostramos los ejercicios propuestos para 3º y 4º EP con algunas indicaciones sobre su planteamiento y resolución:

ENIGMA 1 VISTAS DE UN CUBO

Haz todas las variantes posibles de esta construcción con las siguientes condiciones:

- Caben en una caja de 4x2x2 (cada una por separado).

- Todas se ven como en el dibujo, pero ten en cuenta que las zonas que no se ven pueden ser distintas.

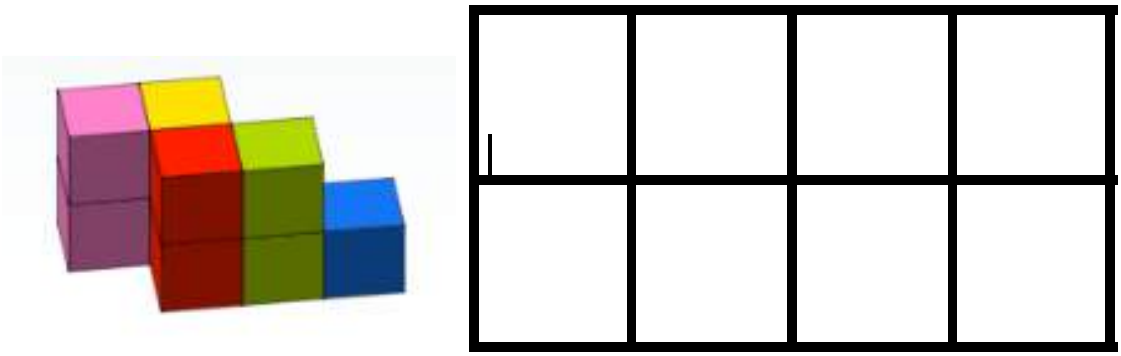


Figura 2: Dibujo presentadoa los asistentes para resolver el enigma "vistas de un bloque de cubos"

Soluciones: Vista desde detrás. Como puede haber huecos en vertical, podría no estar el inferior amarillo, con lo cual hay dos variantes más: no amarillo sí marrón (en este caso la superior amarilla no tiene apoyo inferior), no amarillo no marrón. Por lo tanto, hay 4 posibilidades. Si exigimos que no haya huecos en vertical, entonces sólo habría 2 posibilidades. En la Figura 3 se presentan gráficamente las soluciones detalladas.



Figura 3: Soluciones del enigma "vistas de un bloque de cubos"

Observación: Para la resolución de la actividad, facilitamos una plantilla 2x4 porque los niños de esos niveles de primaria entienden mejor el problema cuando construyen con los límites marcados.

ENIGMA 2 ENGORDANDO A MI PERRITO

Mi perrito estaba esquelético. Lo llevé el lunes al veterinario y se está poniendo muy gooordo.

El lunes compré una bolsa con 1 kg (**1000 gramos**) de preparado especial para perros inapetentes y le puse **100** gramos de su comida, pero luego cada día ha comido **20 gramos** más que el día anterior.



Figura 4a: Dibujo del enigma "engordando a mi perrito"

Quiero saber cuál es el último día que mi perro tendrá toda la comida que necesita, si la cantidad que toma sigue aumentando cada día 20 gramos.



Figura 4b: Dibujo del enigma "engordando a mi perrito"

Solución

100 + 120 + 140 + 160 + 180 + 200 = 900 gramos.

Como el día siguiente necesitaría 220 gramos, ya no hay suficiente. Por lo tanto, puede comer lunes, martes, miércoles, jueves, viernes y sábado. El **sábado** es el último día.

Nota: El error usual es ir sumando 20 gr, pero sin acumular lo del día anterior. Así, para los sucesivos días se daría como valor 100, 120, 140, 160, 180 …

Además, el valor que se proporciona en los datos como máximo posible (1000 gramos) no coincide con ninguno de los valores obtenidos cada día (cuando se va resolviendo bien), por lo que hay que pensar que el sábado se queda corto pero el domingo se pasa.

ENIGMA 3 NÚMEROS ENLAZADOS

En la fábrica CUBOTRÓN cada visitante mete un número en un cubo y éste se va transformando a medida que pasa de cubo en cubo, realizando la operación que se indica por el camino mediante una flecha.

El último visitante nos ha dicho que, después de haber pasado por todos los cubos, al resultado final le ha sumado el mayor número impar de dos cifras.

Nosotros te damos una tarjeta con este valor (ya sumado el impar) y tu debes averiguar el número inicial, o sea, el que entró al primer cubo.

Para ello, disponemos de una colección de tarjetas con números. Algunos de esos números no forman parte del circuito, pero otros sí. Si encuentras el que corresponde, por el reverso de la tarjeta verás escrita una instrucción. Síguela y hallarás una ficha con la operación que hizo la máquina para dar el resultado que tú tenías.

Al ir enlazando valores, llegaras al principio.

Por ejemplo, tienes la tarjeta con el número 70. Por detrás dice "avanza tres pasos hacia la puerta. Si te levantas y lo haces, encontrarás una tarjeta con una operación, por ejemplo, -10. Eso significa que el número 70 se ha conseguido restando 10 al número del cubo anterior. Por lo tanto, en el cubo anterior está el 80 y la flecha que va hacia el 70 debe tener como instrucción -10. En la Figura 5 se ejemplifica de forma gráfica.

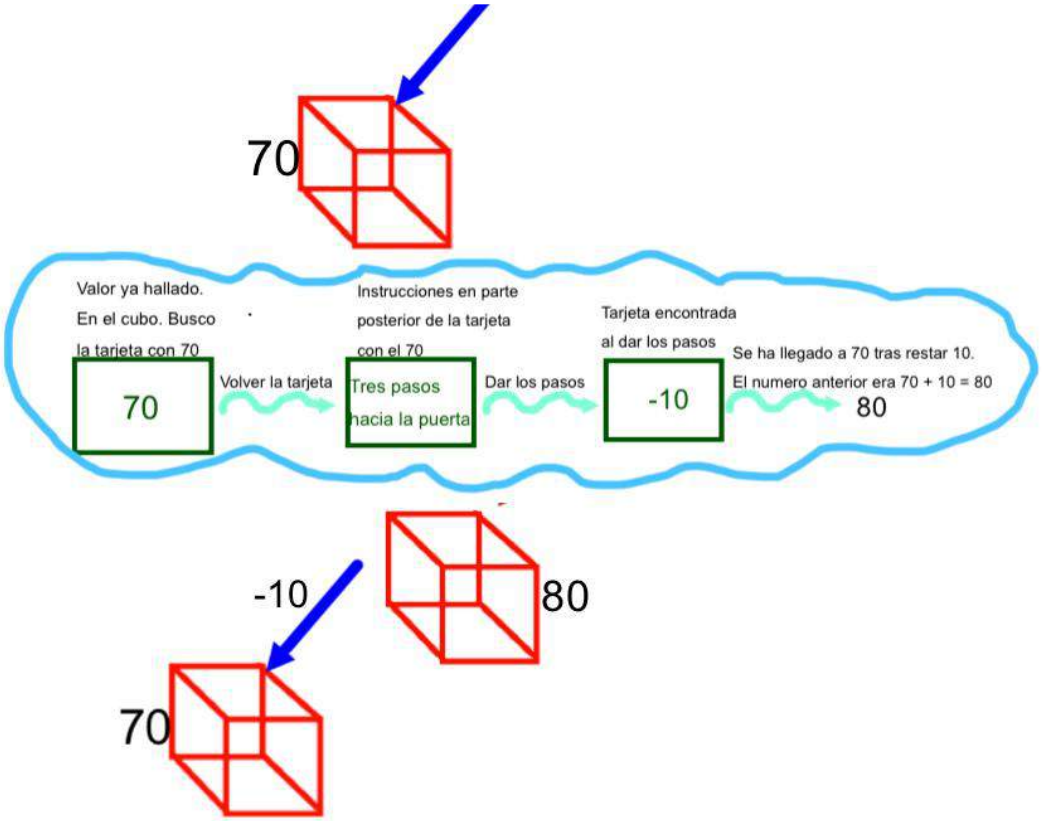


Figura 5: Ejemplo que explica cómo resolver el enigma "números enlazados"

Completar el circuito de la Figura 6 escribiendo las operaciones en las flechas y los números en los cubos te puede ayudar a resolverlo.

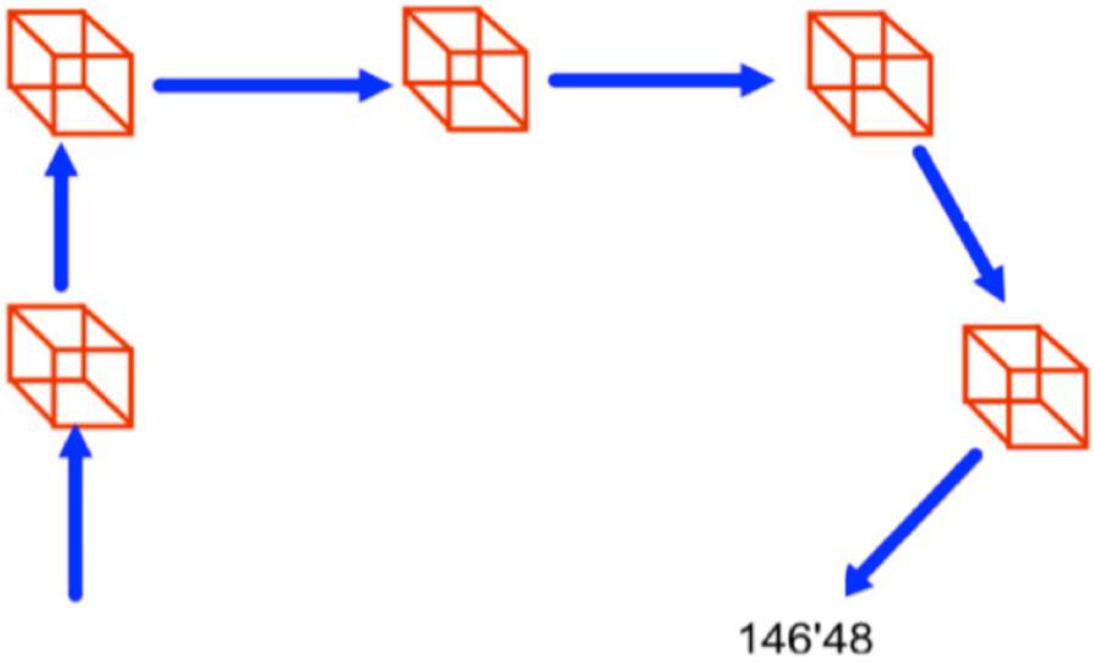


Figura 6: Circuito para completar de "números enlazados"

Solución. Se muestra en la Figura 7.

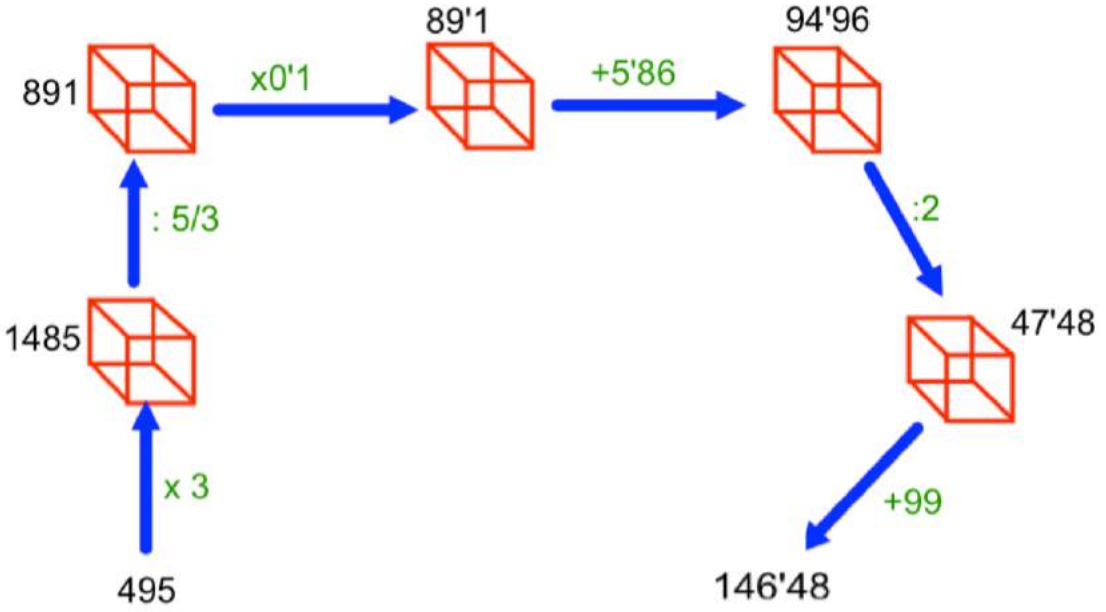


Figura 7: Solución del enigma "números enlazados"

En la Figura 8 se muestra ejemplos de tarjetas con números (uno válido y otro no), operaciones e instrucciones para obtener la operación:

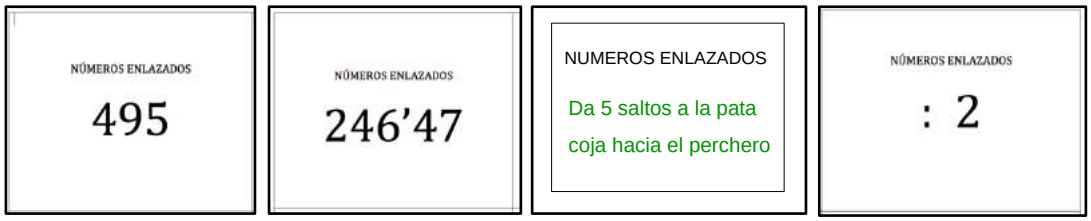


Figura 8: Ejemplos de tarjetas del enigma "números enlazados"

Nota: Para los niños de 3º y 4º NO utilizamos fracciones ni operaciones con números decimales. En este diagrama aparecen porque los asistentes al taller eran profesores, por lo que unos números demasiado simples podrían ocultar la dificultad que entraña esta tarea.

A la hora de diseñar la secuencia, también se puede proponer un recorrido en el sentido que corresponde a las operaciones propuestas y no el inverso. O sea, comenzar con el número inicial e ir aplicando sucesivamente las operaciones que aparecen en las tarjetas. Esto reduce el nivel de dificultad.

A continuación, mostramos la solución de un circuito que hemos propuesto a los niños de 3º y 4º de E. Primaria, manteniendo el orden de las operaciones a realizar.

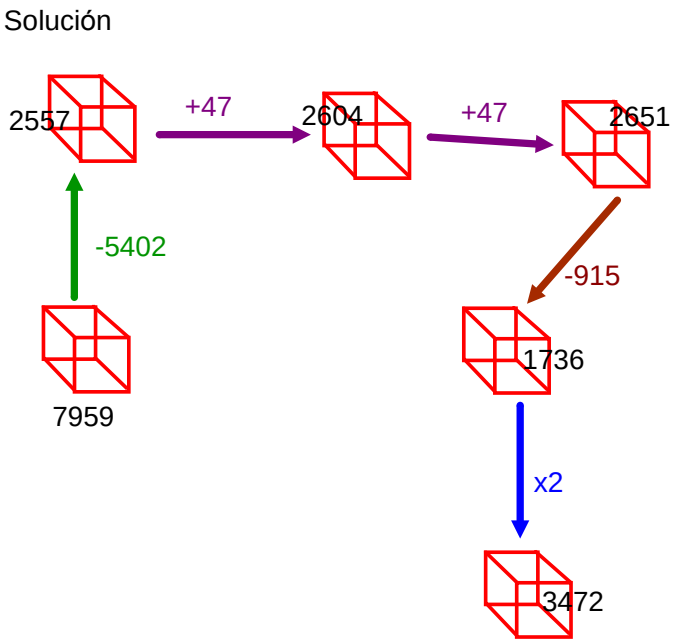


Figura 9 "números enlazados" propuesto a niños de 3º y 4º EP, con su solución

A 3472 hay que sumarle 99 (mayor impar de dos cifras) y se obtiene que el 3571 es el número que sale del circuito.

5. Conclusiones

Aunque en este taller los problemas se realizan en directo y se han añadido algunas variaciones respecto al formato de la página de AMPLIMATES (por ejemplo, las instrucciones de movimientos para conseguir localizar cierta tarjeta en los "números enlazados"), los ejemplos que se han mostrado se pueden tomar como modelo de los problemas que proponemos en la plataforma. Así pues, el desarrollo de la visualización, de la comprensión lectora, del razonamiento lógico y el buen uso de las operaciones aritméticas, suelen formar parte de nuestros objetivos principales a la hora de diseñar un problema.

En el primero, "Vistas de un bloque de cubos", un objetivo que nos proponemos, desde el punto de vista de la educación matemática, es el desarrollo y práctica de la visualización.

En el segundo, "Engordando a mi perrito", la comprensión lectora, razonamiento lógico y utilización de las fases de Polya de resolución de problemas: comprender el problema, trazar un plan para resolverlo, poner en práctica el plan y comprobar los resultados. El error usual que hemos comentado anteriormente, en relación a la resolución de ese problema está directamente relacionado con las dos primeras fases.

En el tercer enigma, "Números enlazados", si se plantea con el valor final como dato, tal como hacemos en este taller para los profesores, hay que practicar la reversibilidad de las operaciones, lo cual no resulta evidente en algunos pasos, además de la práctica de operaciones y algún conocimiento matemático (números impares).

Hasta el momento han hecho uso de los problemas de AMPLIMATES niños que de manera individual y autónoma han conocido la plataforma, así como niños aconsejados por la profesora del aula.

Futuro de AMPLIMATES

No queremos cerrar esta presentación sin comentar que en estos momentos el equipo de AMPLIMATES no puede asumir el trabajo que supone el mantenimiento de esta plataforma y, si bien los problemas que se han propuesto hasta el momento seguirán a disposición de quien los quiera consultar, no ampliaremos la batería de problemas, al menos durante un tiempo.

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Página web de AMPLIMATES http://amplimates.blogs.uv.es/ Consultado el 13/10/2016.

NRICH. Universidad de Cambrid

MATEMÁTICAS EN EL MUNDO: EL CALENDARIO

Bernardo Gómez
Bernardo.Gomez@uv.es
Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia - València

Modalidad: Taller
Niveles: Multinivel
Palabras clave: Calendario

RESUMEN

Hay un parangón entre Calendario y sistemamétrico decimal y es que ambos son los dos conjuntos de normas socialesque más han influido en la regulación de la vida diaria de las personas.

En su formulación actual son el resultado de las reformas de anteriores sistemas: la reforma gregoriana del papa Gregorio XIII en 1582 y la reforma finalmente acordada en la Conferencia General de Pesos y Medidas de París en 1889.

Aunque ambas reformas se adoptaron con más de cuatrocientos años de diferenciahan sido problemas científicos muy debatidos y pasos importantísimos en la historia de la humanidad y la globalización.Las dos se concibieron como intentos de solución definitiva, con base matemática, a problemas derivados de una regulación imperfecta de las normas que regían la vida social, administrativa yeclesiástica. Son movimientos de reforma que se inician desde arriba, de la mano de los poderes más influyentes: el papado en un caso y la Francia revolucionaria en el otro.

> *En ambos casos se cuenta con la participación de España, que de alguna manera aporta algo a la paternidad de las reformas, pero al parecer en un plano subsidiario.*

Ahora bien, mientras que la enseñanza del SMD ha sidoacogida por la institución escolar y está presente en el curriculumobligatorio de matemáticas con el calendario no ha ocurrido lo mismo.Qué duda cabe de que el conocimiento de sus fundamentos matemáticos no es necesario parausar el calendario, contrariamente a lo que ocurre con el SMD,pero eso no justificaque la mayoría de los ciudadanos ignoren casi todo acerca de los términos, las razones, las complejidades, los procesos y los cómputos quelo explicany fundamentan.

- *¿Qué es el calendario? ¿Qué significa bisiesto?*
- *¿Por qué el año nuevo empieza un día irrelevante del invierno y no cualquier otro día del año, más interesante, como un equinoccio o un solsticio, o un día de luna nueva?*
- *¿Por qué en Semana santa siempre hay Luna llena?*
- *¿Por qué la semana de 7 días esplanetaria (Luna Marte, Mercurio, Júpiter, Venus, Saturno) menos el domingo?*
- *¿Por qué cada año cambia la fecha de la Pascua, y unos años en marzo y otros en abril?*

En el taller se intentará dar respuesta a estas preguntas y se trabajará "el cómputo" para calcular la fecha clave del calendario: la fecha de la pascua.

1. CALENDARIO

El calendario es una distribución del tiempo en periodos adecuados a la actividad humana, social y religiosa. Desde tiempos remotos los calendarios se han basado en "el concepto cíclico del tiempo, asociado a fenómenos naturales o astronómicos y susceptible de ser medido y dividido en unidades, que permite situar acontecimientos ocurridos en el pasado y proyectar actividades futuras" (Toro, 2013, p.57). Ejemplo, de estas unidades son el día, la lunación y el año solar.

Estos ciclos conducen a varios tipos de calendarios: solares, lunares o lunisolares, según que se tome como referencia el tiempo transcurrido entre dos pasos sucesivos del Sol por el mismo punto de la eclíptica, el tiempo transcurrido para que la Luna vuelva a tener la misma posición respecto al Sol y a la Tierra, o una combinación de ambos ciclos.

En la cultura occidental cristiana el calendario es solar para la mayoría de los efectos prácticos, aunque ciertas fechas (como la pascua) se fijan según un calendario lunisolar, con el inconveniente de que ni un mes lunar ni un año solar constan de un número exacto de días y esta circunstancia provocó discordancias y complicaciones cuyos intentos de solución dieron lugar a procesos de cómputo imprecisos, cambiantes y controvertidos.

LaIglesia Católica deseabaconmemorar la pasión, muerte y resurrección de Cristo de acuerdo con las fechas que estipulan las sagradas escrituras. Estas fechas estaban ligadas a la pascua de los hebreos ya que según la Biblia es cuando Cristo murió. Las primeras comunidades cristianas celebraban la pascua el mismo día que los judíos, concretamente el 14 de la luna del mes judío de Nissan, que al ser un calendario lunar corresponde a la luna llena que cae entre marzo y abril, después del equinoccio de primavera.

En el momento de la vida de Cristo el calendario vigente en el imperio romano era el juliano, que era solar, de modo que tras la Pasión y muerte de Cristo los papas sucesivos se encontraron que tenían que situar la fecha dela Pascua cristiana, que era una fiesta móvil lunar del calendario hebreo, enel calendario solar juliano.

En el siglo III Constantino (272-337), que había adoptado el cristianismo como religión del estado, implantó oficialmente la semana planetaria de 7 días de los dioses paganos (originaria de Babilonia: *DiesLunae, Martis, Mercudi, Jovis, Veneris, Saturnis y Solis*), desconocida en el calendario romano de *calendas nonas e idus*.

Para Constantino (272-337), el problema era poner de acuerdo a las distintas facciones del cristianismo. Esto era crucial para un estado-religión, con un mismo conjunto de reglas. A tal fin, en el año 325 Constantino promovió un Concilio en la ciudad turca de Nicea[1], corriendo con todos los gastos, con el mandato de resolver las disputas, diferencias y controversias, unificar la doctrina y establecer reglas comunes para una estructura centralizada encabezada por él mismo como emperador por mandato divino.

En este concilio se llegó a un acuerdo: la Pascua cristiana debía celebrarse en un mismo día común para toda la cristiandad y en fecha diferente a la conmemoración

[1]Actual Iznick, Turquía.

pascual de los judíos. El día elegido fue el de la Resurrección, el cual debía celebrarse el *diessolis,* posterior a la primera luna llenaque cae tras el equinoccio de primavera, diferenciándose así del *Sabbath* judío, excepto si coincidiera con la pascua judía, en cuyo caso se celebraría el*diessolis*siguiente. En el 327, Constantino mandó que el *diesSolis* se llama*dies Dominica* (día del señor).

2. EL CÓMPUTO

Para determinar la fecha de Pascua se necesitaba determinar

- la fecha del equinoccio de primavera
- la fecha de la primera Luna después del equinoccio
- la fecha de su plenilunio
- el día de la semana en el cual se produciría este plenilunio
- el domingo posterior, que es el de Pascua

Y para ello había que conjugar tres ciclos de tiempo, diferentes e inconmensurables entre sí:

- el mes lunar o lunación
- el año solar
- y la semana planetaria

El año Juliano tenía un error, era varios minutos más lento que el año solar (se retrasaba), algo que los romanos no pudieron tener en cuenta, porque su idea de hora era imprecisa y no conocían su división en minutos y segundos, de modo que en su lugar tomaban fracciones de día.

Esta imprecisión producía al correr de los años un desfase estacional de modo que en el 325, año del concilio de Nicea, el equinoccioreltuvo lugar el 21 de marzo y no el 25 de marzo que marcaba el calendario juliano. En ese Concilio se acordó que el equinoccio civil fuese siempre el 21 de marzo, para que pudiera concordar mejor con los datos astronómicos en ese momento, convencidos que el error apenas lo alteraría.

Según lo acordado la pascua debía celebrarse el domingo inmediatamente siguiente a la primera luna llena después 21 de Marzo.

3. EL MÉTODO DEL ÁUREO

La Iglesia usaba una repetición lunar para señalar todos los años en el calendario la fecha de la Luna de Pascua.

Esta es un ciclo de 19 años, observado por Metón en el siglo V a. C., después de los cuales vuelven a concordar las fases de la Luna con los mismos días del año solar.

Sabiendo el lugar que ocupa un año en el ciclo lunar se puede determinar la fecha en que caen las lunas llenas de ese año y de ahí la luna llena pascual con ayuda de unas tablas de lunaciones que resultan de un conteo de 29 y 30 días alternativamente. Este lugar viene dado por un número ordinal llamado áureo, que es un resto módulo 19.

Una vez se tiene la fecha de la Luna llena pascual lo que falta por averiguar es la fecha del domingo posterior a esa Luna llena en que está mandado celebrar la

Pascua.Para averiguar este dato los computistas introdujeron la letra dominical, que es la asignación de una de las siete primeras letras del alfabeto al primer domingo del año.

> Estas letras se asignan de acuerdo con el siguiente patrón: La *A* corresponde siempre al 1 de enero, la *B* al 2, *C* al 3 y así hasta la *G* que corresponde al 7 de enero. Luego la secuencia se repite en el mismo orden y consecutivamente hasta completar una tabla para todos los días del año.

Esta letra la mantienen todos los domingos del año, pero va cambiando de año en año, porque al ser 365=52×7+1. El primer día de enero del año siguiente no volverá a caer el mismo día de la semana sino el siguiente, bisiestos aparte. Para conocer la letra dominical de un año hay que hacer un cálculo módulo 7.

Una vez obtenida la letra dominical, la fecha del domingo de Pascua se halla con ayuda de su número áureo buscando en la tabla de las fechas de las lunas llenas pascuales la que corresponde a ese áureo, y en la tabla anual de las letras el día que corresponde a la letra dominical hallada después del día de la luna llena de pascua.

4. El Calendario Gregoriano

Al disponer de datos más precisos se supo que la verdadera duración del año solar era 11’ menor de lo previsto en el sistema eclesiástico-juliano.Esto producía un exceso del año civil que hacía que el equinoccio real se adelantara respecto al eclesiástico (21 de marzo) a medida que pasaban los años.

También se supo que la verdadera duración del ciclo decemnovenal era (1h **½)** mayor de lo que se suponía.Esto producía un defecto del ciclo Metónico que hacía que las fechas de los novilunios y plenilunios reales se retrasaran respecto a los eclesiásticos a medida que transcurrían los ciclos.

Este desajuste preocupaba a la Iglesia, por lo que se convirtió en la institución promotora de los estudios encaminados a ofrecer una solución definitiva. La solución al problema del desajuste se encaminó a dos tipos de correcciones: una para suprimir los días que sobraban del calendario para converger de nuevo con el equinoccio de primavera, y otra para para añadir los días que faltaban para ajustar las lunaciones.

La propuesta de la «congregación» (comité) nombrada al efecto por el papa Gregorio XII, basada en los cálculos de AloisiusLilius, fue utilizar periodos donde las diferencias con los cálculos nicenos no fueran fraccionarias, sino enteras. Lilio había hallado que por el exceso del año solar juliano el equinoccio civil se retrasaba 3 días naturales al cabo de 400 años con respecto al astronómico, y por el defecto del ciclo Metónico, los novilunios y plenilunios civiles se anticipaban 8 días con respecto a los reales al cabo de 2500 años.

Para que el año solar eclesiástico quedase igualado y ajustado al año solar astronómico, se acordó suprimir 3 días en cada ciclo de 400 años. Para facilitar el cómputo se propuso que se hiciese la supresión de un día a cada uno de los tres primeros años centenares de cada de ciclo, que al ser bisiestos, dejaron de considerarse como tales.

Para que los novilunios quedasen ajustados con los reales, se acordó aumentar 8 días en cada ciclo de 2500 años. Para mayor comodidad se prefirió aumentar un

día cada 300 años y de 300 en 300 hasta tener las ocho correcciones a los 2400 años, de modo que los 100 años que faltaran hasta los 2500 se dejasen correr.

Según lo decretado los ciclos que rigen en la Iglesia después de la reforma empezaron en 1601 el de 400 años, por lo cual la 1ª corrección solar fue en 1700 y en 1501 el de 2500 años, con lo cual la 1ª corrección lunar fue en 1800.

ÍNDEX ALFABÈTIC D'AUTORS

Arbona, Eva 103
Arenas Planelles, Fernando 147
Argudo Ortiz, Marta 47
Arnau, David 37
Bataller Soler, David 135
Beltrán-Meneu, Mª José 103, 159, 203
Bonet Juan, Lluís 139
Briz Alabau, Mayte 87
Carrillo de Albornoz Torres, Agustín .13
Castillo, Carlos 69
Cortés García, Samuel 197
Couchoud Pérez, Juan Manuel 131
Diago, Pascual D. 205
Escrivà, Mª Teresa 159
Ferrando, Irene 81, 203
Ferrando, Óscar 69
Figueras, Olimpia 37
Forner Gumbau, Òscar 113
Gómez, Bernardo 211
Gutiérrez, Ángel 103, 159
Gutiérrez-Soto, Juan 37, 203
Jaime, Adela 13, 103, 159, 203
Nadal, Angèlica 69
Peiró i Estruch, Ricard 167
Pla, Marta 81
Puig, Luis 21
Ramiro Roca, Enric 181
Rosado, Luis 69
Salvador, Mª José 69
Santandreu, Marta 69
Sanz, María Teresa 203
Segura Cordero, Carlos 55
Sendra, Moisés 69
Thibaut Tadeo, Elena 55
Valenzuela, Carlos 37
Ventura-Campos, Noelia 203

Organitza

Societat d´Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana **"al - Khwārizmī"**

Convoca

Societat d´Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana **"al - Khwārizmī"**

Col·laboren

CORTS VALENCIANES

GENERALITAT VALENCIANA
CONSELLERIA D'EDUCACIÓ, INVESTIGACIÓ, CULTURA I ESPORT

VNIVERSITAT DE VALÈNCIA Facultat de Magisteri

VNIVERSITAT DE VALÈNCIA Departament de Didàctica de la Matemàtica

feemcat
Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya

SBM Xeix

Institut GeoGebra Valencià

CASIO
Divisió Educativa